Natural Science Report, Ochanomizu University, Vol. 8, No. 1, 1957 1
お茶の水女子大学 自然科学報告 第8巻 第1号

Sur les Points Singuliers des Équations Différentielles Ordinaires du Premier Ordre, V

Tizuko Matuda, née Katō (松田千鶴子, 旧姓 加藤)
Institut de Mathématiques, Faculté des Sciences,
Université Ochanomizu, Tokyo

1. Le cas où il existe un seul point critique sur la courbe solution limite.

Nous considérons l'équation différentielle

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,\ y)}{yQ(x,\ y)},$$

où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des polynomes de y sans facteur commun, leurs coefficients étant des fonctions régulières de x pour $|x|<\delta$. Par le changement de la variable $x=e^t$, l'équation différentielle se transforme en

$$\frac{dy}{dt}=\frac{P(e^t,\ y)}{yQ(e^t,\ y)}, \tag{1}$$

Nous supposons que l'équation différentielle

$$\frac{dy}{ds}=\frac{P_0(y)}{Q_0(y)}, \tag{2}$$

où $P_0(y)=P(0, y)$ et $Q_0(y)=Q(0, y)$, satisfait aux conditions suivantes:

i) Une branche $\bar{\varphi}(s)$ d'une solution $\varphi(s)$ de l'équation différentielle (2) admet une période réelle ω pour $0\leq\Im s\leq r$;

ii) $\bar{\varphi}(0)=0$;

iii) $P_0(\bar{\varphi})\neq 0$, $Q_0(\bar{\varphi})\neq 0$ pour $0\leq\Im s<r$.

Nous avons démontré les théorèmes dans nos mémoires précédents [1];

Théorème 1. *On a la série solution*

$$y(t)=\bar{\varphi}(t-\tau)+\sum_{j=1}^{\infty}p_j(t-\tau)\,e^{jt} \tag{3}$$

uniformément convergente pour $+0<\Im(t-\tau)<r-0$, $\Re t\to-\infty$[1], *où les* $p_j(t)$ *sont des fonctions périodiques admettant la période réelle* ω.

Théorème 2. *S'il existe une solution de* (1) *telle que* $y(\tau-m\omega)=0$ $(m=0, 1, \cdots)$ *et si* $\Re\tau\,(<0)$ *est assez grand en module, une branche de*

1) Cela veut dire que quelque petit que soit $\varepsilon>0$, la série est uniformément convergente pour $\varepsilon<\Im(t-\tau)<r-\varepsilon$ pourvu que $\Re t$ soit négative et assez grande en module.

cette solution est développable en la série (3) *uniformément convergente pour* $0 \leq \Im(t-\tau) < r-0$, $\Re t \to -\infty$ *où les* $p_j(t)$ *sont des fonctions périodiques admettant la période réelle* ω, *et holomorphes dans* $0 \leq \Im t < r-0$ *sauf aux points* $-m\omega$ *qui sont des points critiques algébriques réguliers.*

Théorème 3. *Soit* $\psi(t, \tau_0)$ *la solution de* (1) *égale à zéro pour* $t=\tau_0$. *Si la partie réelle de* τ_0 *est négative et assez grande en module, il existe une transformation* $\chi(t)=s$, *telle que* $\overline{\psi}(\zeta_0-m\omega, \tau_0)=0$ *si l'on pose* $\chi(\tau_0)=\zeta_0$ *et* $\overline{\psi}(s, \tau_0)=\psi(\chi^{-1}(s), \tau_0)$. $\chi(t)$ *est développable en une série convergente*

$$\chi(t)=t+\sum_{j=k}^{\infty} q_j e^{jt} \quad (k \geq 1, \ q_k \neq 0)$$

lorsque $|e^t|$ *est assez petit.*

Nous appellerons $s=\chi(t)$ la variable normale par rapport à la solution périodique $\varphi(s)$ pour (1).

Nous étudions l'ensemble des valeurs initiales η en t_0 fixe des solutions de (1) telles qu'elles tendent vers les solutions $\overline{\varphi}(t-\tau_0)$ de (2) pour $\Im t=0$, $t \to \infty$, τ_0 dépendant de la valeur initiale η. Soient D l'ensemble ouvert: $\mathrm{D}=\{\overline{\varphi}(t);\ -\infty < t < \infty,\ 0 < \Im t < r\}$ et E_0 un ensemble quelconque fermé, borné et contenu dans D. D'après le théorème 1, si t est négative et assez grande en module, on peut faire correspondre à chaque valeur $\eta \in E_0$ une valeur τ_0 de manière que la soulution de (1) satisfaisant à la conditions initiale $y(t_0)=\eta$ s'approche indéfiniment de $\overline{\varphi}(t-\tau_0)$ quand t tend vers $-\infty$. Il s'agit donc des valeurs initiales situées dans le voisinage des courbes Γ_0 et Γ_1 que décrit $\overline{\varphi}(t)$ pour $\Im t=0$ et $\Im t=r$. Mais il est clair que l'on peut étudier les valeurs initiales dans le voisinage de Γ_1 comme dans le voisinage de Γ_0. Par suite nous ne considérerons que les valeurs initiales appartenant à l'ensemble $E=\{y;\ \mathrm{dist}\,(y, \Gamma_0) \leq \rho\}$.

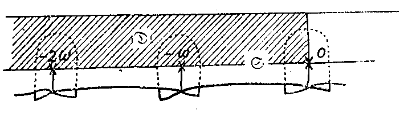

Fig. 1

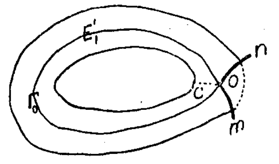

Fig. 2

Soit $\mathfrak{S}$ la surface de Riemann sur laquelle $\varphi(t)$ est uniforme (Voir Fig. 1). Désignons par $\mathfrak{D}$ le domaine sur $\mathfrak{S}$ défini par $0 \leq \Im s \leq r'(\leq r)$, $\Re s \leq 0$. Nous supposons que $\varphi(s)$ prend la valeur $\overline{\varphi}(s)$ dans $\mathfrak{D}$ et que ρ est assez petit de sorte que l'image de $\mathfrak{S}$ par φ contient E. Pour fixer les idées, nous supposons en outre que Γ_1 est à l'intérieur de Γ_0. Dèsignons par m et n les points d'intersection de la frontière extérieure de E avec les courbes décrites par $\varphi(s)$ quand s décrit C_1 et C_2 où C_1 est la demi-droite qui fait l'angle $-3\pi/4$ avec la demi-droite; $\Im s=0$, $\Re s \geq 0$ et C_2 celle qui fait l'angle $3\pi/4$ avec la demi-droite: $\Im s=0$, $\Re s \leq 0$. Désignons par E_1' la partie restante de E en excluant la forme d'éventail Omn. (Voir Fig. 2).

Posons $\chi(t)=s$, où $\chi(t)$ est la fonction satisfaisant aux conditions du théorème 3. L'équation différentielle (1) se transforme en

$$\frac{dy}{ds}=\frac{\bar{P}(e^s, y)}{y\bar{Q}(e^s, y)} \tag{4}$$

où $\bar{P}(e^s, y)$ et $\bar{Q}(e^s, y)$ sont des polynomes de y sans facteur commun, leurs coefficients étant des fonctions régulières de e^s pour $|e^s|<\delta'$ et l'on a de plus $\bar{P}(0, y)=P_0(y)$ et $\bar{Q}(0, y)=Q_0(y)$. Une branche de la solution qui s'annule pour $s=\zeta_0$ s'annule pour $s=\zeta_0-m\omega$ $(m=0, 1, \cdots)$. Soit $s(y, \eta)$ une solution de l'équation différentielle

$$\frac{ds}{dy}=\frac{y\bar{Q}(e^s, y)}{\bar{P}(e^s, y)} \tag{5}$$

qui prend la valeur initiale $s_0=\chi(t_0)$ pour $y=\eta$. Alors $\zeta(\eta)=s(0, \eta)$ est une fonction continue et uniforme dans le domaine simplement connexe E_1'' qui est le domaine E_1' coupé suivant une courbe C issue du point 0. La différence des valeurs auxquelles converge $\zeta(\eta)$ lorsque η s'approche d'un point quelconque de C d'une part et d'autre de la courbe C est égale à ω. $\xi(\eta)$ fait correspondre d'une manière univoque au domaine E_1'' un domaine $\mathfrak{D}'$. La fonction inverse $\xi(s)$ de $\zeta(\eta)$ définie dans $\mathfrak{D}'$ sera appelée la fonction $\xi(s)$ correspondant à la variable normale $\chi(t)$. Alors concernant la fonction $\xi(s)$ on obtient le lemme suivant.

Lemme 1. *Soient C' et C'' les images par $\eta=\xi(s)$ des segments de droites $\Im s=c'$ et $\Im s=c''$ situés dans $\mathfrak{D}'$. Si c' est plus grand que c'', C'' est à l'intérieur de la courbe C'.*

En effet, il n'existe pas de point d'intersection des courbes C' et C''. En particulier la courbe C_0: $\eta=\xi(s)$, $\Im s=\Im s_0$ est la courbe fermée passant par le point 0 et à l'intérieur de C_0 se trouve le point $\eta=\xi(s)$ tel que $\Im s<\Im s_0$ lorsque s s'approche d'un point de l'image du C par $\zeta(\eta)$. Donc si $c'>c''$, C'' est à l'intérieur de C'.

D'après le théorème 2, si $\chi(t)-\zeta(\eta)$ appartient à $\mathfrak{D}$ pour $-\infty<t\leq t_0$, la solution de (4) qui prend la valeur initial η pour $s=s_0$, s'approche indéfiniment de $\bar{\varphi}(t-\zeta(\eta))$ quand t tend vers $-\infty$, et si $\chi(t)-\zeta(\eta)$ n'appartient pas à $\mathfrak{D}$ pour une valeur $\chi(t)$ telle que $\Re(\chi(t)-\zeta(\eta))<0$, cette solution s'écarte de $\bar{\varphi}(t-\zeta(\eta))$.

On recherche la condition pour que $\chi(t)-\zeta(\eta)$ appartienne à $\mathfrak{D}$ pour $-\infty<t\leq t_0$.

1) Le cas de $\mathfrak{I}\chi(t)>0$. D'après la condition $\mathfrak{I}s_0>0$, il existe sur la droite $\mathfrak{I}s=0$ un point $s_1=\zeta(\eta)$ tel que $\eta\in C$, et $\eta=\xi(s)$ représente une courbe fermée pour $s_1-\omega\leq s\leq s_1$. On définit l'ensemble fermé F dans E_1': $F=\{\eta;\ \eta=\xi(s),\ s\in\mathfrak{D}',\ \mathfrak{I}s\leq 0\}$. Si $\eta\in F$, on obtient l'inégalité $\mathfrak{I}(\chi(t)-\zeta)>0$ où $\mathfrak{I}\zeta=\mathfrak{I}\zeta(\eta)\leq 0$ et $\chi(t)-\zeta$ appartient à $\mathfrak{D}$. En particulier, si η appartient à la frontière extérieure de l'ensemble F, la solution de (1), qui prend la valeur initiale η pour t_0, s'approche indéfiniment de $\bar{\varphi}(t-\zeta)$ et $t-\zeta$ passe par le point critique de $\bar{\varphi}(t-\zeta)$ lorsque t varie de t_0 à $-\infty$ par valeurs réelles. Si η n'appartient pas à F, on a $\mathfrak{I}\zeta=\mathfrak{I}\zeta(\eta)>0$. Or, on a $0<\mathfrak{I}\chi(t)<\varepsilon$ pour $-\infty<t\leq -R_1$ quelque petit que soit $\varepsilon>0$ pourvu que R_1 soit un nombre positif assez grand, donc $\chi(t)-\zeta\notin\mathfrak{D}$ pour $t\to-\infty$.

2) Le cas de $\mathfrak{I}\chi(t)<0$.

Lemme 2. *Si une solution de l'équation différentielle* (1) *s'approche indéfiniment de $\bar{\varphi}(t-\zeta)$ quand t tend vers $-\infty$ par valeurs réelles et si $\mathfrak{I}\chi(t)$ est négatif, $t-\zeta$ ne passe par le point critique de $\bar{\varphi}(t-\zeta)$ lorsque t varie de t_0 à $-\infty$ par valeurs réelles.*

D'après le théorèm 2, la solution de (1) s'approche indéfiniment de la solution $\bar{\varphi}(t-\zeta)$ pour $\mathfrak{I}(\chi(t)-\zeta)\geq 0$. $\mathfrak{I}\chi(t)$ est la fonction décroissante pour la valeur réelle t. Donc $\mathfrak{I}(\chi(t)-\zeta)>0$ pour $\mathfrak{R}\chi(t)<\mathfrak{R}\zeta$.

Nous supposons que quand t, en décroissant, passe par un point critique, la solution $\varphi(s)$ de (2) prend la branche différente de $\bar{\varphi}(s)$. Il en sera de même de la solution de (1). $\eta=\xi(s)$ représente pour $\mathfrak{I}s=\mathfrak{I}s_0$ et $\mathfrak{R}s_0-\omega\leq s\leq\mathfrak{R}s_0$ une courbe fermée C_0 qui passe par le point 0. D'après le lemme 1 $\eta=\xi(s)$ décrit pour $s=\chi(t)$ et $s\in\mathfrak{D}'$ une courbe C' qui se trouve à l'extérieur de la courbe C_0. Soit G l'intersection de E_1' et de l'intérieur de la courbe C'. Si $\eta\in G$, on a l'inégalité $\mathfrak{I}(\chi(t)-\zeta)>0$ pour $t<\mathfrak{R}\chi^{-1}(\zeta)$ $(\zeta=\zeta(\eta))$, donc $\chi(t)-\zeta\in\mathfrak{D}$. Si η n'appartient pas à G, on obtient l'inégalité $\mathfrak{I}\chi^{-1}(\zeta)\geq 0$ pour $\zeta=\zeta(\eta)$, $\chi(t)-\zeta(\eta)$ n'appartient jamais à $\mathfrak{D}$ pour $t<\mathfrak{R}\chi^{-1}(\zeta(\eta))$.

3) Le cas de $\mathfrak{I}\chi(t)=0$. Les trois conditions $\mathfrak{I}s=0$, $\mathfrak{I}s=\mathfrak{I}s_0$ et $\mathfrak{I}\chi^{-1}(s)=0$ étant équivalentes, la frontière extérieure de l'ensemble F définie dans le cas 1) et celle de l'ensemble G définie dans le cas 2) coïncident. Nous pouvons donc considérer ce présent ces comme le cas particulier du premier cas ou du second selon convention. Pour la suite il est plus commode de le considérer comme le cas particulier du second.

Théorème 4. *Pour la vlaeur fixe t_0, l'ensemble des valeurs initiales η dans E_1' telles que les solutions de* (1) *qui prennent les valeurs initales η pour $t=t_0$ s'approche indéfiniment de la branche périodique de la solution de* (2), *est fermé ou ouvert dans E_1' suivant que $\mathfrak{I}\chi(t)>0$ ou $\mathfrak{I}\chi(t)\leq 0$,*

2. Le cas où il existe deux points critiques sur la courbe solution limite.

Nous considérons les équations différentielles

$$\frac{dy}{dt}=\frac{P(e^t, y)}{y(y-\beta(e^t))\,Q(e^t, y)} \tag{1'}$$

et

$$\frac{dy}{ds}=\frac{P_0(y)}{y(y-\beta)Q_0(y)} \tag{2'}$$

où $P_0(y)=P(0, y)$, $Q_0(y)=Q(0, y)$ et $\beta(0)=\beta\neq 0$, et supposons les conditions suivantes remplies

i′) Une branche $\overline{\varphi}(s)$ d'une solution $\varphi(s)$ de l'équation différentielle (2′) admet une période réelle ω pour $0\leq \Im s\leq r$;

ii′) $\overline{\varphi}(0)=0$, $\overline{\varphi}(\tau_1)=\beta$ $(-\omega<\tau_1<0)$;

iii′) $P_0(\overline{\varphi})\neq 0$, $Q_0(\overline{\varphi})\neq 0$ pour $0\leq \Im s< r$.

Par le changement de la variable $y=z+\beta(e^t)$, on obtient l'équation différentielle

$$\frac{dz}{dt}=\frac{P'(e^t, z)}{(z+\beta(e^t))\,zQ'(e^t, z)}\,. \tag{6}$$

Soient $s=\chi(t)$ et $s'=\chi'(t)$ les variables normales pour (1′) et (6) et soient $\zeta(\eta)$ et $\zeta'(\eta)$ les fonctions inverses de $\xi(s)$ et $\xi'(s)$ correspondent respectivement aux $\chi(t)$ et $\chi'(t)$. Naturellement nous devons prendre pour l'ensemble correspondant à E_1' la partie E_2' restante de E an excluant les formes d'éventail $0\,mn$, $\beta\,m'n'$ relatives aux points 0, β. On a le lemme suivant.

Lemme 3. $\Im\zeta(\eta)=\Im\zeta'(\eta)$.

Nous considérons les équations différentielles

$$\frac{dt}{dy}=\frac{y(y-\beta(e^t))\,Q(e^t, y)}{P(e^t, y)} \tag{7}$$

et

$$\frac{dt}{dz}=\frac{(z+\beta(e^t))\,zQ'(e^t, z)}{P'(e^t, z)} \tag{7'}$$

Par le changement des variables: $\chi(t)=s$ et $\chi'(t)=s'$, les équations (7) et (7′) se transforment en

$$\frac{ds}{dy}=\frac{y(y-\overline{\beta}(e^s))\,\overline{Q}(e^s, y)}{\overline{P}(e^s, y)} \tag{8}$$

et

$$\frac{ds'}{dz}=\frac{(z+\overline{\beta}'(e^{s'}))\,z\overline{Q}'(e^{s'}\, z)}{\overline{P}'(e^s, z)}\,, \tag{8'}$$

et si l'on pose $e^s=0$ et $e^{s'}=0$ dans les deuxièmes membres, on obtient les éuqations différentielles

$$\frac{ds}{dy}=\frac{y\,(y-\beta)\,Q_0\,(y)}{P_0\,(y)} \tag{9}$$

et

$$\frac{ds'}{dz}=\frac{(z+\beta)\,z\overline{Q}'(0,\,z)}{\overline{P}'\,(0,\,z)} \tag{9'}$$

et $Q_0\,(y)=\overline{Q}'(0,\,y-\beta)$, $P_0(y)=\overline{P}'(0,\,y-\beta)$. Désignons par $\psi(y)$ la solution de (9) satisfaisant à la condition initiale $\psi(0)=\zeta(\eta)$. Elle prend la valeur $s_1=\zeta(\eta)+\tau_1$ pour $y=\beta$. Désignons par $\psi'(z)$ la solution de (9') satisfaisant à la condition initiale: $\psi'(0)=\zeta'(\eta)$. On a alors $\psi\,(y)=\psi'\,(y-\beta)$ et $s_1=\psi(\beta)=\psi'(0)=\zeta'(\eta)$. Donc on obtient $\Im\zeta(\eta)=\Im\zeta'(\eta)$.

Le lemme 3 entraine immédiatement le lemme suivant.

Lemme 4. *Les équations $\eta=\xi(s)$, $\Im s=c$ et les équations $\eta'=\xi'(s)$, $\Im s'=c$ représentent la même courbe.*

Nous supposons que $\Im\chi(t)>\Im\chi'(t)$. Si $\Im\chi'(t)>0$, d'après le lemme 4, les ensembles fermés F et F' dans E_2' étant défini par les fonctions $\xi(s)$ et $\xi'(s)$, ils coïncident en entier. Si $\Im\chi'(t)\leq 0$, l'ensemble fermé F dans E_2' contient l'ensemble ouvert G' dans E_2' où F et G' correspondent aux fonctions $\xi(s)$ et $\xi'(s)$. Si $\Im\chi(t)=0$, l'ensemble ouvert G dans E_2' contient l'ensemble ouvert G' dans E_2'. Si $\Im\chi(t)<0$, il n'y a aucune relation d'inclusion entre les ensembles G et G'. Si $\Im\chi(t)=\Im\chi'(t)$ et si $\Im\chi'(t)>0$ les ensembles fermés F et F' dans E_2' coïncident en entier. Et si $\Im\chi'(t)<0$, il n'y a aucune relation d'inclusion entre les ensembles ouverts G et G'. Si $\Im\chi'(t)=0$, G et G' coïncident.

En conséquence, on obtient le théorème suivant.

Théorème 5. *Si $\Im\chi'(t)\geq\Im\chi(t)$ et si $\Im\chi'(t)\geq 0$ l'ensemble des valeurs initiales $\eta\in E'$ pour la valeur fixe t_0, telles que les solutions de (1') qui prennent les valeurs η pour $t=t_0$, s'approche indéfiniment de la branche périodique de la solution de (2') pour $t\to-\infty$ est fermé ou ouvert suivant que $\Im\chi(t)>0$ ou ≤ 0.*

En terminant ce mémoire, je remercie Professeur Masuo Hukuhara de la bienveillance sincère en me donnant de diverses suggestions profitables.

Bibliographie

(1) Kato, T. Sur les points singuliers des équations différentielles du premier ordre. II. III. IV. (Natural Science Report, Ochanomizu Univ. **4** (1953), **5** (1954).

(Received April 1, 1957)