

Sur les Points Singuliers des Équations Différentielles Ordinaires du Premier Ordre. III

Tizuko Katō (加藤千鶴子)

Institut des Mathématiques, Faculté des Sciences,
Université Ochanomizu, Tokyo

Dans le deuxième mémoire¹⁾ nous avons considéré l'équation différentielle

$$(1) \quad x \frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

sous la condition que l'équation différentielle

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{P_0(y)}{Q_0(y)}$$

admette une solution périodique, holomorphe pour $\tau_1 < \Im t < \tau_2$ et admettant une période réelle ω , où $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont des polynômes de y sans facteur commun, leurs coefficients étant des fonctions régulières de x pour $|x| < \Delta$ et $P(0,y) = P_0(y)$, $Q(0,y) = Q_0(y)$.

Supposons maintenant qu'il y a des points critiques d'une solution de (2) pour $\Im t = \tau_1$ et qu'il y a une branche $\varphi(t, t_0)$ de cette solution admettant la période réelle ω . Dans ce cas, le point critique $\varphi(t_0, t_0) = \eta$ est un pôle du second membre de (2). Pour fixer les idées, nous supposons qu'il est un pôle du premier ordre. Sans perdre la généralité, on peut supposer que $\eta = 0$, et $\Im t = \tau_2 = 0$. Donc nous remplaçons (1) et (2) par les équations différentielles

$$(1') \quad x \frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{yQ(x,y)} \quad (Q(x,0) \neq 0)$$

et

$$(2') \quad \frac{dy}{dt} = \frac{P_0(y)}{yQ_0(y)}.$$

Désignons par D_m le domaine: $t_0 - (m+1)\omega + \delta < \Re t < t_0 - (m-1)\omega - \delta$, $0 \leq \Im t < \tau$ ($m=0, 1, 2, \dots$, $\omega > 0$, $\delta > 0$), et par D la réunion $\bigcup_{m=0}^{\infty} D_m$.

Notre but est à démontrer le théorème suivant:

Théorème. *S'il existe une solution de (1') telle que $y(t_0 - m\omega) = 0$ ($m=0, 1, 2, \dots$, $\omega > 0$) et si $t_0 = \log x_0 (< 0)$ est assez grand en module, cette solution est développable en une série uniformément convergente*

$$(3) \quad y(t) = \varphi(t, t_0) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t, t_0) e^{jt} \right)$$

¹⁾ Katō, Sur les points singuliers des équations différentielles du premier ordre. II. (Natural Science Report, Ochanomizu Univ. IV (1953))

pour $t \in D$, où les $p_j(t, t_0)$ sont des fonctions périodiques admettant la période réelle ω , et holomorphes dans D sauf les points $t_0 - m\omega$ qui sont des points critiques algébriques réguliers.

Si l'on pose $x = e^t \varepsilon$, l'équation différentielle (1') devient

$$(4) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{p(e^t \varepsilon, y)}{y Q(e^t \varepsilon, y)},$$

Cherchons d'abord une solution formelle telle que

$$(5) \quad y(t) = \varphi(t, t_0) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t, t_0) e^{jt} \varepsilon^j \right).$$

On obtient pour déterminer $p_n(t, t_0)$ une équation de la forme

$$(6) \quad \frac{dp_n}{dt} = \frac{1}{\{\varphi Q_0(\varphi)\}^2} \left[\varphi Q_0(\varphi) \frac{d}{d\varphi} P_0(\varphi) - \varphi P_0(\varphi) \frac{d}{d\varphi} Q_0(\varphi) - 2P_0(\varphi) Q_0(\varphi) - n \{\varphi Q_0(\varphi)\}^2 \right] p_n + \frac{F_n(\varphi, p_1, \dots, p_{n-1})}{\{\varphi Q_0(\varphi)\}^2},$$

où F_n est un polynôme de $\varphi, p_1, \dots, p_{n-1}$. Supposons que la fonction $p_j(t, t_0)$ satisfasse pour $j < n$ à la condition suivante: Elle est régulière dans le domaine $\mathcal{D}_0: t_0 - \omega + \delta < \Re t < t_0 + \omega - \delta, -\delta' < \Im t < \tau$, sur la surface de Riemann de $\sqrt{t - t_0}$, δ' étant un nombre positif assez petit. Le coefficient de p_n dans le second membre de (6) admet $t = t_0$ comme un pôle du premier ordre où le résidu est -1 . Il existe donc une seule solution admettant $t = t_0$ comme point régulier, la valeur initiale étant égale à

$$p_n(t_0, t_0) = \frac{b_0}{2a_0} F_n(0, p_1(t_0, t_0), \dots, p_{n-1}(t_0, t_0),$$

où $a_0 = P(0, 0)$, $b_0 = Q(0, 0)$. Elle peut s'écrire

$$(7) \quad p_n(t, t_0) = \frac{P_0(\varphi(t, t_0))}{\{\varphi(t, t_0)\}^2 Q_0(\varphi(t, t_0))} e^{-nt} \int_{t_0}^t \frac{F_n(\varphi, p_1, \dots, p_{n-1}) e^{nt}}{P_0(\varphi) Q_0(\varphi)} dt.$$

On en conclut qu'elle aussi satisfait à la condition susdite. Nous démontrerons la convergence de (5) pour $|e^t \varepsilon| < \Delta$ et $t \in \mathcal{D}_0$.

Soit

$$(8) \quad \varphi^2 \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\{Q_0(\varphi)\}^2} \left[\varphi Q_0(\varphi) \frac{d}{d\varphi} P_0(\varphi) - \varphi P_0(\varphi) \frac{d}{d\varphi} Q_0(\varphi) - 2P_0(\varphi) Q_0(\varphi) \right] z + R_N(e^t \varepsilon, t, t_0, z)$$

l'équation en $z = \frac{1}{\varphi} (y - H_N)$ où

$$H_N(e^t \varepsilon, t, t_0) = \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} p_j(t, t_0) e^{jt} \varepsilon^j \right).$$

Nous pouvons choisir des constantes A, B_N, Δ_1, ρ_1 de manière que l'on ait

$$(9) \quad |R_N(\xi, t, t_0, z)| \leq A|z|^2 + B_N|\xi|^N$$

pour $|\xi| < \Delta_1, |z| < \rho_1$.

Désignons par \mathfrak{F} la famille des fonctions $\phi(\xi, t)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $\phi(\xi, t)$ est une fonction régulière pour $|\xi| < \Delta_2$, $t \in \mathcal{D}_0$ n'ayant qu'un seul point critique $t = t_0$, où Δ_2 est un nombre positif satisfaisant aux inégalités $\Delta_2 \leq \Delta_1$, $K\Delta_2^N < \rho_1$, $AK^2\Delta_2^N < \varepsilon_1$, ε_1 étant un nombre positif assez petit.

2) $\phi(\xi, t)$ satisfait à l'inégalité

$$(10) \quad |\phi(\xi, t)| \leq K|\xi|^N,$$

où N et K sont des constantes indépendantes de ϕ .

Désignons par T la transformation qui fait correspondre à ϕ la fonction $\Psi(\xi, t) = \Phi(\xi e^{-t}, t)$ où

$$\Phi(\varepsilon, t) = \frac{P_0(\varphi)}{\varphi^2 Q_0(\varphi)} \int_{t_0}^t \frac{Q_0(\varphi)}{P_0(\varphi)} R_N(e^t \varepsilon, t, t_0, \phi(e^t \varepsilon, t)) dt.$$

Démontrons, à l'aide du théorème d'existence des points invariants, qu'il existe dans \mathfrak{F} une fonction ϕ telle que $\phi(\xi, t) = \Psi(\xi, t)$ pour $|\xi| < \Delta_2$, $t \in \mathcal{D}_1$.

D'abord $\phi \in \mathfrak{F}$ entraîne $\Psi \in \mathfrak{F}$. En effet, on voit facilement que $\Psi(\xi, t)$ est une fonction régulière n'ayant qu'un point critique $t = t_0$. L'inégalité (9) entraîne

$$\begin{aligned} |\Phi(\xi e^{-t}, t)| &= |\Psi(\xi, t)| \leq \frac{M}{m} (AK^2 e^{N(t_0 + \omega - \delta)} |\varepsilon|^N + B_N) e^{N(t_0 + \omega - \delta)} \\ &\times |\varepsilon|^N \frac{|t - t_0|}{|\varphi^2|} \leq \frac{M(\varepsilon_1 + B_N)}{Cm} e^{N(t_0 + \omega - \delta)} |\varepsilon|^N; \end{aligned}$$

M et m sont des nombres positifs satisfaisant à $m \leq \frac{P_0(\varphi)}{Q_0(\varphi)} \leq M$ pour $t \in \mathcal{D}_0$ et C est un nombre positif satisfaisant à $|\varphi^2| \geq C|t - t_0|$ pour $t \in \mathcal{D}_0$. Donc, pour que l'on ait

$$|\Psi(\xi, t)| \leq K|\xi|^N$$

il suffit de déterminer N et K de manière que

$$\frac{M(\varepsilon_1 + B_N)}{Cm} e^{2N(\omega - \delta)} < K.$$

On peut ensuite déterminer Δ_2 de manière que les inégalités $K\Delta_2^N < \rho_1$, $AK^2\Delta_2^N < \varepsilon_1$ soient remplies.

La continuité de la transformation T . Supposons qu'une suite $\{\phi_n\}$ extraite de \mathfrak{F} converge uniformément vers ϕ pour $|\xi| < \Delta_2$, $t \in \mathcal{D}_0$. Il suffit de montrer que la suite correspondante $\{\Psi_n\}$, converge uniformément vers la correspondante Ψ de ϕ . D'après la condition (10), on peut faire correspondre aux nombres positifs quelconques ε' , Δ' ($< \Delta_2$, δ' , τ) un entier N' tel que

$$|\phi - \phi_n| < \varepsilon' |\xi|^N$$

pour $n > N'$, $|\xi| < \Delta_2 - \Delta'$, $t_0 - \omega + \delta + \Delta' < \Re t < t_0 + \omega + \delta - \Delta'$, $-\delta' + \Delta' < \Im t < \tau - \Delta'$. On obtient

$$|\Psi(\xi, t) - \Psi_n(\xi, t)| \leq \frac{2MA'K}{m} \varepsilon'_n e^{2N(t_0 + \omega - \delta)} \frac{|t - t_0|}{|\varphi^2|} \leq \frac{2MA'K}{Cm} \varepsilon'_n e^{2N(t_0 + \omega - \delta)}$$

où A' est une constante indépendante de n . Par suite $\Psi_n(\xi, t)$ converge uniformément vers $\Psi(\xi, t)$ pour $|\xi| < \Delta_2$, $t \in \mathcal{D}_0$. Il est évident que la famille \mathfrak{F} est fermée, convexe et normale.

Par conséquent, il existe une fonction $\phi(\xi, t)$ telle que $\phi(\xi, t) = \Psi(\xi, t)$. $\phi(e^t \varepsilon, t)$ est alors une solution de l'équation différentielle (8). $\phi(e^t \varepsilon, t)$ dépendant de t_0 et de N , nous l'écrivons $\phi_N(e^t \varepsilon, t, t_0)$. Elle est une seule solution telle que ϕ est borné pour $t \rightarrow t_0$, car $t = t_0$ est un point singulier de Briot et Bouquet de (8). On en conclut que la solution de (4)

$$\bar{\psi}(e^t \varepsilon, t, t_0) = \varphi(t, t_0)(H_N(e^t \varepsilon, t, t_0) + \phi_N(e^t \varepsilon, t, t_0))$$

est indépendante de N . $\bar{\psi}(\xi, t, t_0)$ étant régulière pour $|\xi| < \Delta_2$, $t \in \mathcal{D}_0$, on a le développement

$$\bar{\psi}(\xi, t, t_0) = \varphi(t, t_0) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t, t_0) \xi^j\right)$$

uniformément convergent pour $|\xi| < \Delta_2$, $t \in \mathcal{D}_0$. Si l'on pose $\varepsilon = 1$, $y = \bar{\psi}(e^t, t, t_0)$ représente la solution pour $|e^t| < \Delta_2$, $t \in \mathcal{D}_0$.

En remplaçant t_0 par $t_0 - m\omega$, on obtient de même la solution

$$(11) \quad \bar{\psi}(e^t, t, t_0 - m\omega) = \varphi(t, t_0) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t, t_0 - m\omega) e^{jt}\right)$$

régulier pour $|e^t| < \Delta_2$, $t \in \mathcal{D}_m$, \mathcal{D}_m étant le domaine $-\delta' < \Im t < \tau$, $t_0 - (m+1)\omega + \delta < \Re t < t_0 - (m-1)\omega - \delta$ sur la surface de Riemann de $\sqrt{t - t_0 + m\omega}$. $p_1(t, t_0 - m\omega)$ s'écrit $p_1(t + \omega, t_0 - (m-1)\omega)$ pour $t \in \mathcal{D}_m$.

On voit facilement que

$$y(t) - \varphi(t, t_0)(1 + p_1(t, t_0 - m\omega)e^t) = O(e^{2(t_0 - m\omega)}) \quad (m \rightarrow \infty)$$

pour $t \in \mathcal{D}_m$. On peut en conclure que

$$\varphi(t, t_0) \{p_1(t + m\omega, t_0) - p_1(t + m\omega, t_0 - \omega)\} e^t = O(e^{2(t_0 - m\omega)}) \quad (m \rightarrow \infty)$$

pour $t + m\omega \in \mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_1$ ou

$$\varphi(t, t_0) \{p_1(t, t_0) - p_1(t, t_0 - \omega)\} e^t = O(e^{2(t_0 - m\omega)}) \quad (m \rightarrow \infty)$$

pour $t \in \mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_1$. Le premier membre étant indépendant de m , on a

$$p_1(t, t_0) = p_1(t, t_0 - \omega) = p_1(t + \omega, t_0)$$

pour $t \in \mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_1$. Cette relation montre la périodicité de $p_1(t, t_0)$ dans D . On peut démontrer de même la périodicité de $p_j(t, t_0)$. Le théorème est donc établi.

Nous avons supposé que $\eta = \varphi(t_0, t_0)$ ait été un pôle du premier ordre du second membre de (2). Mais cela n'est pas essentiel. On obtiendra une conclusion analogue quoiqu'il en soit un pôle d'ordre quelconque.

En terminant ce mémoire, je remercie Professeur Masuo Hukuhara de la bienveillance sincère en me donnant de diverses suggestions profitables.

(Received Mar. 11, 1954)