Schild Type Superstring Action and Matrix Model*

小櫛 幸子 †

お茶の水女子大学

(1999 年 4 月 21 日受理)

Abstract

Schild 型弦の作用は 1970 年、A.Schild によって考案された作用であり、弦理論の様々な分野で使われている非常に興味深い作用である。 この論文では Schild 型弦の作用に焦点を当て、その作用に関する話題と作用の 2 次元面上での超対称化の試みについて述べる。 我々は Schild 型作用のポアソン括弧構造に重点を置き、その構造を保ちながら作用の超対称化を試みた。 まず、最初に Schild 型作用を 2 次元 World-Sheet 上で大局的な超対称性を持つ作用に拡張することを考え、いくつかの変形を行った。 次に Schild 型作用を 2 次元 World-Sheet 上で局所的な超対称性を持つ作用に拡張することも考え、Neveu-Schwartz-Ramond 型作用の 2 次元超対称化で使われる Supervierbein を使って作用を変形した。 その変形の結果について考察する。 また、弦理論の非摂動論的な定式化として考えられている行列模型 (Matrix Model) と Schild 型作用は密接な関係がある。 一般に p 次元的な広がりを持つ D-brane を Dp-brane と呼ぶが、D(−1)-brane($p = -1$) の行列模型の作用がある極限で Schild 型作用に等しくなる。 この D-brane と行列模型についての考察を最後にまとめる。

---

* この論文は平成 11 年 1 月にお茶の水女子大学大学院人間文化研究科に修士論文として提出したものに加筆、修正を加えたものである。

† e-mail: g9970503@edu.cc.ocha.ac.jp

Contents

1 Introduction

Schild型弦の作用は1970年、A.Schildによって考案された作用[1]である。この作用に興味を持ったのは後に述べる拡張された正準形式の理論で適用される作用だからである。まず最初に弦の作用について述べる前に点粒子の理論を復習し、それと比較しながら弦の作用について[2][3]等を参考にしながら述べる。特に南部-後藤型作用とポリヤコフ作用、Schild型作用との関係について[4]を参考にしてまとめた。次に拡張された正準形式の理論[5][6]とSchild型作用の関係を述べ、またその理論を使って考えられる量子化[7][8][9]についても検討する。我々は[6]で使われているSchild型作用をフェルミオンを含めた作用に超対称化させることを検討した。現在、知られている超弦理論の超対称化には2次元と10次元上での超対称化がある[1]。この2次元面上での超対称化された作用について[2][10][11]を参考に4章と5章でまとめる。4章での大局的超対称化についての対称性の計算等は一部省略したが、5章で述べたSuperVierbeinを使ったNSR型作用の導出については多少計算が長くなるが、研究上重要な計算だと思われるので詳しく書いた。6章で述べる我々の研究は、4章と5章で述べた2次元上での超対称化の方法を参考にしてSchild型作用のポアソン括弧構造に重点を置き、その構造を保ちながら2次元World-Sheet上での超対称化を試みた[12]。そこでの計算の一部と計算上、使った公式等はAppendix C、Eにまとめた。また、超対称化の計算から得られた結果と考察等も6章で述べた。10次元上で超対称化された作用[2]については、詳細は省略したが、7章では10次元上で超対称化されたSchild型作用を扱い、その作用と行列模型との関係[13]や2次元上で超対称化された作用との違い等を述べた。

超弦理論の強結合領域では摂動論が使えないため、その領域での超弦理論は弦理論のソリトン解として知られているD-braneの理論で記述される[14][15]。現在、D-braneの理論の理論は行列模型[16]を使って記述されており、行列模型とゲージ理論との関係[17]も調べられている。それらの内容についての考察を8章でまとめる。

また、弦理論の基本的な内容[18]についてはAppendix Aでまとめ、Spinorの種類と次元の関係等[18]も超対称化の理論で重要な鍵となるのでそれについてもAppendix Bにまとめた。4章の大局的な超対称性に関する計算も一部、Appendix Dにまとめた。

[1] この論文で使う「2次元、10次元上での…」という言葉は、作用に現れるDiracのガンマ行列の次元がそれぞれ2次元と10次元であることを意味する。

2 String Action

2.1 Introduction:Particle action and String action

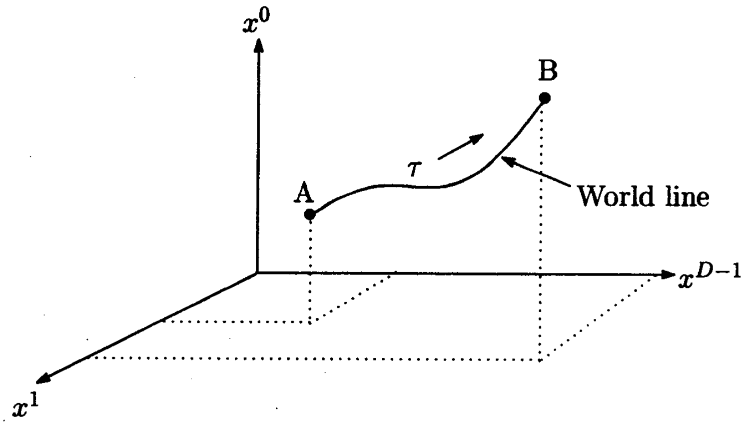

Figure 1: 点粒子の運動

D 次元空間内を動く点粒子の運動はある一つのパラメーター (τ とする) により記述され、その軌跡は Fig. 1 の様になる。この軌跡は World line と呼ばれ、古典力学では始点と終点を結ぶ最短距離に沿って粒子は運動する（最小作用の原理)。作用には次式を使う。

$$\begin{aligned} S(X) &= \int d\tau \mathcal{L} \\ \mathcal{L} &= -m\sqrt{-\dot{X}_\mu \dot{X}^\mu} \end{aligned} \tag{2.1}$$

$X^\mu(\mu = 0, 1, ..., D-1)$ は粒子の時空中での座標 (ここでは平坦な時空を考える。その計量を $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, ..., 1)$ とする)、m は粒子の質量を表わす。$\dot{X}$ は τ で微分された X^μ を表わす 根号の中は粒子の D 次元内での速度の 2 乗であり、$\sqrt{-\dot{X}_\mu \dot{X}^\mu} d\tau$ は τ が $d\tau$ だけ動いた時の World line の長さを表わす。まず点粒子の量子力学的記述を復習する。古典力学では粒子の軌跡は最小作用の原理により決定されるが、量子力学では粒子の経路は定まらず、全ての経路を取り得る。またその過程の中で閉じたループを持つ軌跡を含めることも可能である。量子力学では粒子が移動する過程は次式の汎関数積分（確率振幅）によって表わされる。今、始点を $X(\tau = 0) \equiv X_0$ 終点を $X(\tau = 1) \equiv X_1$ とすると、その間を粒子が移る振幅は

$$A(X_0 \to X_1) = \sum_{\text{全ての軌跡}} e^{i\,\text{位相}} = \int [dX(\tau)] e^{iS(X(\tau))} \tag{2.2}$$

ここで測度 $[dX(\tau)]$ は全ての軌跡の積分（経路積分）を意味する。(2.1) で与えられる作用にこの経路積分を実行するのは技術的に難しいので、(2.1) をより簡単な形（経路積分を実行しやすい作用）に書き換える。例えば補助場 g を使って次式の様な作用が考えられる。

$$S(X(\tau), g(\tau)) = -\frac{1}{2}\int d\tau \sqrt{-g}\left\{ g^{-1}\left(\frac{dX^\mu}{d\tau}\right)^2 + m^2 \right\} \tag{2.3}$$

この作用の補助場 g に対する運動方程式を解くと、

$$m^2 = g^{-1}\left(\frac{dX^\mu}{d\tau}\right)^2 \tag{2.4}$$

となり、それを (2.3) に代入すると (2.1) が現れる。つまり古典的には両者は等しい作用である。(2.1) で (2.2) の汎関数積分を考えた様に、(2.3) の汎関数積分を考えてみると今度は補助場 g が存在するため、g に対する測度も付け加わり次の積分になる。

$$A(X_0 \to X_1) = \int [dX(\tau)][dg] e^{-S(X(\tau), g(\tau))} \tag{2.5}$$

この $[dX(\tau)]$ の経路積分は Gauss 型なので容易に計算できる。しかしながらその後の $[dg]$ についての経路積分は工夫が必要である。この作用の持っている対称性を調べてみると、次の変換

$$X^\mu(\tau) \to X^\mu(\zeta(\tau)) \tag{2.6}$$

$$g(\tau) \to g(\zeta(\tau)) \times \left(\frac{d\zeta}{d\sigma}\right)^2 \tag{2.7}$$

に対して作用は不変となることがわかる。ここで $\zeta(\tau)$ は任意の変換関数である。また (2.2) の測度 $[dX(\tau)][dg]$ もこの変換のもとで不変である。従ってこの作用によって定められる力学系は World line の座標付け替え変換に関して不変である (このことは (2.1) の作用に対しても成り立つ)。補助場 g の自由度 1 に対して、座標変換のパラメーター $\zeta(\sigma)$ (自由度 1) が対応しているので、g の変化は $\zeta(\sigma)$ の変化に吸収でき、g の積分を有限自由度の積分 (発散しない積分) に帰着させることが出来る。

座標 $X^\mu(\tau)$ に共役な運動量 $P_\mu(\tau)$ は

$$P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu(\tau)} = m \frac{\dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}_\mu \dot{X}^\mu}} \tag{2.8}$$

で与えられる。この式のスカラー積をとると次の関係式が導かれる。

$$P_\mu P^\mu + m^2 = 0 \tag{2.9}$$

この式は P^μ の全てが独立ではないことを意味し、それは World line の座標付け替え変換に関する不変性に由来する。

次に点粒子の理論の拡張として 1 次元的に広がった弦の理論を考える。点粒子の運動の軌跡は線 (World line) であったが、弦の軌跡は 2 次元的に広がった面 (World sheet) で表わされる。点粒子の場合と同様にして $X^\mu(\mu = 0, 1, ..., D-1)$ は弦の時空中での座標 (平坦な時空 $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, ..., 1)$) を表わすが、この X^μ は 1 つのパラメーター τ の関数ではなく、2 つのパラメーター $(\tau, \sigma) \equiv (\xi^0, \xi^1)$ の関数である。点粒子の作用 (2.3) の自然な拡張として補助場 (2 次元面上の計量テンソル) $g_{ab}(\xi^0, \xi^1), (a, b = 0, 1), g = \det g_{ab}$ を導入し、次の様な弦の作用を考える。

$$S(X(\xi^0, \xi^1), g(\xi^0, \xi^1)) = -\frac{1}{2} \int d^2\xi \sqrt{-g} \left\{ g^{ab} \frac{dX^\mu}{d\xi^a} \frac{dX^\mu}{d\xi^b} + m^2 \right\} \tag{2.10}$$

ここで m は弦の質量を表わす。また弦の軌跡の汎関数積分 (確率振幅) は点粒子の場合 (2.5) と同様にして

$$A = \int [dg_{ab}][dX] e^{-S(X(\xi), g(\xi))} \tag{2.11}$$

と書くことができる。

作用 (2.10) は粒子の作用の不変性と同様に World sheet の座標付け替え変換に関して不変であ

る。つまり座標変換 $\xi^a \to \zeta^a(\xi^0, \xi^1)(a = 0, 1)$ の下で X^μ と g_{ab} を同時に次式で変換しても作用は不変である。

$$\begin{aligned} X^\mu(\xi) &\to X^\mu(\zeta(\xi)) \\ g_{ab}(\xi) &\to \frac{\partial\zeta^c}{\partial\xi^a}\frac{\partial\zeta^d}{\partial\xi^b} g_{cd}(\zeta(\xi)) \end{aligned} \tag{2.12}$$

また、この変換の下で (2.11) の測度 $[dX], [dg_{ab}]$ も不変に保つことができる。

点粒子の場合、補助場 g（自由度1）の積分は変換関数 ζ（自由度1）の積分に吸収させることで g の積分を有限自由度の積分に帰着させることができた。しかし弦の場合には補助場（2次元計量テンソル）g_{ab} は対称テンソルなので自由度は3であるのに対して (2.12) の変換関数 ζ^a の自由度は2なので (2.12) の座標変換の対称性だけでは (2.10) の積分を有限自由度の積分に帰着させることができない。そこで作用 (2.10) の $m = 0$ にしてみると次の変換

$$g_{ab} \to e^{2\varphi(\xi)} g_{ab} \tag{2.13}$$

の下でも作用は不変になることがわかる。これを Weyl 変換不変性（Conformal 不変性）と呼ぶ。この変換の下で (2.11) の測度 $[dX], [dg_{ab}]$ の変化を調べてみると次式となることが知られている [19]。

$$\begin{aligned} [dX] &\to exp\{\frac{D}{24\pi}\int d^2\xi\sqrt{g}(g^{ab}\partial_a\varphi\partial_b\varphi + R\varphi)\}[dX] \\ [dg_{ab}] &\to exp\{-\frac{26}{24\pi}\int d^2\xi\sqrt{g}(g^{ab}\partial_a\varphi\partial_b\varphi + R\varphi)\}[dg_{ab}] \end{aligned} \tag{2.14}$$

ここで D は時空間の次元、R は2次元面上の曲率を表わしている。よって $D = 26$ の場合には変換 (2.13) も1つの対称性として見なすことができる。この様に特別な対称性を持つ次元のことを臨界次元という (フェルミオンを含めた超弦理論では $D = 10$ の時が臨界次元である [20])。(2.12) の座標変換の対称性と (2.13) の Weyl 変換の対称性を合わせると自由度は3になるので g_{ab} の積分を有限次元の積分に帰着させることができる。

従って作用 (2.10) の $m = 0$ を弦の作用と見なし、計量 g_{ab} を無次元とすると、この作用を無次元に保つために次元を持つパラメーターが必要である。弦の場合にはそれは弦の張力 $T \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'}$ であることが知られており、この α' はプランク質量の逆数の2乗、つまり $\alpha' \sim (10^{-33}cm$: プランク長$)^2$ である。この張力を使うと作用 (2.10) は次式のように書き直される。

$$S(X(\xi^0, \xi^1), g(\xi^0, \xi^1)) = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\xi\sqrt{-g}\left\{g^{ab}\frac{dX^\mu}{d\xi^a}\frac{dX^\mu}{d\xi^b}\right\} \tag{2.15}$$

この作用 (2.15) はポリヤコフ型作用と呼ばれる (以下、この作用を S_p と書く) この作用に対して、粒子の作用 (2.1) に相当する作用は次式になる。

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\xi\sqrt{-\det(\partial_a X \cdot \partial_b X)} \tag{2.16}$$

この作用を南部-後藤作用と呼び、以下 S_{NG} と書く。ここで $d^2\xi\sqrt{-\det(\partial_a X \cdot \partial_b X)}$ は ξ^0, ξ^1 が $d\xi^0, d\xi^1$ だけ動いたときの弦の軌跡（World sheet の面積）を表わしている (Fig. 2)。この S_p と S_{NG} は S_p の計量 g_{ab} に対する運動方程式を解くことによって、古典的には等しい作用であることがわかる。

2.2 Relation between Schild Type String Action and Other String Actions

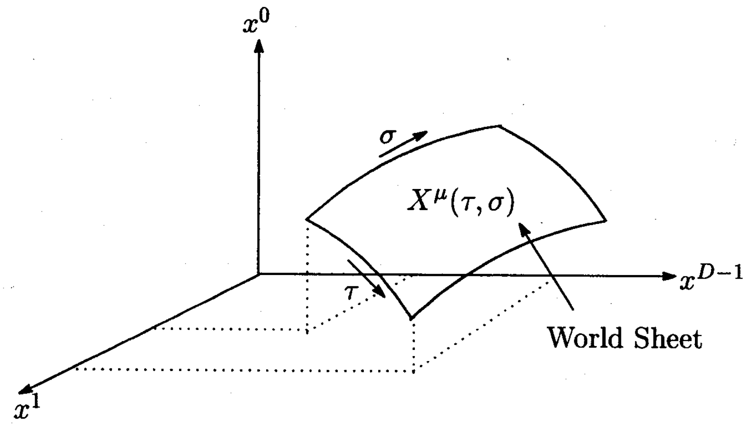

Figure 2: 弦の運動

S_{NG} と古典的に同等な作用は無数に存在する [4]。例えば次式の作用を考える。

$$S_n = -\int d^2\xi e\{\frac{1}{e^n}[-\frac{1}{2\lambda^2}(\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \cdot \partial_b X^\nu)^2]^{n/2} + n - 1\} \tag{2.17}$$

但し $\lambda = 4\pi\alpha'$ であり、$e(\xi) > 0$ は補助場である。
この作用で $n=1$ の極限をとったものが南部-後藤の作用であり、$n=2$ のものが Schild によって最初に考えられた作用に一致する。以下では上式を見やすくするため、$\sigma^{\mu\nu} \equiv \epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \cdot \partial_b X^\nu$ とおく。これはポアソン括弧と同等な構造を持つ量であり、その構造に注目して拡張されたハミルトン形式により、ゲージ場との関係を調べたのが後の章で述べる話である [6]。S_2 と S_p は臨界次元で量子力学的にも同等である事が示されており、以下でその導き方を示していく。
S_n と S_{NG} の古典的な同等性は補助場 $e(\xi)$ に対する運動方程式を解くことによって得られる式

$$\frac{\delta S_n}{\delta e} = 0 \to \frac{1}{e}\sqrt{-\sigma^2} = \lambda, \sigma^2 \equiv \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu})^2 \tag{2.18}$$

を使うと次の関係式が得られる。

$$S_n = nS_{NG} \tag{2.19}$$

この式は Schild 型作用 S_2 と S_{NG} が定数倍を除いて古典的には等しいことを意味する。よって古典的には Schild 型作用と南部-後藤型作用とポリヤコフ型作用は等しい作用であることが S_{NG} を通じて示された。World sheet 上の座標 X^μ に対する共役運動量は (2.18) を使うと次式で表わされる。

$$\begin{aligned} P_\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial \dot{X}^\mu} \\ &= -\frac{e}{\sigma^2}(\dot{X}_\mu (X')^2 - X'_\mu(\dot{X}\cdot X')) \end{aligned} \tag{2.20}$$

但し、$\dot{X}, X'$ はそれぞれ World sheet 上のパラメーター (τ,σ) で微分された X^μ を表わす。この運動量は粒子の場合の (2.8) 式に相当する。

(2.18) と (2.20) から次の拘束条件 (古典的 Virasoro 条件) が導かれる。

$$P^2 + \frac{1}{\lambda^2}X'^2 = 0 \tag{2.21}$$
$$P \cdot X' = 0 \tag{2.22}$$

Virasoro 条件は一般に World sheet 上の Conformal 不変性 (Weyl 変換 (2.13) 不変性) を表わす。この条件式は (2.18) から導かれたものなので (正確に言うと (2.22) は (2.20) の式からのみ導かれる式であるが)、(2.18) の拘束条件を Conformal constraint と呼ぶ。この拘束条件は粒子の場合の (2.9) に対応するものである。

次に Schild 型作用を南部-後藤型作用を介さないで直接、ポリヤコフ型作用から導くことを試みる。そのため新しい補助場 ($t^{ab}; t^{12} = t^{21}, t^{11}, t^{22}$) を導入し、次の様な作用を考える。

$$S(t,e,X) = -\int d^2\xi \frac{1}{e}[\mathrm{det}t - \frac{1}{\lambda}t^{ab}\partial_a X \cdot \partial_b X] - \int d^2\xi e \tag{2.23}$$

この作用と Schild 型作用 S_2 との関係式は次の式になる。

$$S_2 = S(t,e,X) + \int d^2\xi \frac{1}{e}\mathrm{det}\tilde{t} \tag{2.24}$$

ここで $\tilde{t}$ は

$$\tilde{t}^{ab} = t^{ab} - \frac{1}{\lambda}\epsilon^{ac}\epsilon^{bd}\partial_c X \cdot \partial_d X \tag{2.25}$$

である。(2.24) の右辺、第 2 項目の 1 部と (2.23) の右辺第 1 項目が打ち消しあい、(2.24) の右辺、第 2 項目の残りと (2.23) の右辺、第 2 項目を合わせたものが S_2 に相当するからである。(2.24) 式からわかるように S_2 と $S(t,e,X)$ の違いは (2.24) の右辺第 2 項めの補助場の 2 次形式の項だけである。この項は経路積分による量子化では定数としてしか効かないので、S_2 と $S(t,e,X)$ とは定数倍を除いて量子力学的にも等しい作用であることがわかる。$S(t,e,X)$ とポリヤコフ型作用との関係を見るために、次の様な変数変換を考える。

$$\begin{aligned} t^{ab} &\to g^{ab}e^2 \\ e &\to \tilde{e}\sqrt{-g} \end{aligned} \tag{2.26}$$

この変換をすると $S(t,e,X)$ は次の作用に帰着する。

$$S(t,e,X) = \int d^2\xi(\tilde{e}^3 - \tilde{e})\sqrt{-g} + \frac{1}{\lambda}\int d^2\xi\tilde{e}\sqrt{-g}g^{ab}\partial_a X \cdot \partial_b X \tag{2.27}$$

この式の右辺第 2 項目はポリヤコフ型作用に比例した項であり、座標付け替え変換の不変性と Conformal 不変性 (2.13) を臨界次元 ($D = 26$) で持つが、第 1 項目は座標付け替え変換の不変性は持つが、Conformal 不変性は持たない。(2.27) を経路積分で量子化する際には座標付け替え変換の不変性と Conformal 不変性を保ちたいので、第一項めの補助場 e に次式の制限を与える。

$$\tilde{e}^3 - \tilde{e} = 0 \tag{2.28}$$

この条件の下で $e = -1$ を解に選ぶと (2.27) の右辺第 2 項目はポリヤコフ型作用に等しくなる。従って S_2 と $S(t,e,X)$ とは定数倍を除いて量子力学的にも等しい作用であることにより、臨界次元では量子論的に Schild 型作用とポリヤコフ型作用とは等しいことがわかる。

3 Generalized Hamiltonian Dynamics and Schild Type String Action

この章では一般化されたハミルトン形式の理論 [5] [6] を、Schild 型弦の作用を用いて具体的に述べる。またその理論を使って考えられている新しい量子化の可能性 [7] [8] [9] についても述べる。前章で述べた Schild 型作用を思い出すと (2.17) 式の $n=2$ の場合だったので

$$S_{Schild}=-\int d^2\xi\{\frac{1}{e}[-\frac{1}{2\lambda^2}(\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu\cdot\partial_b X^\nu)^2]+e\} \tag{3.1}$$

である。この式の右辺、第1項は運動項に相当し、第2項の補助場の項はポテンシャル項に相当する。もとの Schild 型作用 [1] には第2項に相当するポテンシャル項がない作用だったので、この章では (3.1) の第2項目を考えず、また $e=$ 定数 とした作用を Schild 型作用として扱う [1] [6] [9]。(3.1) の右辺第1項目に注目すると、そのラグランジュ密度の形が、従来のポアソン括弧

$$\begin{aligned}\{A,B\} &= \epsilon^{ab}\partial_a A\partial_b B &(3.2)\\ &= \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p}-\frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q} &(3.3)\\ &\quad \epsilon^{ab};\ \text{反対称テンソル}\end{aligned}$$

の2乗の形と類似していることがわかる。解析力学におけるポアソン括弧は、正準共役量である運動量と位置の微分で表されるが、位置と運動量 (q,p) の微分の代わりに弦の軌跡である2次元面のパラメータ (σ,τ) の微分に書き換えたものを拡張されたポアソン括弧と見なすとそれは

$$\{X^\mu,X^\nu\}\equiv\frac{\partial(X^\mu,X^\nu)}{\partial(\sigma,\tau)}=\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu \tag{3.4}$$

で定義される。この拡張されたポアソン括弧を使うと Schild 型作用のラグランジュ密度は次の様に

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= C\{X^\mu,X^\nu\}^2 &(3.5)\\ \text{但し、}C &= \text{定数}\end{aligned}$$

書き直すことができる。このラグランアンから導かれる運動方程式は拡張されたポアソン括弧を使って書くと以下の式になる。

$$\{X^\mu,\{X^\mu,X^\nu\}\}=0 \tag{3.6}$$

古典解析力学の正準形式の理論を思い出すと、ハミルトン-ヤコビ方程式は次式

$$dS=\sum_\mu p_\mu dX_\mu-Hd\tau \tag{3.7}$$

$$H=H(p_\mu,X_\mu),\ \ S=S(X_\mu,t), \tag{3.8}$$

であり、微分1形式で書かれていた。粒子の運動は1つのパラメーター τ を使って記述されるが、弦の運動は2つのパラメーター (σ,τ) で記述されるため、上記のハミルトン-ヤコビ方程式を使うことはできない。そこでハミルトン-ヤコビ方程式を次式の様に微分2-形式に拡張することを考える。

$$dS_1\wedge dT_1+dS_2\wedge dT_2=\sum_{\mu>\nu}^{1,N}p_{\mu\nu}dX_\mu\wedge dX_\nu-Hd\sigma\wedge d\tau \tag{3.9}$$

$$S_m=S_m(X_\mu,\sigma,\tau),\ \ T_m=T_m(X_\mu,\sigma,\tau),\ \ m=1,2\ \ H=H(p_{\mu\nu},X_\lambda)$$

ここで X_μ は N 個の座標を表わし、$p_{\mu\nu}$ は $N(N-1)/2$ 個の運動量を表わす。σ,τ は全く同等に扱われる２つのパラメーターである。この式から運動量 $p_{\mu\nu}$ とハミルトニアン $H(p_{\mu\nu},X_\mu)$ は (S_m,T_m) を使って次式で書かれ、

$$
\begin{aligned}
p_{\mu\nu} &= \sum_m \frac{\partial(S_m,T_m)}{\partial(X_\mu,X_\nu)} = \sum_m \left(\frac{\partial S_m}{\partial X_\mu}\frac{\partial T_m}{\partial X_\nu} - \frac{\partial S_m}{\partial X_\nu}\frac{\partial T_m}{\partial X_\mu}\right) \qquad (3.10)\\
-H(p_{\mu\nu},X_\lambda) &= \sum_m \frac{\partial(S_m,T_m)}{\partial(\sigma,\tau)} = \sum_m \left(\frac{\partial S_m}{\partial \sigma}\frac{\partial T_m}{\partial \tau} - \frac{\partial S_m}{\partial \tau}\frac{\partial T_m}{\partial \sigma}\right)
\end{aligned}
$$

また (S_m,T_m) と (X_μ,σ,τ) の関係式（拘束条件）も導かれる。

$$
0 = \sum_m \frac{\partial(S_m,T_m)}{\partial(\sigma,X_\mu)},\quad 0 = \sum_m \frac{\partial(S_m,T_m)}{\partial(X_\mu,\tau)}
$$

この拡張されたハミルトン-ヤコビ方程式 (3.9) に更に外微分 d を演算させると、外微分の性質、$d^2=0$ より、

$$
0 = \sum_{\mu>\nu} dp_{\mu\nu}\wedge dX_\mu \wedge dX_\nu - \left(\sum_{\mu>\nu}\frac{\partial H}{\partial p_{\mu\nu}}dp_{\mu\nu} + \sum_\mu \frac{\partial H}{\partial X_\mu}dX_\mu\right)\wedge d\sigma\wedge d\tau \qquad (3.11)
$$

となる。この式から次式の拡張されたハミルトン方程式が導かれる（点粒子の場合も同様な方法でハミルトン方程式を導くことができる）。

$$
\{X_\mu,X_\nu\} = \frac{\partial H}{\partial p_{\mu\nu}},\quad \sum_\mu \{p_{\mu\nu},X_\nu\} = -\frac{\partial H}{\partial X_\mu} \qquad (3.12)
$$

(3.9) と (3.12) を使うとラグランジアン $\mathcal{L}$ は

$$
\sum_m dS_m\wedge dT_m = \left(\sum_{\mu>\nu} p_{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial p_{\mu\nu}} - H\right) d\sigma\wedge d\tau \equiv \mathcal{L}d\sigma\wedge d\tau \qquad (3.13)
$$

で定義できる。また、古典解析力学ではハミルトニアン H は時間 τ に依らない量であったが、今度のハミルトニアン $H(p_{\mu\nu},X_\lambda)$ は２つの同等なパラメータ (σ,τ) に依らない量であることが拡張されたハミルトン方程式 (3.12) を使って以下の様に示される。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \tau} &= \sum_{\mu>\nu}\frac{\partial p_{\mu\nu}}{\partial \tau}\{X_\mu,X_\nu\} - \sum_{\mu,\nu}\frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\{p_{\mu\nu},X_\nu\} = 0 \qquad (3.14)\\
\frac{\partial H}{\partial \sigma} &= \sum_{\mu>\nu}\frac{\partial p_{\mu\nu}}{\partial \sigma}\{X_\mu,X_\nu\} - \sum_{\mu,\nu}\frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\{p_{\mu\nu},X_\nu\} = 0
\end{aligned}
$$

ハミルトニアン H を Schild 型

$$
H = \frac{1}{2}\sum_{\mu>\nu} p_{\mu\nu}^2 \qquad (3.15)
$$

に選ぶと、この式と拡張されたハミルトン方程式 (3.12) から (3.6) の運動方程式が再現される。また運動量 $p_{\mu\nu}$ は結局、次式で書き直すことができる。

$$
p_{\mu\nu} = \frac{\partial(X^\mu,X^\nu)}{\partial(\sigma,\tau)} = \{X^\mu,X^\nu\} \qquad (3.16)
$$

この様にハミルトン形式の理論はSchild型作用を具体的に使うことによって拡張されることがわかった。点粒子の場合と比較して以上の議論をまとめると次の様になる。但し、簡単のため本来ラグランジアンに含まれる質量 m や弦の張力 $T=(2\pi\alpha')^{-1}$ などはここでは省略する。

	粒子	弦
パラメーター	τ	(σ,τ)
ラグランジアン	$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\frac{dX^\mu}{d\tau}\right)^2$	$\mathcal{L}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial(X^\mu,X^\nu)}{\partial(\sigma,\tau)}\right)^2$
運動量	$p_\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{dX^\mu}{d\tau}\right)}=\frac{dX^\mu}{d\tau}$	$p_{\mu\nu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial(X^\mu,X^\nu)}{\partial(\sigma,\tau)}\right)}=\frac{\partial(X^\mu,X^\nu)}{\partial(\sigma,\tau)}$
ハミルトン－ヤコビ方程式	$dS=\sum_\mu p_\mu dX_\mu - Hd\tau$	$\sum_m dS_m\wedge dT_m$ $=\sum_{\mu>\nu}^{1,N} p_{\mu\nu}dX_\mu\wedge dX_\nu - Hd\sigma\wedge d\tau$
ハミルトン方程式	$\frac{dX_\mu}{d\tau}=\frac{\partial H}{\partial p_\mu}$ $\frac{dp_\mu}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial X_\mu}$	$\{X_\mu,X_\nu\}=\frac{\partial H}{\partial p_{\mu\nu}}$ $\sum_\mu\{p_{\mu\nu},X_\nu\}=-\frac{\partial H}{\partial X_\mu}$
ハミルトニアン	$H=p_\mu\frac{dX^\mu}{d\tau}-\mathcal{L}$	$H=\frac{1}{2}p_{\mu\nu}\frac{\partial(X^\mu,X^\nu)}{\partial(\sigma,\tau)}-\mathcal{L}$
保存則	$\frac{\partial H}{\partial\tau}=0$	$\frac{\partial H}{\partial\tau}=\frac{\partial H}{\partial\sigma}=0$

粒子の運動に対するハミルトン形式の理論を弦の運動に適用しやすい形に拡張してきたが、更に高次の物体（膜の理論 [7] など）にも適用しやすい理論の拡張は可能である。一般に N 次元に広がった物体の運動を記述する $N+1$ 個の独立なパラメーターが存在し、上記で述べた様なハミルトン形式の理論の拡張が考えられる。

点粒子の理論では、正準量子化はポアソン括弧を同時刻における交換子に置き換えることで成された。すなわち

$$\{X^\mu(\tau),p_\nu(\tau')\}|_{\tau=\tau'}=i\hbar\delta^\mu_\nu \tag{3.17}$$

であった。弦の理論では正準量子化はどの様に記述できるだろうか。粒子の場合を真似て以下の様な括弧を考えると

$$\{X^\mu(\sigma,\tau),p_{\nu\lambda}(\sigma',\tau')\}|_{\tau=\tau',\sigma=\sigma'}=? \tag{3.18}$$

となるが、この式にはいくつかの疑問点が残る。まず左辺の X^μ と $p_{\nu\lambda}$ の添え字の数が一致しない（自由度が異なる)。これをどう解釈するべきか。このことは粒子の場合と大きく異なることである。また粒子の場合の同時刻 $\tau=\tau'$ に相当するのは $\tau=\tau',\sigma=\sigma'$ だろうか。この時、右辺はどうなるかなどの疑問点が残る。

4 Global World Sheet Supersymmetry

超対称性とはボゾンとフェルミオンの間の対称性である。整数スピンを持つボゾンと半整数スピンを持つフェルミオンとは全く無関係なものではなく、他の内部対称性の場合（例えば陽子と中性子がアイソ２重項を成す様に）と同じく、ボゾンとフェルミオンは超対称二重項を成すのではないかと考えられた [21] [22]。この超対称性を要求するとボゾンだけの理論で現れた様々な問題が解決される [23]。例えば、摂動論でふつうは発散する多くの Feynman 図はフェルミオンを導入することで解決される。なぜならボゾンのループ図（量子補正を示す）とフェルミオンのループ図は -1 の因子だけ異なるのでフェルミオンの項を足すことにより発散が押さえられるからである。またボゾン的な弦の理論に現れた負の質量を持つタキオンという粒子 [2] は時空の真空を安定に保つことができないため、望ましい粒子ではない。しかしながら超対称性の理論では、タキオンは超対称性を破るので除かれる。つまり超対称性を要求することにより、望ましくない粒子は除かれるのである。

現在、弦の理論２次元面 (World Sheet) 上での超対称化と 10 次元での超対称化が考えられている。まず、２次元面 (World Sheet) 上での大局的な超対称化について話を進めていく[2]。

コンフォーマルゲージで固定したボゾン的な弦の作用（Appendix A 参照）を思い出してみると、

$$S=-\frac{1}{2\pi}\int d^2\xi\partial_\alpha X_\mu\partial^\alpha X^\mu,\ \ X_\mu=X_\mu(\sigma,\tau),\ \ (\mu=0,1,...,D-1) \tag{4.1}$$

この作用をフェルミオン的な場 ψ^μ_A（以降、大文字 ABC は World Sheet 上の Spinor 添え字を表わす。）を導入し、より一般化させることを考える。この ψ^μ_A はローレンツ群 $SO(D-1,1)$ のベクトル的な表現として変換される。(4.1) に ψ^μ_A を導入した次の様な作用を考える。

$$S=-\frac{1}{2\pi}\int d^2\xi\left\{\partial_\alpha X_\mu\partial^\alpha X^\mu-i\bar{\psi}^\mu\rho^\alpha\partial_\alpha\psi_\mu\right\} \tag{4.2}$$

ここで ρ^α は２次元での Γ 行列で、この章ではそれを純虚数に選び、(Appendix B で $\hat{\epsilon}$ を -1 に選んだことに相当する。) それを以下の様に書く。

$$\rho^0=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\ \rho^1=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

また、ρ^α は次の交換関係を満たす。

$$\left\{\rho^\alpha\ ,\rho^\beta\right\}=-2\eta^{\alpha\beta}$$

但し、$\eta^{\alpha\beta}=diag(-,+)$ である。

Spinors とはローレンツ変換のもとで一定の変換則を示す群 $SO(t,s)$ の規約表現であったので、今の場合それは $SO(1,1)$ の規約表現であり、２成分の実 Majorana-Spinors である。(Appendix B 参照) これは時空においてはベクトルとして変換される場であるが、($SO(D-1,1)$ のボゾン的な表現として変換される。) 反可換する場である。それを次の式で書く。

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_-\\ \psi_+\end{pmatrix}$$

また、$\bar{\psi}$ は普通は

$$\bar{\psi}\equiv\psi^\dagger\rho^0$$

[2] この章と次章は [2] を基に話を進めていくため、Γ 行列の表記も [2] にあわせることにする。

で定義されるが、今の場合は実 Majorana-Spinors なので、右辺は単に $\psi^T\rho^0$ で表わされる。2つの実 Majorana-Spinors を χ, ψ とすると、それらを掛け合わせた $\bar{\chi}\psi$ は $\bar{\chi}\psi = \bar{\psi}\chi$ という性質を持つことが知られている（証明は Appendix D 参照)。

ボゾンとフェルミオンの間の超対称性は次式で示される超対称変換の下で、作用 (4.2) が不変になることで表わされる。

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \bar{\epsilon}\psi^\mu \\ \delta\psi^\mu &= -i\rho^\alpha\partial_\alpha X^\mu\epsilon \end{aligned} \tag{4.3}$$

ここで ϵ は変換パラメーター σ, τ に依存しない、反可換する Majorana-Spinor である。この変換の下で作用 (4.2) は不変であることが、フェルミオンの運動方程式；Dirac 方程式 $\rho^\alpha\partial_\alpha\psi = 0$ を使って示される (証明は Appendix D 参照)。また、ある2つの超対称変換 δ の交換関係は

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2]\, X^\mu &= a^\alpha\partial_\alpha X^\mu \\ [\delta_1, \delta_2]\, \psi^\mu &= a^\alpha\partial_\alpha\psi \\ a^\alpha &\equiv 2i\bar{\epsilon}_1\rho^\alpha\epsilon_2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

であり、時空の並進 ∂_α と関係していることがわかる。この代数関係も運動方程式を使うことによって満たされている (次の章では運動方程式を使わずに代数が閉じるような理論を述べる)。以上の議論では、変換パラメーター ϵ を定数だとして、作用が超対称変換 (4.3) の下で不変であることを示してきた。もし ϵ が定数ではなかったら、作用は超対称変換 の下で不変ではなく、以下の形で残ってしまう。

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\, (\partial_\alpha\bar{\epsilon})\, J^\alpha \\ J_\alpha &= \frac{1}{2}\rho^\beta\rho_\alpha\psi^\mu\partial_\beta X_\mu \end{aligned} \tag{4.5}$$

この J^α は超対称変換 (4.3) の下で作用 (4.2) が不変であることを示す式 (Appendix D 参照) から自然に導かれるものであり、保存される Noether current で、係数 $\frac{1}{2}$ は便宜上つけたものである。またエネルギー、運動量テンソル $T_{\alpha\beta}$ は以下の式になる。

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu + \frac{i}{4}\bar{\psi}^\mu\rho_\alpha\partial_\beta\psi_\mu + \frac{i}{4}\bar{\psi}^\mu\rho_\beta\partial_\alpha\psi_\mu - (trace) \tag{4.6}$$

$T_{\alpha\beta}$ と J^α は運動方程式を使うと保存することがわかる。ボゾン的な弦の理論ではエネルギー、運動量テンソルはトレースレスだったので光円錐ゲージでは $T_{+-} = T_{-+} = 0$ であった（Appendix A 参照)。今回の場合も J^α のある成分は以下の式

$$\rho^\alpha J_\alpha = 0$$

により消える。これは2次元特有の ρ の恒等式 $\rho^\alpha\rho^\beta\rho_\alpha = 0$ からの帰結である。

- Scalar Superfield Y^A

2次元の場の理論は通常の2次元空間 Σ（World-Sheet 上の空間）の理論であるが、超対称性を導入する際には、通常の座標 $\xi^\alpha = (\sigma, \tau)$ にグラスマン的な座標 θ^A(2成分 Majorana-Spinors) を付け加えた2次元超空間 $\hat{\Sigma}$ を考えるとわかりやすい。つまり

$$\Sigma\, :\, \xi^\alpha \rightarrow \hat{\Sigma}\, :\, (\xi^\alpha\, , \theta^A)$$

とする。超空間における一般的な関数 Y^μ（超場）はボゾン的な座標 ξ^α とフェルミオン的な座標 θ^A を使って以下の様に書くことができる。

$$Y^\mu(\sigma,\theta)=X^\mu+\bar{\theta}\psi^\mu+\frac{1}{2}\bar{\theta}\theta B^\mu \tag{4.7}$$

この式は θ の2次の項までしか含んでいないが、3次以上の高次の項は θ の反可換性から消えてしまうからである。超場 Y^μ はボゾン場 X^μ とフェルミオン場 ψ^μ と以前には現れなかった新しい場 B^μ（補助場）を含む。

この超空間が超対称性をいかに明確にしているか、以降で示していく。超空間上の超対称性は次の生成子 Q_A で表わされる。

$$Q_A=\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^A}+i(\rho^\alpha\theta)_A\partial_\alpha$$

これに反可換する無限小パラメーター ϵ_A を導入すると便利である。なぜなら Q_A ではなく、$\bar{\epsilon}Q$ を生成子と考える方が都合がいいからである。この生成子 $\bar{\epsilon}Q$ によって超空間の座標（θ^A と ξ^α）は次の様に変換される。

$$\delta\theta^A = \left[\bar{\epsilon}Q\,,\theta^A\right]=\epsilon^A \tag{4.8}$$

$$\delta\xi^\alpha = [\bar{\epsilon}Q\,,\xi^\alpha]=\bar{\epsilon}\rho^\alpha\theta \tag{4.9}$$

また超場 Y^μ は $\bar{\epsilon}Q$ によって以下のように変換される。

$$\delta Y^\mu=[\bar{\epsilon}Q\,,Y^\mu]=\bar{\epsilon}QY^\mu \tag{4.10}$$

$\bar{\epsilon}Q$ の交換関係を調べてみると

$$[\bar{\epsilon}_1Q\,,\bar{\epsilon}_2Q]=-2i\bar{\epsilon}_1\rho^\alpha\epsilon_2\partial_\alpha \tag{4.11}$$

であることがわかる。

この (4.11) 式を使うと超対称変換同士の交換関係が

$$[\delta_1\,,\delta_2]\,Y^\mu=a^\alpha\partial_\alpha Y^\mu \tag{4.12}$$

となることがわかる。2次元の Fierz 関係式

$$\theta_A\bar{\theta}_B=-\frac{1}{2}\delta_{AB}\bar{\theta}_C\theta_C \tag{4.13}$$

を使うと、Y^μ の変換式 (4.10) は X^μ,ψ^μ,B^μ の次の変換によって満たされる。超場を導入する前の超対称変換の代数 (4.4) は (4.2) の運動方程式 $\rho^\alpha\partial_\alpha\psi=0$ を使うことで成立していた。今回の様に超場 Y^μ を使うと、運動方程式を使わずに代数を閉じさせることができる。しかしながら新しい場; 補助場 B が必要である。

$$\left\{\begin{array}{l}\delta X^\mu=\bar{\epsilon}\psi^\mu\\[1em] \delta\psi^\mu=-i\rho^\alpha\epsilon\partial_\alpha X^\mu+B^\mu\epsilon\\[1em] \delta B^\mu=-i\bar{\epsilon}\rho^\alpha\partial_\alpha\psi^\mu\end{array}\right. \tag{4.14}$$

もし、補助場 B をゼロ ($B^\mu=\rho^\alpha\partial_\alpha\psi^\mu=0$) にすると、この変換は超場を導入する前の変換 (4.3) に帰着する。

超場 Y^μ が複数ある場合を考える。k 個の超場がある場合 $(Y_1,...,Y_k)$、k 番目の Y_k の超対称変換は $\delta Y_k = \bar{\epsilon}QY_k$ になる。それらの超場の積（簡単のため２個の Y がある場合 Y_1, Y_2 を考える。）の変換も同様な変換性を持つ。

$$\delta(Y_1Y_2) = \bar{\epsilon}Q(Y_1Y_2)$$

また $\bar{\epsilon}Q$ は超空間 (ξ,θ) の１階微分の演算子なので、それは次の Leibniz の規則

$$\bar{\epsilon}Q(Y_1Y_2) = \bar{\epsilon}Q(Y_1)Y_2 + Y_1\bar{\epsilon}Q(Y_2)$$

に従う。これは１階微分の演算子の特徴である。この特徴から超場 Y_1, Y_2 の積 Y_1Y_2 は１つの超場と同様な変換をすることが保証される。しかし１つの超場 Y は単に超空間の関数なのでその積 Y_1Y_2 も超空間の１つの関数になっていることに注意すれば、変換が同じなのは当然のことである。

次に超場 Y^μ を使うことによって、超対称変換 (4.14) の下で明確に不変になるようなラグランジアンを作りたい。そのためには超対称変換の下で不変になるような微分演算子が必要であり、それを次の式で書く。

$$D = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - i\rho^\alpha\theta\partial_\alpha \tag{4.15}$$

これは超空間における共変微分 (Covariant drivative) と呼ばれる。この D の主な性質は次の３つの式で表わされる。

$$\begin{aligned} \{D_A\,, Q_B\} &= 0 \\ \{D_A\,, \bar{D}_B\} &= 2i(\rho^\alpha)_{AB}\partial_\alpha \\ \{D_A\,, D_B\} &= 2i(\rho^\alpha\rho^0)_{AB}\partial_\alpha \end{aligned} \tag{4.16}$$

これらの式の証明は (4.11) の証明と同様な計算で示される。この共変微分 D はラグランジアンを形成するのに有効である。なぜなら超場 Y^μ の超対称変換は $\delta Y^\mu = \bar{\epsilon}QY^\mu$ であるので、超場の共変微分 DY^μ も (4.16) の性質から同様な変換をする ($\delta(DY) = \bar{\epsilon}Q(DY)$)。よって超場の共変微分 DY^μ もまた、超場であると見なせる。このことは超対称変換で不変なラグランジアンは微分を含むことを可能にしている。

また、超対称変換の下で不変な作用を形成するためには、その作用の（超空間の）積分測度も超対称変換の下で不変でなければならない。超空間での積分測度は普通、次の様に書く。

$$\int d^2\sigma d^2\theta \tag{4.17}$$

$d^2\theta$ は Berezin 積分と呼ばれるもので、フェルミオンに対する積分を表わす。θ を含む一般の関数 $V = a + \theta^1 b_1 + \theta^2 b_2 + \theta^1\theta^2 c$ はその積分によって次の様に計算される。

$$\int d^2\theta\left(a + \theta^1 b_1 + \theta^2 b_2 + \theta^1\theta^2 c\right) = c$$

つまりこの積分は $\theta^1\theta^2$ を含む項しか拾わない[3] 。よって $\bar{\theta}\theta$ を含む関数はそれを $\theta^1\theta^2$ を使って書き直すことで ($\bar{\theta}\theta = \theta\rho^0\theta = -2i\theta^1\theta^2$) 積分が以下の様に実行される。

$$\int d^2\theta\bar{\theta}\theta = -2i \tag{4.18}$$

またこの積分は次の性質を持つ。

$$\int d^2\theta\frac{\partial V}{\partial\theta^A} = 0 \tag{4.19}$$

[3] つまり $\theta^1\theta^2$ の微分に相当している。

V は超空間の任意の関数である。(4.17) の測度を使った超対称変換で不変な作用は

$$S = \int d^2\sigma d^2\theta Y$$

と書くことができる。超場 Y の変換は $\delta Y = \bar{\epsilon}QY$ なのでその作用の超対称変換は

$$\delta S = \int d^2\sigma d^2\theta\bar{\epsilon}QY$$

となる。(4.19) の積分測度の性質から、超場 DY^μ は積分するとゼロになってしまう。積分してもゼロにならず（つまり $\bar{\theta}\theta$ を含む)、共変微分 D を含む様な作用として、例えば DY^μ を２つ掛け合わせた次のような作用が考えられる。

$$S = \frac{i}{4\pi}\int d^2\sigma d^2\theta\bar{D}Y^\mu DY_\mu$$

θ の積分を見やすくするため、$DY, \bar{D}Y$ を計算すると、Fierz 関係式 (4.13) を使って

$$DY^\mu = \psi^\mu + \theta B^\mu - i\rho^\alpha\theta\partial_\alpha X^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta\rho^\alpha\partial_\alpha\psi^\mu \tag{4.20}$$

$$\bar{D}Y^\mu = \bar{\psi}^\mu + B^\mu\bar{\theta} + i\partial_\alpha X^\mu\bar{\theta}\rho^\alpha - \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta\partial_\alpha\bar{\psi}^\mu\rho^\alpha \tag{4.21}$$

になる。但し、$\bar{D}$ は

$$\begin{aligned}\bar{D}_A &= D_B\rho^0_{BA} = \left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^B} - i(\rho^\alpha\theta)_B\partial_\alpha\right)\rho^0_{BA} \\ &= -\frac{\partial}{\partial\theta^A} + i(\bar{\theta}\rho^\alpha)_A\partial_\alpha \end{aligned}\tag{4.22}$$

である。それらを掛け合わせて $\bar{\theta}\theta$ の項を拾ってみると次の式になる。

$$\begin{aligned}\bar{D}Y^\mu DY_\mu|_{\bar{\theta}\theta} &= \partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu\bar{\theta}\rho^\alpha\rho^\beta\theta + B^\mu B_\mu\bar{\theta}\theta + \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}^\mu\rho^\alpha\partial_\alpha\psi^\mu - \partial_\alpha\bar{\psi}^\mu\rho^\alpha\psi_\mu\right)\bar{\theta}\theta \\ &= \left(-\partial_\alpha X^\mu\partial^\alpha X_\mu + \bar{\psi}^\mu\rho^\alpha\partial_\alpha\psi^\mu + B^\mu B_\mu\right)\bar{\theta}\theta\end{aligned}$$

この式に $\bar{\theta}\theta$ の積分を実行すると、(4.18) から

$$S' = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\left(\partial_\alpha X^\mu\partial^\alpha X_\mu - \bar{\psi}^\mu\rho^\alpha\partial_\alpha\psi^\mu - B^\mu B_\mu\right) \tag{4.23}$$

になる。この作用の補助場 B に対する運動方程式を解くと、$B = 0$ になりそれは単に B をゼロにする事を意味し、古典的には補助場 B が必要ではないことを表わしている。この時、この作用は超場を導入する前の作用 (4.2) に一致している。

コンフォーマルゲージで固定したボゾン的な弦の作用の２次元大局的超対称化は、以上の様に成されてきた。しかし、より一般的なボゾン的弦の作用の２次元局所的超対称化はどのように成されるだろうか。次章で、ボゾン的弦の作用の局所的超対称化について述べていく。

5 Locally Supersymmetric Form of the Action

平らな時空; コンフォーマルゲージで固定した時空では、Spinorsはローレンツ変換の規約表現の1つであった。しかしこれは平らな時空で成り立つ概念であって、これを直接曲った時空に拡張することは出来ない。そこでD次元多様体M上[4] のSpinorsを考える際には多様体上の各点で慣性系（ローレンツ変換が意味を持つ）がその接空間 (tangent space) で存在すると仮定し、その上でSpinorsを定義する。局所的な慣性系[5] と曲った時空Mを結び付ける役割を持つ $e_\mu^m, (m = 0, ..., D-1)$ 'vielbein' という量を導入して、曲った時空上の理論を考えていく。これは多様体Mのベクトルの添え字mとその多様体の接ベクトルの添え字μ を持つ接ベクトル（各々のmに対する）である。ローレンツ変換は各接空間; 局所ローレンツ系上で独立に行われるので、その変換パラメーターは多様体Mの場所ごとに異なる。この様なローレンツ変換を局所ローレンツ変換と呼び、vielbeinの添え字mは局所ローレンツ系を区別するものである。

この e_μ^m 'vielbein' は多様体M上の計量$g_{\mu\nu}$と接空間のMinkowski計量 ($\eta_{mn} = diag(-, +, ..+)$) を以下の様に結び付けている。

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{mn} e_\mu^m e_\nu^n \\ \eta^{mn} &= g^{\mu\nu} e_\mu^m e_\nu^n \end{aligned} \tag{5.1}$$

またe_m^μはvielbein e_μ^m の逆の役割を果たし、次の関係式

$$e_m^\mu e^{\nu m} = g^{\mu\nu}, \quad e_\mu^m e_{\nu m} = g_{\mu\nu}, \quad e_m^\mu e_\nu^m = \delta_\nu^\mu \tag{5.2}$$

$$e^{\mu m} e_\mu^n = \eta^{mn}, \quad e_m^\mu e_{\mu n} = \eta_{mn}, \quad e_m^\mu e_\mu^n = \delta_m^n \tag{5.3}$$

を満たす。Spinorsの双一次形式がテンソルを与えることから、Spinorsはテンソルの平方根の様なものだと考えられる。これと同様にvielbeinは計量の平方根と見なされうるものであり、計量よりも更に基本的な量である（よって計量はvielbeinの双一次形式で表わされる (5.2)(5.3)）。また e_μ^m の行列式 (determinant) は $e = \det e_\mu^m = \sqrt{g}$ となる。e_μ^m は計量$g_{\mu\nu}$が持つ自由度（反対称行列の成分）$\frac{1}{2}D(D-1)$ よりも多くの自由度を持つ。しかしながら、それと同時に多くの対称性; 局所ローレンツ変換不変性などを持つため、正味の自由度は$g_{\mu\nu}$と同じである。

局所ローレンツ変換不変性を持つ理論は、局所ゲージ不変性を持つゲージ理論 ([24][25] 等参照) に似ている。ゲージ場の理論ではラグランジアンに局所ゲージ不変性を持たせるために、接続場; ゲージ場A_μを導入した。そして普通の微分をA_μを含んだ共変微分 (covariant derivative) に変えることによって、ラグランジアンを局所ゲージ不変な量にすることが出来た。同様な局所ローレンツ不変な理論でも成され、ラグランジアン（微分を含む）を局所ローレンツ不変にするためにSpin接続場と呼ばれる新しい場ω_μ^{mn}（ゲージ理論のゲージ場A_μに相当する）を導入する。局所ローレンツ変換の下でSpin接続場ω_μ^{mn}は次の様に変換する。この変換もゲージ場A_μの変換と類似している。但し変換パラメーター（反対称テンソル）をΘ^{mn}とする。

$$\delta\omega_\mu^{mn} = \partial_\mu \Theta^{mn} + [\omega_\mu, \Theta]^{mn} = (D_\mu \Theta)^{mn}$$

Γ行列を導入すると、Spinor ψ の局所ローレンツ変換は次式で与えられる。

$$\delta\psi = -\frac{1}{4}\Theta^{mn}\Gamma_{mn}\psi$$

また、ラグランジアンを局所ローレンツ不変に保つ様な微分（共変微分）は次式で与えられる。

$$D_\mu\psi = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu^{mn}\Gamma_{mn}\right)\psi$$

[4] 一般的には曲った空間

[5] 平らな時空；ローレンツ系ともいう。

曲った空間（多様体M；添え字 m）の Γ 行列と平らな空間（接空間；添え字 μ）の Γ 行列は以下のように e_μ^m を使って結び付けられる。

$$\Gamma^\mu(x) = e_m^\mu(x)\Gamma^m$$

よって曲った時空[6]における Spinors の作用は、一般座標変換と局所ローレンツ変換の下で不変である必要があり、その作用は

$$S_\psi = \frac{i}{2}\int dx e\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu \psi$$

と書くことが出来る。

さて Spin 接続場 ω_μ^{mn} についてゲージ場との類似性しか述べていなかったが、それは全く任意の新しい場なのであろうか。一般相対論では Spin 接続場は全く任意ではなく、計量 $g_{\mu\nu}$ によって決定される。計量は共変微分をするとゼロ（共変的に一定）なので、計量の平方根の様な vielbeine_μ^m もまた共変的に一定である。もしそれが成り立たないとしたら、一般相対論との類似点の１つを持たなくなってしまうため、その条件を vielbein に課すと

$$D_\mu e_\nu^m = \partial_\mu e_\nu^m + \omega_{\mu n}^m e_\nu^n - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^m = 0$$

になる。この式から Spin 接続場が唯一に決定される。vielbein も同様にして決定される。この様に決定された Spin 接続場と vielbein は一般相対論と矛盾しない。一般相対論におけるリーマン曲率 (Riemann curvature) はゲージ場の理論における場の強さ (Field Strength $F_{\mu\nu}$) を表わし、それは Spin 接続場を使って以下の様に書かれる。（このリーマン曲率と一般相対論におけるリーマン曲率との関連については [26] 等参照）

$$R_{\mu\nu}^{mn} = \partial_\mu \omega_\nu^{mn} - \partial_\nu \omega_\mu^{mn} + [\omega_\mu, \omega_\nu]^{mn}$$

$N=1$ の超対称性を持つ４次元超重力理論 ([21] [22] [27] 等参照) を思い出すと、その理論には Spin 接続場と vielbein に加えて Rarita-Schwinger 場 $\chi_{A\mu}$(μ; ベクトル添え字,A;Spinors 添え字) を含んでいた。ちょうどボゾン (Spin 1) とフェルミオン (Spin 1/2) が超対称二重項 (X_μ, ψ_μ) を成すように曲った時空の理論にはそれに加えて vielbein と Rarita-Schwinger 場が超対称二重項 (e_μ^μ, χ_μ) を成すのである。一般相対論ではこの vielbein は Spin 2 の粒子（重力子）に対応するので、Rarita-Schwinger 場は Spin 3/2 の粒子を記述する。この Rarita-Schwinger 場を含んだ作用は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x e\left\{-\frac{1}{2\kappa^2}R - \frac{i}{2}\bar{\chi}_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu\chi_\rho\right\} \\ \text{但し} R &= e_m^\mu e_n^\nu R_{\mu\nu}^{mn} \end{aligned}$$

ここで κ は重力の結合定数 (Planck length) で、その２乗は Newton 定数に比例している。この作用は一般座標変換と局所ローレンツ変換の下で不変な作用であり、局所的超対称変換の下でも不変である。作用が局所的超対称変換の下でも不変であるような、場の超対称変換は

$$\begin{aligned} \delta\chi_\mu &= \frac{1}{\kappa}D_\mu\epsilon \\ \delta e_\mu^m &= -\frac{i}{2}\kappa\bar{\epsilon}\gamma^m\chi_\mu \end{aligned} \tag{5.4}$$

[6] つまり重力の効果を考慮した時空

である。

• Super String Action and its Symmetries

2次元World-sheet上の場の理論では、vielbeinは2次元パラメーター(σ,τ)の関数$e^a_\alpha(\sigma,\tau)$[7] になり、Rarita-Schwinger場$\chi_{A\mu}$も$\chi_{A\alpha}(\sigma,\tau)$となり、これは2成分Majorana Spinorで、World-sheet上でベクトルとして振る舞い'gravitino'と呼ばれる。これらをもともとの場$X^\mu(\sigma,\tau),\psi^\mu(\sigma,\tau)$に加えて作用(4.2)を次の様な作用に置き換える。この作用は2次元上の座標付け替え変換と2次元的な局所ローレンツ変換の下で不変な作用である。

$$S_2=-\frac{1}{2\pi}\int d^2\xi e\left\{h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu-i\bar{\psi}^\mu\rho^\alpha\nabla_\alpha\psi_\mu\right\} \tag{5.5}$$

2次元Majoranaフェルミオンの性質により、Spin接続場はSpinorの項に寄与しない。よって∇_αは∂_αに置き換えることが出来る（後のSupervierbeinを使った計算でこれを示す）。しかし作用(5.5)はまだ局所的超対称変換の下で不変ではなく、大局的な超対称変換(4.14)の下で不変な作用である。もし大局的な超対称変換のパラメーター を2次元面上の座標に依存させたパラメーターに置き換えると、前の章で計算した様に超対称変換後の作用ともとの作用との差は$\int(\nabla_\alpha\bar{\epsilon})J^\alpha d^2\xi$に比例する形になった。(4.5) ここで$J^\alpha$は

$$J^\alpha=\frac{1}{2}\rho^\beta\rho^\alpha\psi^\mu\partial_\beta X_\mu$$

であった。この差を打ち消す様にRarita-Schwinger場$\chi_\alpha(\sigma,\tau)$の超対称変換を

$$\delta\chi_\alpha=\nabla_\alpha\epsilon \tag{5.6}$$

に選び、作用が超対称変換で不変になるように、χ_αを含む項を次の形で付け加える。

$$S_3=-\frac{1}{\pi}\int d^2\xi e\bar{\chi}_\alpha\rho^\beta\rho^\alpha\psi^\mu\partial_\beta X_\mu \tag{5.7}$$

しかしながら$X^\mu(\sigma,\tau)$の変化分から更に次の様なを含む項が現れるので、

$$\bar{\chi}_\alpha\rho^\beta\rho^\alpha\psi^\mu\bar{\psi}_\mu\nabla_\beta\epsilon=-\frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu\psi^\mu\bar{\chi}_\alpha\rho^\beta\rho^\alpha\nabla_\beta\epsilon$$

これと打ち消す様な項が更に必要になり、それは次式で書かれる。

$$S_4=-\frac{1}{4\pi}\int d^2\xi e\bar{\psi}_\mu\psi^\mu\bar{\chi}_\alpha\rho^\beta\rho^\alpha\chi_\beta \tag{5.8}$$

よって完全な作用は(5.5)(5.7)(5.8)を足した$S=S_2+S_3+S_4$になり、これは局所超対称変換

$$\begin{aligned}\delta X^\mu &= \bar{\epsilon}\psi^\mu,\ \delta\psi^\mu=-i\rho^\alpha\epsilon\left(\partial_\alpha X^\mu-\bar{\psi}^\mu\chi_\alpha\right)\\ \delta e^a_\alpha &= -2i\bar{\epsilon}\rho^\alpha\chi_\alpha,\ \delta\chi_\alpha=\nabla_\alpha\epsilon\end{aligned} \tag{5.9}$$

の下で不変な作用である。この作用はNeveu-Schwartz-Ramond型作用(以降、NSR型作用と略す)と呼ばれる。この作用にはe^a_αとχ_αの運動項が含まれていない。これは2次元超重力理論の特徴である($D>2$の超重力理論にはそれらの運動項が含まれている)。例えば$\bar{\chi}_\alpha\rho^{\alpha\beta\gamma}\nabla_\beta\chi_\gamma$の様な項を考えるとそれには3階の反対称テンソル$\rho^{\alpha\beta\gamma}$が必要であるが、2次元にはそれが存在しない

[7] これを'zweibein'と呼ぶ

ため、その様な項はない。

以上で述べた対称性（座標付け替え変換不変性、局所ローレンツ変換不変性、局所的超対称変換不変性）に加えてNSR型作用には更に2つの局所的対称性が存在する。その1つはボゾン的な弦（Appendix A 参照）で現れた局所的Weyl対称性の拡張で、次の様な変換

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= 0,\ \delta\psi^\mu = -\frac{1}{2}\Lambda\psi^\mu \\ \delta e^a_\alpha &= \Lambda e^a_\alpha,\ \delta\chi_\alpha = \frac{1}{2}\Lambda\chi_\alpha \end{aligned} \tag{5.10}$$

の下でNSR型作用は不変である。もう1つの対称性は局所的なフェルミオン的対称性でそれは以下の変換での作用の不変性で表わされる。

$$\begin{gathered} \delta\chi_\alpha = i\rho_\alpha\eta \\ \delta e^a_\alpha = \delta\psi^\mu = \delta X^\mu = 0 \end{gathered} \tag{5.11}$$

ここでηは任意のMajorana Spinorである。

よってNSR型作用には全部で4つのボゾン的対称性；2次元座標付け替え変換不変性（2つ）、局所ローレンツ変換不変性（1つ）、局所的Weyl変換不変性（1つ）、と4つのフェルミオン的な対称性；局所的超対称変換不変性（2つ）、(5.11)の局所的な対称性（2つ）があることがわかる。ゲージを固定する際にそれらの対称性は使われ、4つのボゾン的対称性からzweibein e^a_αは通常、$e^a_\alpha = \delta^a_\alpha$と固定される。また4つのフェルミオン的な対称性からgravitino;χ_αは$\chi_\alpha = 0$と固定される。この様なゲージ固定をするとNSR型作用は大局的な超対称性を持つもとの作用(4.2)と一致する。そして運動方程式は

$$\begin{gathered} \partial^\alpha\partial_\alpha X^\mu = 0 \\ \rho^\alpha\partial_\alpha\psi^\mu = 0 \end{gathered} \tag{5.12}$$

になる。この方程式はe^a_αとχ_αの変分によって導かれる。

- Superspace and Supervierbein

大局的な超対称性の章では超場 $Y^{\mathcal{A}}$ と共変微分 D を使って、フェルミオンを含んだ作用 (4.2) を書き下すことができた。つまり

$$S=\frac{i}{4\pi}\int d^2\xi d^2\theta\bar{D}Y^{\mathcal{A}}DY_{\mathcal{A}}\rightarrow S'=-\frac{1}{2\pi}\int d^2\xi\left(\partial_\alpha X^{\mathcal{A}}\partial^\alpha X_{\mathcal{A}}-i\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\rho^\alpha\partial_\alpha\psi^{\mathcal{A}}-B^{\mathcal{A}}B_{\mathcal{A}}\right) \quad (5.13)$$

ここで $\mathcal{A}$ は時空のベクトル添え字を表わす。同様に局所的超対称性を持つ NSR 型作用も超場 $Y^{\mathcal{A}}$ を使って書き直すことができるだろうか。[10] [11] によると NSR 型作用は曲がった超空間 $Z^M=(\xi^m,\theta^\mu)$ と平らな超空間 $Z^A=(a,\alpha)$ を結び付ける Supervierbein E^A_M と超場 $Y^{\mathcal{A}}$ を使って以下の様に書くことが出来る。(以降、場の添え字は [10] の Notation を使う)

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{4\pi}\int d^2\xi d^2\theta E D_\alpha Y^{\mathcal{A}}D^\alpha Y_{\mathcal{A}} && (5.14)\\
\rightarrow S_{NSR} &= -\frac{1}{2\pi}\int d^2\xi e\left(g^{mn}\partial_m X^{\mathcal{A}}\partial_n X_{\mathcal{A}}+i\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\gamma^m\partial_m\psi_{\mathcal{A}}-B^{\mathcal{A}}B_{\mathcal{A}}\right.\\
&\qquad \left.-i\bar{\chi}_n\gamma^m\gamma^n\psi^{\mathcal{A}}\partial_m X_{\mathcal{A}}+\frac{1}{8}\bar{\psi}\psi\bar{\chi}^{\mathcal{A}}_m\gamma^n\gamma^m\chi_{n\mathcal{A}}\right) && (5.15)\\
\text{但し } D_\alpha &= E^M_\alpha\partial_M,\ E=\mathrm{sdet}\,E^A_M
\end{aligned}$$

$\mathrm{sdet}\,E^A_M$ は E^A_M の超行列式である。E^A_M は以下の様に定義されるものである [10]。

$$E^A_M=\begin{pmatrix} E^a_m & E^\alpha_m\\ E^a_\mu & E^\alpha_\mu\end{pmatrix} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}
E^a_m &= e^a_m+i\bar{\theta}\gamma^a\chi_m+\frac{i}{4}\bar{\theta}\theta e^a_m A\\
E^\alpha_m &= \frac{1}{2}\chi^\alpha_m+\frac{1}{2}\theta^\mu(\gamma_5)^\alpha_\mu\omega_m-\frac{1}{4}\theta^\mu(\gamma_m)^\alpha_\mu A-\frac{3i}{16}\bar{\theta}\theta\chi^\alpha_m A-\frac{1}{4}\bar{\theta}\theta(\gamma_m)^{\alpha\beta}\psi_\beta\\
E^a_\mu &= i\theta^\lambda(\gamma^a)_{\lambda\mu}\\
E^\alpha_\mu &= \delta^\alpha_\mu-\frac{i}{8}\bar{\theta}\theta\delta^\alpha_\mu A
\end{aligned}$$

ここで $\omega_m=e_{am}\epsilon^{n\ell}\partial_n e^a_\ell+\frac{1}{2}\bar{\chi}_m\gamma^n\chi_n$ は Spin 接続場を表わし、χ^α_m は Rarita-Schwinger 場、e^a_m は vierbein、を表わす。A は新しく導入された補助場（スカラー場）で NSR 型作用には現れない。(5.16) の成分はボゾン的な添え字 (m,a) を持つ成分とフェルミオン的な添え字 (μ,α) を持つ行列なので、この様な行列は超行列と呼ばれ、行列式は超行列式 [27] になる。一般的に超行列 M の超行列式はボゾン-ボゾン部分（以下 $B-B$ と略す）の行列式と M の逆行列のフェルミオン-フェルミオン（以下 $F-F$ と略す）部分の行列式の積で表わされる。式で書くと

$$M=\begin{pmatrix} B-B & B-F\\ F-B & F-F\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{sdet}M &= \det M_{bb}\det M^{-1}_{ff}=\det A\det^{-1}(D-CA^{-1}B) && (5.18)\\
&= \det^{-1}M^{-1}_{bb}\det^{-1}M_{ff}=\det(A-BD^{-1}C)\det^{-1}D
\end{aligned}$$

になる。これを (5.14) の $E = s\mathrm{det}E_M^A$ に適用すると

$$\begin{aligned} E = s\mathrm{det}\, E_M^A &= \det(A - BD^{-1}C)\det{}^{-1}D \\ &= \det(E_m^a - E_m^\alpha(E_\mu^\alpha)^{-1}E_\mu^a)\det(E_\mu^\alpha)^{-1} \end{aligned} \tag{5.19}$$

である。また、(5.14) の $D_\alpha = E_\alpha^M \partial_M$ を計算するために、E_M^A の逆行列を求める必要がある。超行列 M の逆行列は以下の様に書かれる [27]。

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} + D^{-1} \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

<u>(5.20) の証明</u>

まず M を以下の様な 2 つの行列 U と V に分ける。(但し、I は単位行列)

$$M = UV, \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & D \end{pmatrix}, \ V = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix}$$

この M の逆行列は次の様に計算される。

$$\begin{aligned} M^{-1} &= V^{-1}U^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} + D^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.21}$$

よって M の逆行列は (5.20) になる。

(5.20) を使うと E_M^A の逆行列 E_A^M は次のように書くことが出来る

$$E_A^M = \begin{pmatrix} E_a^m & E_a^\mu \\ E_\alpha^m & E_\alpha^\mu \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned} E_a^m &= E_m^a - E_m^\alpha(E_\mu^\alpha)^{-1}E_\mu^a)^{-1} \\ E_a^\mu &= -(E_m^a - E_m^\alpha(E_\mu^\alpha)^{-1}E_\mu^a)^{-1}E_m^\alpha(E_\mu^\alpha)^{-1} \\ E_\alpha^m &= -(E_\mu^\alpha)^{-1}E_\mu^a(E_m^a - E_m^\alpha(E_\mu^\alpha)^{-1}E_\mu^a)^{-1} \\ E_\alpha^\mu &= (E_\mu^\alpha)^{-1}E_\mu^a(E_m^a - E_m^\alpha(E_\mu^\alpha)^{-1}E_\mu^a)^{-1}E_m^\alpha(E_\mu^\alpha)^{-1} + (E_\mu^\alpha)^{-1} \end{aligned}$$

但し、この逆行列は $E_A^M E_M^B = \delta_A^B$ を満たす。これらの行列に現れるボゾン的な添え字を 2 つ持つ E_m^a の逆行列 $(E_m^a)^{-1}$ とフェルミオン的な添え字を 2 つ持つ E_μ^α の逆行列 $(E_\mu^\alpha)^{-1}$ は以下の様に計

算される。

$$(E^a_m)^{-1} = \frac{1}{\det E^a_m}\epsilon_{ab}\epsilon^{nm}E^b_n \tag{5.23}$$
$$(E^\alpha_\mu)^{-1} = \frac{1}{\det E^\alpha_\mu}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu}E^\beta_\nu \tag{5.24}$$

また E^a_m, E^α_μ の行列式は次のように計算される。

$$\det E^a_m = \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\epsilon^{mn}E^a_nE^b_m \tag{5.25}$$
$$\det E^\alpha_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu}E^\alpha_\mu E^\beta_\nu \tag{5.26}$$

以上の式を使って (5.14) を計算し、NSR 型作用を導いていく。(5.14) の計算では θ の積分があるため、前章で述べた理由により被積分関数の θ の 2 次の項しか積分後に残らない。よって最終的には θ の 2 次の項だけ見ていく。

- $E = s\det E^A_M$ の計算

まず最初に (5.14) の $E = s\det E^A_M$ を計算する。(5.19) からわかるように $s\det E^A_M$ は $\det(E^a_m - E^\alpha_m(E^\alpha_\mu)^{-1}E^a_\mu)$ と $\det(E^\alpha_\mu)^{-1}$ の積であるので、まず $\det(E^\alpha_\mu)^{-1}$ から計算していく。E^A_M の定義 (5.16) と (5.26) 式から

$$\begin{aligned}
E^\alpha_\mu &= \delta^\alpha_\mu - \frac{i}{8}\bar\theta\theta\delta^\alpha_\mu A \\
\det E^\alpha_\mu &= \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu}E^\alpha_\mu E^\beta_\nu \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu}(\delta^\alpha_\mu - \frac{i}{8}\bar\theta\theta\delta^\alpha_\mu A)(\delta^\beta_\nu - \frac{i}{8}\bar\theta\theta\delta^\beta_\nu A) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu}(\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu - \frac{2i}{8}\bar\theta\theta\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu A) \\
&= 1 - \frac{i}{4}\bar\theta\theta A \\
\text{ここで } \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu}\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu &= 2 \text{ を使った} \\
\text{よって } \det(E^\alpha_\mu)^{-1} &= (1 - \frac{i}{4}\bar\theta\theta A)^{-1} = 1 + \frac{i}{4}\bar\theta\theta A
\end{aligned} \tag{5.27}$$

次に $\det(E^a_m - E^\alpha_m(E^\alpha_\mu)^{-1}E^a_\mu)$ を計算する。まず計算をわかりやすくするため、

$$E^\alpha_m(E^\alpha_\mu)^{-1}E^a_\mu \equiv F^a_m \tag{5.28}$$

とおく。ボゾン的な添え字を持つ行列式の定義 (5.25) を使って $\det(E^a_m - F^a_m)$ を計算すると次式の様になる。

$$\begin{aligned}
\det(E^a_m - F^a_m) &= \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\epsilon^{nm}(E^a_m - F^a_m)(E^b_n - F^b_n) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\epsilon^{nm}E^a_mE^b_n + \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\epsilon^{nm}F^a_mF^b_n - \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\epsilon^{nm}(E^a_mF^b_n + F^a_mE^b_n) \\
&= \det E^a_m + \det F^b_m - \epsilon^{nm}\epsilon_{ab}F^a_mE^b_n
\end{aligned} \tag{5.29}$$

まず、$\det E_m^a$ を計算する。$\det E_m^a$ の定義式 (5.16) と行列式の定義 (5.25) を使って以下の様に計算される。

$$
\begin{aligned}
E_m^a &= e_m^a + i\bar\theta\gamma^a\chi_m + \frac{i}{4}\bar\theta\theta e_m^a A \\
\det E_m^a &= \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\epsilon^{mn}\{e_n^a + i\bar\theta\gamma^a\chi_n + \frac{i}{4}\bar\theta\theta e_n^a A\}\{e_m^b + i\bar\theta\gamma^b\chi_m + \frac{i}{4}\bar\theta\theta e_m^b A\} \\
&= e + \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\epsilon^{mn}\{ie_n^a\bar\theta\gamma^b\chi_m + ie_m^b\bar\theta\gamma^a\chi_n\} \\
&\quad + \frac{i}{2}\epsilon_{ab}\epsilon^{mn}\bar\theta\gamma^a\chi_n i\bar\theta\gamma^b\chi_m + \frac{i}{4}\bar\theta\theta eA + \frac{i}{4}\bar\theta\theta eA \\
&= e + i\epsilon_{ab}\epsilon^{mn}e_n^a\bar\theta\gamma^b\chi_m - \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\epsilon^{mn}\bar\theta\gamma^a\chi_n\bar\theta\gamma^b\chi_m + \frac{i}{2}\bar\theta\theta eA
\end{aligned}
$$

Appendix C の公式 (C.17) から第二項目は

$$\epsilon_{ab}\epsilon^{mn}e_n^a = ee_b^m$$

を使って

$$i\epsilon_{ab}\epsilon^{mn}e_n^a\bar\theta\gamma^b\chi_m = ie\bar\theta\gamma^m\chi_m$$

と変形される。(C.16) から上式の第三項目は

$$-\frac{1}{2}\epsilon_{ab}\epsilon^{mn}(\bar\theta\gamma^a\chi_n)(\bar\theta\gamma^b\chi_m) = \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)\epsilon^{mn}\bar\chi_m\gamma_5\chi_n$$

になる。よって $\det E_m^a$ は以下の式になる。

$$\det E_m^a = e + ie\bar\theta\gamma^m\chi_m + \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)\epsilon^{mn}\bar\chi_m\gamma_5\chi_n + \frac{i}{2}\bar\theta\theta eA \tag{5.30}$$

次に (5.29) の $\det F_m^a$ を計算する。$F_m^a = E_m^\alpha(E_\mu^\alpha)^{-1}E_\mu^a$ だったので、F_m^a の中の $(E_\mu^\alpha)^{-1}$ を最初に求める。(5.24) と (5.27) を使うと

$$
\begin{aligned}
(E_\mu^\alpha)^{-1} &= \frac{1}{\det E_\mu^\alpha}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu}E_\nu^\beta \\
&= \frac{1}{\det E_\mu^\alpha}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu}(\delta_\nu^\beta - \frac{i}{8}\bar\theta\theta\delta_\nu^\beta A) \\
&= \frac{1}{\det E_\mu^\alpha}\underbrace{\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\mu\beta}}_{\delta_\alpha^\mu}(1 - \frac{i}{8}\bar\theta\theta A) \\
&= (1 + \frac{i}{4}\bar\theta\theta A)(1 - \frac{i}{8}\bar\theta\theta A)\delta_\alpha^\mu \\
&= (1 + \frac{i}{8}\bar\theta\theta A)\delta_\alpha^\mu
\end{aligned} \tag{5.31}
$$

よって F_m^a は以下の式になる。

$$
\begin{aligned}
F_m^a &= (1 + \frac{i}{8}\bar\theta\theta A)\delta_\alpha^\mu E_m^\alpha E_\mu^a \\
&= (1 + \frac{i}{8}\bar\theta\theta A)E_m^\mu E_\mu^a
\end{aligned} \tag{5.32}
$$

(5.32) の $E_m^\mu E_\mu^a$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
E_m^\mu E_\mu^a &= \left(\frac{1}{2}\chi_m^\mu + \frac{1}{2}\theta^\kappa(\gamma_5)_\kappa^\mu\omega_m - \frac{1}{4}\theta^\kappa(\gamma_m)_\kappa^\mu A - \frac{3i}{16}\bar\theta\theta\chi_m^\mu A - \frac{1}{4}\bar\theta\theta(\gamma_m)^{\mu\beta}\psi_\beta\right) i\theta^\lambda(\gamma^a)_{\lambda\mu} \\
&= \frac{i}{2}\chi_m^\mu\theta^\lambda(\gamma^a)_{\lambda\mu} + \frac{i}{2}\theta^\kappa\theta^\lambda(\gamma^a)_{\lambda\mu}(\gamma_5)_\kappa^\mu\omega_m - \frac{Ai}{4}\theta^\kappa\theta^\lambda(\gamma_m)_\kappa^\mu(\gamma^a)_{\lambda\mu} \qquad (5.33)
\end{aligned}
$$

(5.33) の第一項目は

$$
\begin{aligned}
\frac{i}{2}\chi_m^\mu\theta^\lambda(\gamma^a)_{\lambda\mu} &= -\frac{i}{2}\theta^\lambda(\gamma^a)_{\lambda\mu}\chi_m^\mu \\
&= -\frac{i}{2}\theta^\lambda(\gamma^a)_\lambda^\nu\epsilon_{\nu\mu}\chi_m^\mu \\
&= +\frac{i}{2}\theta^\lambda(\gamma^a)_\lambda^\nu\chi_{m\nu} \\
&= \frac{i}{2}\bar\theta(\gamma^a)\chi_m \qquad (5.34)
\end{aligned}
$$

(5.33) の第二項目は Fierz 関係式を使って

$$
\begin{aligned}
\frac{i}{2}\theta^\kappa\theta^\lambda(\gamma^a)_{\lambda\mu}(\gamma_5)_\kappa^\mu\omega_m &= -\frac{i}{4}\bar\theta\theta\epsilon^{\kappa\lambda}(\gamma^a)_{\lambda\mu}(\gamma_5)_\kappa^\mu\omega_m \\
&= -\frac{i}{4}\bar\theta\theta\epsilon^{\kappa\lambda}(\gamma^a)_\mu^\rho\epsilon_{\rho\lambda}(\gamma_5)_\kappa^\mu\omega_m \\
&= -\frac{i}{4}\bar\theta\theta\underbrace{\epsilon^{\kappa\lambda}\epsilon_{\rho\lambda}}_{\delta_\rho^\kappa}(\gamma^a)_\mu^\rho(\gamma_5)_\kappa^\mu\omega_m \\
&= -\frac{i}{4}\bar\theta\theta\underbrace{(\gamma^a\gamma_5)_\mu^\mu}_{=0}\omega_m = 0 \qquad (5.35)
\end{aligned}
$$

(5.33) の第三項目も同様にして

$$
\begin{aligned}
-\frac{Ai}{4}\theta^\kappa\theta^\lambda(\gamma_m)_\kappa^\mu(\gamma^a)_{\lambda\mu} &= \frac{Ai}{8}\bar\theta\theta\epsilon^{\kappa\lambda}(\gamma_m)_\kappa^\mu(\gamma^a)_{\lambda\mu} \\
\epsilon^{\kappa\lambda}(\gamma_m)_\kappa^\mu(\gamma^a)_{\lambda\mu} &= \epsilon^{\kappa\lambda}(e_m^b\gamma_b)_\kappa^\mu(\gamma^a)_\lambda^\rho\epsilon_{\rho\mu} \\
&= e_m^b(\gamma_b\gamma^a)_\mu^\mu = e_{mb}(\gamma^b\gamma^a)_\mu^\mu \\
&= e_{mb}(\eta^{ba}1 - \epsilon^{ba}\gamma_5)_\mu^\mu = 2e_{mb}\eta^{ba} = 2e_m^a \\
\text{よって } -\frac{Ai}{4}\theta^\kappa\theta^\lambda(\gamma_m)_\kappa^\mu(\gamma^a)_{\lambda\mu} &= \frac{Ai}{4}\bar\theta\theta e_m^a \qquad (5.36)
\end{aligned}
$$

(5.34)、(5.35)、(5.36) から F_m^a は

$$
\begin{aligned}
F_m^a &= \left(1 + \frac{i}{8}\bar\theta\theta A\right)\left(\frac{i}{2}\bar\theta\gamma^a\chi_m + \frac{Ai}{4}\bar\theta\theta e_m^a\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(\bar\theta\gamma^a\chi_m + \frac{A}{2}\bar\theta\theta e_m^a\right) \qquad (5.37)
\end{aligned}
$$

になる。これで $\det F_m^a$ を計算する準備が整った。(5.25) と Appendix C の公式 (C.16) を使って

$$
\begin{aligned}
\det F_m^a &= \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\epsilon^{mn}F_n^aF_m^b \\
&= -\frac{1}{8}\epsilon_{ab}\epsilon^{mn}\left(\bar\theta\gamma^a\chi_n\right)\left(\bar\theta\gamma^b\chi_m\right) \\
&= \frac{1}{8}\bar\theta\theta\epsilon^{mn}\bar\chi_m\gamma_5\chi_n \qquad (5.38)
\end{aligned}
$$

以上で $\mathrm{sdet}E_M^A$ の計算で必要な $\det(E_m^a - E_m^\alpha(E_\mu^\alpha)^{-1}E_\mu^a) \equiv \det(E_m^a - F_m^a)$(5.29) の $\det E_m^a$ と $\det F_m^a$ が求まった。次に (5.29) の中の $\epsilon^{nm}\epsilon_{ab}F_m^a E_n^b$ を計算していく。

$$\begin{aligned}
\epsilon^{nm}\epsilon_{ab}F_m^a E_n^b &= \frac{i}{2}\epsilon^{nm}\epsilon_{ab}\left(\bar\theta\gamma^a\chi_m + \frac{A}{2}\bar\theta\theta e_m^a\right)\left(e_n^b + i\bar\theta\gamma^b\chi_n\right) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon^{nm}\epsilon_{ab}\left(e_n^b\bar\theta\gamma^a\chi_m + i\bar\theta\gamma^a\chi_m\bar\theta\gamma^b\chi_n + \frac{A}{2}\bar\theta\theta e_m^a e_n^b\right) \\
&= \frac{i}{2}\left\{\underbrace{\epsilon^{nm}\epsilon_{ab}e_n^b}_{=ee_a^m}\bar\theta\gamma^a\chi_m + i\underbrace{\epsilon^{nm}\epsilon_{ab}\bar\theta\gamma^a\chi_m\bar\theta\gamma^b\chi_n}_{=-\bar\theta\theta\epsilon^{mn}\bar\chi_m\gamma_5\chi_n} + Ae\bar\theta\theta\right\} \\
&= \frac{i}{2}\left\{e\bar\theta\gamma^m\chi_m + \bar\theta\theta(-i\epsilon^{mn}\bar\chi_m\gamma_5\chi_n + Ae)\right\} \qquad (5.39)
\end{aligned}$$

ただし、3つ目の等式で Appendix C の (C.17) を使った。以上で $\det(E_m^a - F_m^a)$ の全ての項の計算ができた。まとめると (5.30)、(5.38)、(5.39) より

$$\begin{aligned}
\det(E_m^a - F_m^a) &= \det E_m^a + \det F_m^a - \epsilon^{nm}\epsilon_{ab}F_m^a E_n^b \\
&= e + ie\bar\theta\gamma^m\chi_m + \frac{1}{2}\bar\theta\theta(\epsilon^{mn}\bar\chi_m\gamma_5\chi_n + ieA) \\
&\quad + \frac{1}{8}\bar\theta\theta\epsilon^{mn}\bar\chi_m\gamma_5\chi_n \\
&\quad - \frac{i}{2}\left\{e\bar\theta\gamma^m\chi_m + \bar\theta\theta(-i\epsilon^{mn}\bar\chi_m\gamma_5\chi_n + Ae)\right\} \\
&= e + \frac{i}{2}e\bar\theta\gamma^m\chi_m + \frac{1}{8}\epsilon^{mn}\bar\theta\theta\bar\chi_m\gamma_5\chi_n \qquad (5.40)
\end{aligned}$$

これで $E = s\det E_M^A$ を計算する準備が全て整ったので、E は (5.19)、(5.27)、(5.40) を使って以下の様に計算される。

$$\begin{aligned}
E = s\det E_M^A &= \det(E_m^a - F_m^a)\det(E_\mu^\alpha)^{-1} \\
&= \left(e + \frac{i}{2}e\bar\theta\gamma^m\chi_m + \frac{1}{8}\bar\theta\theta\epsilon^{mn}\bar\chi_m\gamma_5\chi_n\right)\left(1 + \frac{i}{4}\bar\theta\theta A\right) \\
&= e + \frac{i}{2}e\bar\theta\gamma^m\chi_m + \frac{1}{8}\bar\theta\theta\epsilon^{mn}\bar\chi_m\gamma_5\chi_n + \frac{i}{4}e\bar\theta\theta A \\
&= e + \frac{i}{2}e\bar\theta\gamma^m\chi_m + \frac{1}{4}\bar\theta\theta\left(\frac{1}{2}\epsilon^{mn}\bar\chi_m\gamma_5\chi_n + ieA\right) \qquad (5.41)
\end{aligned}$$

以上で作用 (5.14) の中の E の計算が終わった。次に $D_\alpha = E_\alpha^M\partial_M$ の計算に取り組んでいく。

- $D_\alpha = E_\alpha^M\partial_M$ の計算

作用 (5.14) の $D_\alpha Y^{\mathcal{A}} = E_\alpha^M\partial_M Y^{\mathcal{A}}$ を計算するのにまず、E_α^M を求める必要がある。これから求める式を具体的に書くと、E_M^A の逆行列の式 (5.22) を使って以下の様に書くことが出来る。

$$D_\alpha Y^{\mathcal{A}} = E_\alpha^M\partial_M Y^{\mathcal{A}} = (E_\alpha^m\partial_m + E_\alpha^\mu\partial_\mu)Y^{\mathcal{A}} \qquad (5.42)$$

$$E_\alpha^m = -(E_\mu^\alpha)^{-1}E_\mu^a(E_m^a - E_m^\alpha(E_\mu^\alpha)^{-1}E_\mu^a)^{-1} \qquad (5.43)$$

$$E_\alpha^\mu = (E_\mu^\alpha)^{-1}E_\mu^a(E_m^a - E_m^\alpha(E_\mu^\alpha)^{-1}E_\mu^a)^{-1}E_m^\alpha(E_\mu^\alpha)^{-1} + (E_\mu^\alpha)^{-1} \qquad (5.44)$$

最初に (5.43) の $(E^a_m - E^\alpha_m(E^\alpha_\mu)^{-1}E^a_\mu)^{-1}$ を計算していく。前の計算で $E^\alpha_m(E^\alpha_\mu)^{-1}E^a_\mu \equiv F^a_m$ とおいていたのでそれを使う。逆行列の定義 (5.23) から

$$(E^a_m - F^a_m)^{-1} = \frac{1}{\det(E^a_m - F^a_m)}\epsilon_{ab}\epsilon^{nm}(E^b_n - F^b_n) \tag{5.45}$$

この式の $\det(E^a_m - F^a_m)$ は (5.40) により求まっているので

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\det(E^a_m - F^a_m)} &= \frac{1}{e}\left(1 + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^m\chi_m + \frac{1}{8e}\epsilon^{mn}\bar{\theta}\theta\bar{\chi}_m\gamma_5\chi_n\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{e}\left(1 - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^m\chi_m - \frac{1}{8e}\epsilon^{mn}\bar{\theta}\theta\bar{\chi}_m\gamma_5\chi_n - \frac{1}{4}\bar{\theta}\gamma^m\chi_n\bar{\theta}\gamma^m\chi_m\right) \\
\bar{\theta}\gamma^m\chi_n\bar{\theta}\gamma^m\chi_m &= \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\bar{\chi}_m\gamma^m\gamma^n\chi_n \\
&= \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\bar{\chi}_m\left(g^{mn} - \frac{1}{e}\epsilon^{mn}\gamma_5\right)\chi_n \text{ を使うと} \\
\frac{1}{\det(E^a_m - F^a_m)} &= \frac{1}{e}\left(1 - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^m\chi_m - \frac{1}{8e}\epsilon^{mn}\bar{\theta}\theta\bar{\chi}_m\gamma_5\chi_n - \frac{1}{8}\bar{\theta}\theta\bar{\chi}_m\left(g^{mn} - \frac{1}{e}\epsilon^{mn}\gamma_5\right)\chi_n\right) \\
&= \frac{1}{e}\left(1 - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^m\chi_m - \frac{1}{8}\bar{\theta}\theta g^{mn}\bar{\chi}_m\chi_n\right)
\end{aligned} \tag{5.46}$$

となる。次に (5.45) の $\epsilon_{ab}\epsilon^{nm}(E^b_n - F^b_n)$ を求めたい。F^b_n は (5.37) から求まっているので $(E^b_n - F^b_n)$ は

$$\begin{aligned}
E^b_n - F^b_n &= e^b_n + i\bar{\theta}\gamma^b\chi_n + \frac{i}{4}\bar{\theta}\theta e^b_n A - \frac{i}{2}\left(\bar{\theta}\gamma^b\chi_n + \frac{A}{2}\bar{\theta}\theta e^b_n\right) \\
&= e^b_n + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^b\chi_n
\end{aligned}$$

よって $\epsilon_{ab}\epsilon^{nm}(E^b_n - F^b_n)$ は Appendix C の (C.14),(C.17) を使って以下の様に計算される。

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ab}\epsilon^{nm}(E^b_n - F^b_n) &= \epsilon_{ab}\epsilon^{nm}\left\{e^b_n + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^b\chi_n\right\} \\
(\epsilon_{ab}\epsilon^{nm}e^b_n &= ee^m_a \quad \epsilon_{ab}\gamma^b = \gamma_a\gamma_5) \text{ を使って} \\
&= ee^m_a + \frac{i}{2}\epsilon^{nm}\bar{\theta}\gamma_a\gamma_5\chi_n
\end{aligned} \tag{5.47}$$

(5.46)、(5.47) から $(E^a_m - F^a_m)^{-1}$ は

$$\begin{aligned}
(E^a_m - F^a_m)^{-1} &= \frac{1}{\det(E^a_m - F^a_m)}\epsilon_{ab}\epsilon^{nm}(E^b_n - F^b_n) \\
&= \frac{1}{e}\left(1 - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^{m'}\chi_{m'} - \frac{1}{8}\bar{\theta}\theta g^{m'n'}\bar{\chi}_{m'}\chi_{n'}\right)\left(ee^m_a + \frac{i}{2}\epsilon^{nm}\bar{\theta}\gamma_a\gamma_5\chi_n\right) \\
&= \frac{1}{e}\left\{ee^m_a + \frac{i}{2}\epsilon^{nm}\bar{\theta}\gamma_a\gamma_5\chi_n - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^{m'}\chi_{m'}ee^m_a\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{4}\epsilon^{nm}\bar{\theta}\gamma^{m'}\chi_{m'}\bar{\theta}\gamma_a\gamma_5\chi_n - \frac{1}{8}\bar{\theta}\theta g^{m'n'}\bar{\chi}_{m'}\chi_{n'}ee^m_a\right\}
\end{aligned}$$

第四項目の $\bar{\theta}\gamma^{m'}\chi_{m'}\bar{\theta}\gamma_a\gamma_5\chi_n$ は

$$\bar{\theta}\gamma^{m'}\chi_{m'}\bar{\theta}\gamma_a\gamma_5\chi_n = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\overline{\gamma_a\gamma_5\chi_n}\gamma^{m'}\chi_{m'}$$

となり、よって $(E^a_m - F^a_m)^{-1}$ は

$$\begin{aligned}(E^a_m - F^a_m)^{-1} &= e^m_a + \frac{i}{2e}\{\epsilon^{nm}\bar\theta\gamma_a\gamma_5\chi_n - \bar\theta\gamma^{m'}\chi_{m'}ee^m_a\} \\ &\quad +\frac{1}{8e}\bar\theta\theta\{\epsilon^{nm}\epsilon_{ab}\bar\chi_n\gamma^b\gamma^{m'}\chi_{m'} - eg^{m'n'}\bar\chi_{m'}\chi_{n'}e^m_a\} \qquad (5.48)\end{aligned}$$

と求まる。以上で $E^m_\alpha = -(E^\alpha_\mu)^{-1}E^a_\mu(E^a_m - F^a_m)^{-1}$ の $(E^a_m - F^a_m)^{-1}$ の部分が計算出来たので、E^m_α 全体を求めていく。$(E^\alpha_\mu)^{-1}$ は (5.31) で求めているので $(E^\alpha_\mu)^{-1}E^a_\mu$ は

$$\begin{aligned}(E^\alpha_\mu)^{-1}E^a_\mu &= (1+\frac{i}{8}\bar\theta\theta A)\delta^\mu_\alpha i\theta^\lambda(\gamma^a)_{\lambda\mu} \\ &= i\theta^\lambda(\gamma^a)_{\lambda\alpha}\end{aligned}$$

よって $E^m_\alpha = -(E^\alpha_\mu)^{-1}E^a_\mu(E^a_m - F^a_m)^{-1}$ は

$$\begin{aligned}E^m_\alpha &= -(E^\alpha_\mu)^{-1}E^a_\mu(E^a_m - F^a_m)^{-1} \\ &= -i\theta^\lambda(\gamma^a)_{\lambda\alpha}(e^m_a + \frac{i}{2e}\{\epsilon^{nm}\bar\theta\gamma_a\gamma_5\chi_n - \bar\theta\gamma^{m'}\chi_{m'}ee^m_a\} \\ &\quad +\frac{1}{8e}\bar\theta\theta\{\epsilon^{nm}\epsilon_{ab}\bar\chi_n\gamma^b\gamma^{m'}\chi_{m'} - eg^{m'n'}\bar\chi_{m'}\chi_{n'}e^m_a\}) \\ &= -i\theta^\lambda(\gamma^a)_{\lambda\alpha}(e^m_a + \frac{i}{2e}\{\epsilon^{nm}\bar\theta\gamma_a\gamma_5\chi_n - \bar\theta\gamma^{m'}\chi_{m'}ee^m_a\})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{二項目}\ \theta^\lambda(\gamma^a)_{\lambda\alpha}\bar\theta\gamma_a\gamma_5\chi_n &= \theta^\lambda(\gamma^a)_{\lambda\alpha}\theta^\rho(\gamma_a\gamma_5\chi_n)_\rho = -\frac{1}{2}\bar\theta\theta(\overline{\gamma_a\gamma_5\chi_n}\gamma^a)_\alpha \\ &= -\frac{1}{2}\bar\theta\theta(\overline{\chi_n}\gamma_5\underbrace{\gamma_a\gamma^a}_{=2})_\alpha = -\bar\theta\theta(\overline{\chi_n}\gamma_5)_\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{三項目}\ \theta^\lambda(\gamma^a)_{\lambda\alpha}\bar\theta\gamma^{m'}\chi_{m'}ee^m_a &= -\frac{1}{2}\bar\theta\theta(\overline{\gamma^{m'}\chi_{m'}}\gamma^a)_\alpha ee^m_a \\ &= \frac{1}{2}\bar\theta\theta(\overline{\chi_{m'}}\gamma^{m'}\gamma^m)_\alpha e \\ \to E^m_\alpha &= -(i\theta^\lambda(\gamma^m)_{\lambda\alpha} + \frac{1}{2e}\bar\theta\theta\epsilon^{nm}(\overline{\chi_n}\gamma_5)_\alpha + \frac{1}{4}\bar\theta\theta(\overline{\chi_{m'}}\gamma^{m'}\gamma^m)_\alpha)\end{aligned}$$

更に二項目と三項目は次式のようにまとめられる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2e}\bar\theta\theta(\overline{\chi_n}\gamma_5)_\alpha + \frac{1}{4}\bar\theta\theta(\overline{\chi_{m'}}\gamma^{m'}\gamma^m)_\alpha &= \frac{1}{2e}\bar\theta\theta\epsilon^{nm}(\overline{\chi_n}\gamma_5)_\alpha + \frac{1}{4}\bar\theta\theta g^{m'm}(\overline{\chi_{m'}})_\alpha - \frac{1}{4e}\bar\theta\theta\epsilon^{m'm}(\overline{\chi_{m'}}\gamma_5)_\alpha \\ &= \frac{1}{4e}\bar\theta\theta\epsilon^{nm}(\overline{\chi_n}\gamma_5)_\alpha + \frac{1}{4}\bar\theta\theta g^{nm}(\overline{\chi_n})_\alpha \\ &= \frac{1}{4}\bar\theta\theta(\overline{\chi_n}\{g^{mn} - \frac{1}{e}\epsilon^{mn}\gamma_5\})_\alpha = \frac{1}{4}\bar\theta\theta(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)_\alpha \\ \text{よって}\ E^m_\alpha &= -i\theta^\lambda(\gamma^m)_{\lambda\alpha} - \frac{1}{4}\bar\theta\theta(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)_\alpha \qquad (5.49)\end{aligned}$$

次に (5.44) の $E^\mu_\alpha = (E^\alpha_\nu)^{-1}E^a_\nu(E^a_m - F^a_m)^{-1}E^\beta_m(E^\beta_\mu)^{-1} + (E^\alpha_\mu)^{-1}$ の計算に移る。まず第一項目だが、$(E^\alpha_\mu)^{-1}E^a_\mu(E^a_m - F^a_m)^{-1}(= -E^m_\alpha)$ の部分は計算してきた部分なので (5.49) 式が使える。また

$(E_\mu^\alpha)^{-1}$ も (5.31) で計算したのでそれが使える。よって E_α^μ の第一項目は次式の様に計算される。

$$\begin{aligned}
(E_\nu^\alpha)^{-1}E_\nu^a(E_m^a - F_m^a)^{-1}E_m^\beta(E_\mu^\beta)^{-1} &= (-E_\alpha^m)E_m^\beta(1+\frac{i}{8}\bar\theta\theta A)\delta_\beta^\mu \\
&\quad (E_\alpha^m \text{には}\theta\text{ の 1 次以上の項しか含まれていないので}) \\
&= (-E_\alpha^m)E_m^\beta\delta_\beta^\mu \\
&= (i\theta^\lambda(\gamma^m)_{\lambda\alpha} + \frac{1}{4}\bar\theta\theta(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)_\alpha) \\
&\quad \times(\frac{1}{2}\chi_m^\mu + \frac{1}{2}\theta^\nu(\gamma_5)_\nu^\mu\omega_m - \frac{1}{4}\theta^\nu(\gamma_m)_\nu^\mu A) \\
&= \frac{1}{2}i\theta^\lambda(\gamma^m)_{\lambda\alpha}\chi_m^\mu + \frac{1}{2}i\theta^\lambda\theta^\nu(\gamma^m)_{\lambda\alpha}(\gamma_5)_\nu^\mu\omega_m \\
&\quad -\frac{1}{4}i\theta^\lambda\theta^\nu(\gamma^m)_{\lambda\alpha}(\gamma_m)_\nu^\mu A + \frac{1}{8}\bar\theta\theta(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)_\alpha\chi_m^\mu \\
&= \frac{1}{8}(4i\theta^\lambda(\gamma^m)_{\lambda\alpha}\chi_m^\mu + \bar\theta\theta\{-2i\epsilon^{\lambda\nu}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}(\gamma_5)_\nu^\mu\omega_m \\
&\quad +i\epsilon^{\lambda\nu}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}(\gamma_m)_\nu^\mu A + (\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)_\alpha\chi_m^\mu\})
\end{aligned}$$

よって E_α^μ は

$$\begin{aligned}
E_\alpha^\mu &= (E_\nu^\alpha)^{-1}E_\nu^a(E_m^a - F_m^a)^{-1}E_m^\beta(E_\mu^\beta)^{-1} + (E_\mu^\alpha)^{-1} \\
&= \frac{1}{8}(4i\theta^\lambda(\gamma^m)_{\lambda\alpha}\chi_m^\mu + \bar\theta\theta\{-2i\epsilon^{\lambda\nu}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}(\gamma_5)_\nu^\mu\omega_m + i\epsilon^{\lambda\nu}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}(\gamma_m)_\nu^\mu A + (\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)_\alpha\chi_m^\mu\}) \\
&\quad +(1+\frac{i}{8}\bar\theta\theta A)\delta_\alpha^\mu
\end{aligned} \tag{5.50}$$

これで E_α^m、E_α^μ が求まったので (5.42) を計算する準備が整った。まず最初に

$$D_\alpha Y^{\mathcal{A}} = E_\alpha^M\partial_M Y^{\mathcal{A}} = (E_\alpha^m\partial_m + E_\alpha^\mu\partial_\mu)Y^{\mathcal{A}}$$

の $\partial_\mu Y^{\mathcal{A}}$ 部分を計算する。

$$\partial_\mu Y^{\mathcal{A}} = \frac{\partial}{\partial\theta^\mu}(X^{\mathcal{A}} + i\bar\theta\psi^{\mathcal{A}} + \frac{i}{2}\bar\theta\theta B^{\mathcal{A}})$$

この θ^μ の微分は

$$\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial\theta^\mu}\theta^\rho\psi_\rho^{\mathcal{A}} = \delta_\mu^\rho\psi^{\mathcal{A}} = \psi_\mu^{\mathcal{A}} \\
\frac{\partial}{\partial\theta^\mu}\bar\theta\theta = \epsilon_{\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta^\mu}\theta^\gamma\theta^\rho = \epsilon_{\rho\gamma}(\delta_\mu^\gamma\theta^\rho - \theta^\gamma\delta_\mu^\rho) \\
= \epsilon_{\rho\mu}\theta^\rho - \theta^\gamma\epsilon_{\mu\gamma} = 2\theta_\mu
\end{cases} \tag{5.51}$$

なので $\partial_\mu Y^{\mathcal{A}}$ は以下の式になる。

$$\partial_\mu Y^{\mathcal{A}} = i\psi_\mu^{\mathcal{A}} + i\theta_\mu B^{\mathcal{A}} \tag{5.52}$$

(5.52) を使い、E_α^m(5.49) と E_α^μ(5.50) を代入すると $D_\alpha Y^{\mathcal{A}}$ は以下の様に計算される。

$$D_\alpha Y^{\mathcal{A}} = E_\alpha^m\partial_m Y^{\mathcal{A}} + E_\alpha^\mu\partial_\mu Y^{\mathcal{A}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{-i\theta^{\lambda}(\gamma^m)_{\lambda\alpha} - \frac{1}{4}\bar{\theta}\theta(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)_{\alpha}\}(\partial_m X^{\mathcal{A}} + i\bar{\theta}\partial_m\psi^{\mathcal{A}}) \\
&+ \frac{1}{8}\{(4i\theta^{\lambda}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}\chi_m^{\mu} + \bar{\theta}\theta\{-2i\epsilon^{\lambda\nu}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}(\gamma_5)_{\nu}^{\mu}\omega_m + i\epsilon^{\lambda\nu}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}(\gamma_m)_{\nu}^{\mu}A \\
&\quad +(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)_{\alpha}\chi_m^{\mu}\}) + (1 + \frac{i}{8}\bar{\theta}\theta A)\delta_{\alpha}^{\mu}\}(i\psi_{\mu}^{\mathcal{A}} + i\theta_{\mu}B^{\mathcal{A}}) \\
&= \{-i\theta^{\lambda}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}\partial_m X^{\mathcal{A}} + \theta^{\lambda}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}\bar{\theta}\partial_m\psi^{\mathcal{A}} - \frac{1}{4}\bar{\theta}\theta(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)_{\alpha}\partial_m X^{\mathcal{A}}\} \\
&\quad + \Big\{i\delta_{\alpha}^{\mu}\psi_{\mu}^{\mathcal{A}} + i\delta_{\alpha}^{\mu}\theta_{\mu}B^{\mathcal{A}} - \frac{1}{2}\theta^{\lambda}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}\chi_m^{\mu}\psi_{\mu}^{\mathcal{A}} - \frac{1}{2}\theta^{\lambda}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}\chi_m^{\mu}\theta_{\mu}B^{\mathcal{A}} \\
&\quad + \frac{i}{8}\bar{\theta}\theta\{-2i\epsilon^{\lambda\nu}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}(\gamma_5)_{\nu}^{\mu}\omega_m + i\epsilon^{\lambda\nu}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}(\gamma_m)_{\nu}^{\mu}A + \\
&\quad +(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)_{\alpha}\chi_m^{\mu} + iA\delta_{\alpha}^{\mu}\}\psi_{\mu}^{\mathcal{A}}\Big\}
\end{aligned}
$$

第二項目

$$
\begin{aligned}
\theta^{\lambda}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}\bar{\theta}\partial_m\psi^{\mathcal{A}} &= \theta^{\lambda}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}\theta^{\rho}(\partial_m\psi^{\mathcal{A}})_{\rho} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\rho}\bar{\theta}\theta(\gamma^m)_{\lambda\alpha}(\partial_m\psi^{\mathcal{A}})_{\rho} \\
&= -\frac{1}{2}\bar{\theta}\theta(\overline{\partial_m\psi^{\mathcal{A}}}\gamma^m)_{\alpha}
\end{aligned}
$$

第七項目

$$
-\frac{1}{2}\theta^{\lambda}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}\chi_m^{\mu}\theta_{\mu}B^{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2}\theta^{\lambda}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}\theta^{\mu}\chi_{m\mu}B^{\mathcal{A}} = \frac{1}{4}\bar{\theta}\theta(\overline{\chi}_m\gamma^m)_{\alpha}B^{\mathcal{A}}
$$

第八項目

$$
\epsilon^{\lambda\nu}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}(\gamma_5)_{\nu}^{\mu}\omega_m\psi_{\mu}^{\mathcal{A}} = -(\gamma^m)_{\alpha}^{\nu}(\gamma_5\psi^{\mathcal{A}})_{\nu}\omega_m = -(\gamma^m\gamma_5\psi^{\mathcal{A}})_{\alpha}\omega_m
$$

第九項目

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{\lambda\nu}(\gamma^m)_{\lambda\alpha}(\gamma_m)_{\nu}^{\mu}\psi_{\mu}^{\mathcal{A}} &= -(\gamma^m)_{\alpha}^{\nu}(\gamma_m)_{\nu}^{\mu}\psi_{\mu}^{\mathcal{A}} = -(\gamma^m\gamma_m\psi^{\mathcal{A}})_{\alpha} = -2\psi_{\alpha}^{\mathcal{A}} \\
\to D_{\alpha}Y^{\mathcal{A}} &= i\psi_{\alpha}^{\mathcal{A}} - i(\bar{\theta}\gamma^m)_{\alpha}\partial_m X^{\mathcal{A}} + iB^{\mathcal{A}}\theta_{\alpha} - \frac{1}{2}(\bar{\theta}\gamma^m)_{\alpha}\bar{\chi}_m\psi^{\mathcal{A}} \\
&+ \frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)\Big\{-4(\overline{\partial_m\psi^{\mathcal{A}}}\gamma^m)_{\alpha} - 2(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)_{\alpha}\partial_m X^{\mathcal{A}} + 2(\overline{\chi}_m\gamma^m)_{\alpha}B^{\mathcal{A}} \\
&\quad -2(\gamma^m\gamma_5\psi^{\mathcal{A}})_{\alpha}\omega_m + A\psi_{\alpha}^{\mathcal{A}} + i(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)_{\alpha}\overline{\chi}_m\psi^{\mathcal{A}}\Big\}
\end{aligned}
\tag{5.53}
$$

以上で作用 (5.14) の被積分関数 $ED_{\alpha}Y^{\mathcal{A}}D^{\alpha}Y_{\mathcal{A}}$ の計算の準備が出来た。(5.41) の E と (5.53) の $D_{\alpha}Y^{\mathcal{A}}$ を使って計算をする。(5.14) の積分では θ の 2 次の項しか残らないので 2 次の項だけ見ていく。(5.41) からわかる様に E は θ の 0 次、1 次、2 次の項を含むのでそれぞれ $E(0), E(1), E(2)$ と書く。$D_{\alpha}Y^{\mathcal{A}}$ も同様に (5.53) から θ の 0 次、1 次、2 次の項を含むのでそれぞれ $D_{\alpha}(0), D(1)_{\alpha}, D(2)_{\alpha}$ と書く。そうすると $ED_{\alpha}Y^{\mathcal{A}}D^{\alpha}Y_{\mathcal{A}}$ の θ の 2 次の項は次式の様になる。

$$
\begin{aligned}
ED_{\alpha}Y^{\mathcal{A}}D^{\alpha}Y_{\mathcal{A}}|_{\theta^2} &= \epsilon^{\alpha\beta}ED_{\alpha}Y^{\mathcal{A}}D_{\beta}Y_{\mathcal{A}}|_{\theta^2} \qquad (5.54) \\
&= \epsilon^{\alpha\beta}(E(0) + E(1) + E(2))(D(0)_{\alpha} + D(1)_{\alpha} + D(2)_{\alpha}) \\
&\quad \times(D(0)_{\beta} + D(1)_{\beta} + D(2)_{\beta})|_{\theta^2} \\
&= \epsilon^{\alpha\beta}\{E(0)\{2D(0)_{\alpha}D(2)_{\beta} + D(1)_{\alpha}D(1)_{\beta}\} \\
&\quad +2E(1)D(0)_{\alpha}D(1)_{\beta} + E(2)D(0)_{\alpha}D(0)_{\beta}\} \\
&= 2E(0)D(0)_{\alpha}D(2)^{\alpha} + E(0)D(1)_{\alpha}D(1)^{\alpha} \\
&\quad +2E(1)D(0)_{\alpha}D(1)^{\alpha} + E(2)D(0)_{\alpha}D(0)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

第一項目

$$\begin{aligned}2E(0)D(0)_\alpha D(2)^\alpha &= 2ei\psi^{\mathcal{A}}_\alpha\frac{1}{8}(\bar\theta\theta)\Big\{-4(\overline{\partial_m\psi_{\mathcal{A}}}\gamma^m)^\alpha-2(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)^\alpha\partial_m X_{\mathcal{A}}+2(\overline{\chi}_m\gamma^m)^\alpha B_{\mathcal{A}}\\&\quad -2(\gamma^m\gamma_5\psi_{\mathcal{A}})^\alpha\omega_m+A\psi^\alpha_{\mathcal{A}}+i(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)^\alpha\overline{\chi}_m\psi_{\mathcal{A}}\}\\&= \frac{ie}{4}(\bar\theta\theta)\{4\overline{\partial_m\psi_{\mathcal{A}}}\gamma^m\psi^{\mathcal{A}}+2(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n\psi^{\mathcal{A}})\partial_m X_{\mathcal{A}}-2(\overline{\chi}_m\gamma^m\psi^{\mathcal{A}})B_{\mathcal{A}}\\&\quad +2\underbrace{\overline{\gamma^m\gamma_5\psi_{\mathcal{A}}}}_{=\bar\psi_{\mathcal{A}}\gamma_5\gamma^m}\psi^{\mathcal{A}}\omega_m-A\bar\psi_{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{A}}-i(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)\psi^{\mathcal{A}}\overline{\chi}_m\psi_{\mathcal{A}}\}\end{aligned}\tag{5.55}$$

第二項目

$$\begin{aligned}E(0)D(1)_\alpha D(1)^\alpha &= e\{-i(\bar\theta\gamma^m)_\alpha\partial_m X^{\mathcal{A}}+iB^{\mathcal{A}}\theta_\alpha-\frac{1}{2}(\bar\theta\gamma^m)_\alpha\bar\chi_m\psi^{\mathcal{A}}\}\\&\quad\times\{-i(\bar\theta\gamma^n)^\alpha\partial_n X_{\mathcal{A}}+iB_{\mathcal{A}}\theta^\alpha-\frac{1}{2}(\bar\theta\gamma^n)^\alpha\bar\chi_n\psi_{\mathcal{A}}\}\\&= e\{-\{-B^2\bar\theta\theta-\partial_m X^{\mathcal{A}}B_{\mathcal{A}}\underbrace{(\bar\theta\gamma^m)_\alpha\theta^\alpha}_{①}+B^{\mathcal{A}}\partial_n X_{\mathcal{A}}\underbrace{\bar\theta\gamma^n\theta}_{②}\\&\quad+\underbrace{(\bar\theta\gamma^m)_\alpha\partial_m X^{\mathcal{A}}(\bar\theta\gamma^n)^\alpha\partial_n X_{\mathcal{A}}\}}_{③}\\&\quad+\frac{i}{2}(\bar\theta\gamma^n)^\alpha\{\underbrace{B^{\mathcal{A}}\theta_\alpha}_{④}-\underbrace{(\bar\theta\gamma^m)_\alpha\partial_m X^{\mathcal{A}}}_{⑤}\}\bar\chi_n\psi_{\mathcal{A}}\\&\quad-\frac{i}{2}(\bar\theta\gamma^m)_\alpha\bar\chi_m\psi^{\mathcal{A}}\{\underbrace{B_{\mathcal{A}}\theta^\alpha}_{⑥}-\underbrace{(\bar\theta\gamma^n)^\alpha\partial_n X_{\mathcal{A}}}_{⑦}\}\\&\quad+\frac{1}{4}\underbrace{(\bar\theta\gamma^m)_\alpha(\bar\theta\gamma^n)^\alpha}_{⑧}\bar\chi_m\psi^{\mathcal{A}}\bar\chi_n\psi_{\mathcal{A}}\}\end{aligned}$$

$$① \ (\bar\theta\gamma^m)_\alpha\theta^\alpha=\theta^\beta(\gamma^m)_{\beta\alpha}\theta^\alpha=-\frac{1}{2}(\bar\theta\theta)\epsilon^{\beta\alpha}(\gamma^m)_{\beta\alpha}=\frac{1}{2}(\bar\theta\theta)(\gamma^m)^\alpha_\alpha=0$$

同様に ② = ④の項 = ⑥の項 = 0

$$\begin{aligned}③ \ (\bar\theta\gamma^m)_\alpha\partial_m X^{\mathcal{A}}(\bar\theta\gamma^n)^\alpha\partial_n X_{\mathcal{A}} &= (\bar\theta\gamma^m)_\alpha(\bar\theta\gamma^n)^\alpha\partial_m X^{\mathcal{A}}\partial_n X_{\mathcal{A}}\\&= -\frac{1}{2}\epsilon^{\beta\rho}\bar\theta\theta(\gamma^m)_{\beta\alpha}(\gamma^n)^\alpha_\rho\partial_m X^{\mathcal{A}}\partial_n X_{\mathcal{A}}\\&= \frac{1}{2}\bar\theta\theta(\gamma^m\gamma^n)^\alpha_\alpha\partial_m X^{\mathcal{A}}\partial_n X_{\mathcal{A}}=\bar\theta\theta g^{mn}\partial_m X^{\mathcal{A}}\partial_n X_{\mathcal{A}}\end{aligned}$$

⑤、⑦、⑧の項も③と同様な変形ができる。よって $E(0)D(1)_\alpha D(1)^\alpha$ は

$$\begin{aligned}E(0)D(1)_\alpha D(1)^\alpha &= e\bar\theta\theta\{B^2-g^{mn}\partial_m X^{\mathcal{A}}\partial_n X_{\mathcal{A}}+\frac{i}{2}g^{mn}\partial_m X^{\mathcal{A}}\bar\chi_n\psi_{\mathcal{A}}\\&\quad+\frac{i}{2}g^{mn}\bar\chi_m\psi^{\mathcal{A}}\partial_n X_{\mathcal{A}}+\frac{1}{4}g^{mn}\underbrace{\bar\chi_m\psi^{\mathcal{A}}\bar\chi_n\psi_{\mathcal{A}}}_{=-\frac{1}{2}\bar\chi_m\chi_n\bar\psi_{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{A}}}\}\\&= e\bar\theta\theta\{B^2-g^{mn}\partial_m X^{\mathcal{A}}\partial_n X_{\mathcal{A}}+ig^{mn}\partial_m X^{\mathcal{A}}\bar\chi_n\psi_{\mathcal{A}}\\&\quad-\frac{1}{8}\bar\chi_m\chi_n\bar\psi_{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{A}}g^{mn}\}\end{aligned}\tag{5.56}$$

第三項目

$$
\begin{aligned}
2E(1)D(0)_\alpha D(1)^\alpha &= 2\{\frac{i}{2}e\bar{\theta}\gamma^n\chi_n\}i\psi^A_\alpha\{-i(\bar{\theta}\gamma^m)^\alpha\partial_m X_A + iB_A\theta^\alpha - \frac{1}{2}(\bar{\theta}\gamma^m)^\alpha\bar{\chi}_m\psi_A\} \\
&= -e\{+i\underbrace{(\bar{\theta}\gamma^n\chi_n)\bar{\theta}\gamma^m\psi^A}_{=\frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\bar{\psi}^A\gamma^m\gamma^n\chi_n}\partial_m X_A - iB_A\underbrace{(\bar{\theta}\gamma^n\chi_n)\bar{\theta}\psi^A}_{=-\frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\bar{\psi}^A\gamma^n\chi_n} \\
&\quad +\frac{1}{2}\underbrace{(\bar{\theta}\gamma^n\chi_n)(\bar{\theta}\gamma^m\psi^A)}_{=\frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\bar{\psi}^A\gamma^m\gamma^n\chi_n}\bar{\chi}_m\psi_A\} \\
&= -\frac{e}{2}\bar{\theta}\theta\{i\bar{\psi}^A\gamma^m\gamma^n\chi_n\partial_m X_A + iB_A\bar{\psi}^A\gamma^n\chi_n + \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\psi}^A\gamma^m\gamma^n\chi_n\bar{\chi}_m\psi_A}_{=-\frac{1}{2}\bar{\psi}^A\psi_A\bar{\chi}_m\gamma^m\gamma^n\chi_n}\} \\
&= -\frac{e}{2}\bar{\theta}\theta\{i\bar{\psi}^A\gamma^m\gamma^n\chi_n\partial_m X_A + iB_A\bar{\psi}^A\gamma^n\chi_n \\
&\quad -\frac{1}{4}\bar{\psi}^A\psi_A\bar{\chi}_m\gamma^m\gamma^n\chi_n\} \qquad (5.57)
\end{aligned}
$$

第四項目

$$
\begin{aligned}
E(2)D(0)_\alpha D(0)^\alpha &= \frac{1}{4}\bar{\theta}\theta\{\frac{1}{2}\epsilon^{mn}\bar{\chi}_m\gamma_5\chi_n + ieA\}(i\psi^A_\alpha)(i\psi^\alpha_A) \\
&= \frac{1}{4}\bar{\theta}\theta\{\frac{1}{2}\epsilon^{mn}\bar{\chi}_m\gamma_5\chi_n + ieA\}\bar{\psi}_A\psi^A \qquad (5.58)
\end{aligned}
$$

(5.55) から (5.58) までの式を使うと、作用 (5.14) の被積分関数 $ED_\alpha Y^A D^\alpha Y_A$ の θ の 2 次の項は以下の式で表わされる。

$$
\begin{aligned}
ED_\alpha Y^A D^\alpha Y_A|_{\theta^2} &= (\bar{\theta}\theta)\{\frac{ie}{4}\{4\overline{\partial_m\psi_A}\gamma^m\psi^A + 2(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n\psi^A)\partial_m X_A \underbrace{-2(\bar{\chi}_m\gamma^m\psi^A)B_A}_{①} \\
&\quad +2\bar{\psi}_A\gamma_5\gamma^m\psi^A\omega_m \underbrace{-A\bar{\psi}_A\psi^A}_{②} -i(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)\psi^A\bar{\chi}_m\psi_A\} \\
&\quad +e\{B^2 - g^{mn}\partial_m X^A\partial_n X_A + ig^{mn}\partial_m X^A\bar{\chi}_n\psi_A - \frac{1}{8}\bar{\chi}_m\chi_n\bar{\psi}_A\psi^A g^{mn}\} \\
&\quad -\frac{e}{2}\{i\bar{\psi}^A\gamma^m\gamma^n\chi_n\partial_m X_A + \underbrace{iB_A\bar{\psi}^A\gamma^n\chi_n}_{①} - \frac{1}{4}\bar{\psi}^A\psi_A\bar{\chi}_m\gamma^m\gamma^n\chi_n\} \\
&\quad +\frac{1}{4}\{\frac{1}{2}\epsilon^{mn}\bar{\chi}_m\gamma_5\chi_n + \underbrace{ieA}_{②}\}\bar{\psi}_A\psi^A\}
\end{aligned}
$$

同じ番号同士の項は打ち消しあって

$$
\begin{aligned}
&= (\bar{\theta}\theta)\{\frac{ie}{4}\{4\overline{\partial_m\psi_A}\gamma^m\psi^A + \underbrace{2(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n\psi^A)\partial_m X_A}_{③} \\
&\quad +2\bar{\psi}_A\gamma_5\gamma^m\psi^A\omega_m - \underbrace{i(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)\psi^A\bar{\chi}_m\psi_A}_{④}\} \\
&\quad +e\{B^2 - g^{mn}\partial_m X^A\partial_n X_A + \underbrace{ig^{mn}\partial_m X^A\bar{\chi}_n\psi_A}_{③} - \underbrace{\frac{1}{8}\bar{\chi}_m\chi_n\bar{\psi}_A\psi^A g^{mn}}_{④}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{e}{2}\{\underbrace{i\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\gamma^m\gamma^n\chi_n\partial_m X_{\mathcal{A}}}_{③}-\underbrace{\frac{1}{4}\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\psi_{\mathcal{A}}\bar{\chi}_m\gamma^m\gamma^n\chi_n\}}_{④}\\
&+\frac{1}{4}\{\underbrace{\frac{1}{2}\epsilon^{mn}\bar{\chi}_m\gamma_5\chi_n\}\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{A}}\}}_{④}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
③ &= \frac{ie}{2}(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n\psi^{\mathcal{A}})\partial_m X_{\mathcal{A}}+ieg^{mn}\partial_m X^{\mathcal{A}}\bar{\chi}_n\psi_{\mathcal{A}}-\frac{ei}{2}\underbrace{\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\gamma^m\gamma^n\chi_n}_{\overline{\chi_n}\gamma^n\gamma^m\psi^{\mathcal{A}}}\partial_m X_{\mathcal{A}}\\
&= \frac{ie}{2}(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n\psi^{\mathcal{A}})\partial_m X_{\mathcal{A}}+\frac{ie}{2}\overline{\chi_n}(2g^{nm}-\gamma^n\gamma^m)\psi^{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{A}}\\
&= ie\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n\psi^{\mathcal{A}}\partial_m X_{\mathcal{A}}\\
④ &= \frac{e}{8}\{2\underbrace{(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)\psi^{\mathcal{A}}\bar{\chi}_m\psi_{\mathcal{A}}}_{=-\frac{1}{2}\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{A}}\bar{\chi}_m\gamma^n\gamma^m\chi_n}-\bar{\chi}_m\chi_n\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{A}}g^{mn}+\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{A}}\bar{\chi}_m\gamma^m\gamma^n\chi_n\\
&\quad +\frac{1}{e}\epsilon^{mn}\bar{\chi}_m\gamma_5\chi_n\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{A}}\}\\
&= -\frac{e}{8}\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{A}}\bar{\chi}_m\gamma^n\gamma^m\chi_n\\
\to ED_\alpha Y^{\mathcal{A}}D^\alpha Y_{\mathcal{A}}|_{\theta^2} &= \bar{\theta}\theta\{-ie\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\gamma^m\partial_m\psi_{\mathcal{A}}+\frac{ie}{2}\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\gamma_5\gamma^m\psi^{\mathcal{A}}\omega_m\\
&\quad +e(B^2-g^{mn}\partial_m X^{\mathcal{A}}\partial_n X_{\mathcal{A}})\\
&\quad +ie\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n\psi^{\mathcal{A}}\partial_m X_{\mathcal{A}}-\frac{e}{8}\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{A}}\bar{\chi}_m\gamma^n\gamma^m\chi_n\}\\
&= e\bar{\theta}\theta\{-g^{mn}\partial_m X_{\mathcal{A}}\partial_n X^{\mathcal{A}}-i\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\gamma^m(\partial_m+\frac{1}{2}\gamma^m\gamma_5\omega_m)\psi^{\mathcal{A}}\\
&\quad +B^2+i\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n\psi_{\mathcal{A}}\partial_m X^{\mathcal{A}}-\frac{1}{8}\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{A}}\bar{\chi}_m\gamma^n\gamma^m\chi_n\}\\
&= -e\bar{\theta}\theta\{g^{mn}\partial_m X_{\mathcal{A}}\partial_n X^{\mathcal{A}}+i\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\gamma^m\nabla_m\psi^{\mathcal{A}}\\
&\quad -B^2-i\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n\psi_{\mathcal{A}}\partial_m X^{\mathcal{A}}+\frac{1}{8}\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{A}}\bar{\chi}_m\gamma^n\gamma^m\chi_n\} \qquad (5.59)\\
\nabla_m &\equiv \partial_m+\frac{1}{2}\gamma_5\omega_m
\end{aligned}
$$

以上により、作用 (5.14) の被積分関数 $ED_\alpha Y^{\mathcal{A}}D^\alpha Y_{\mathcal{A}}$ が計算できた。$\bar{\theta}\theta$ をグラスマン変数 θ で積分すると

$$\int d^2\theta\bar{\theta}\theta=-2\int d^2\theta\theta^1\theta^2=-2$$

なので、積分を実行すると目的のNSR型作用 (5.15) が導かれる。

$$
\begin{aligned}
S_{NSR} &= -\frac{1}{2\pi}\int d^2\xi e\Big(g^{mn}\partial_m X^{\mathcal{A}}\partial_n X_{\mathcal{A}}+i\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\gamma^m\partial_m\psi_{\mathcal{A}}-B^{\mathcal{A}}B_{\mathcal{A}}\\
&\quad -i\bar{\chi}_n\gamma^m\gamma^n\psi^{\mathcal{A}}\partial_m X_{\mathcal{A}}+\frac{1}{8}\bar{\psi}\psi\bar{\chi}^{\mathcal{A}}_m\gamma^n\gamma^m\chi_{n\mathcal{A}}\Big)
\end{aligned}
$$

但し、(5.59) では一般的に共変微分 ∇_m で書いたが、Majorana-フェルミオンの性質

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}\gamma^m\gamma_5\omega_m\psi &= \bar{\psi}\gamma_5\gamma^m\omega_m\psi\\
&= -\bar{\psi}\gamma^m\gamma_5\omega_m\psi \to \bar{\psi}\gamma^m\gamma_5\omega_m\psi=0
\end{aligned}
$$

により、共変微分 ∇_m はふつうの微分にしてよい。

6 Deformations of Schild Type String Action

3 章で述べた拡張された正準形式の理論はボゾン的な Schild 型作用を使って定式化されていた。我々はこの Schild 型作用に興味を持ち、その 2 次元 World-Sheet 上での超対称化を検討した。この章では論文 [12] を基にして話を進める。4 章、5 章で述べた様に Polyakov 型の作用においては 2 次元上での超対称化された理論 (NSR 型作用を持つ) が完成している。また Polyakov 型の作用を使って時空 10 次元での Dirac の Γ 行列を持つ、時空間で超対称化された理論 (Green Schwartz 型と呼ばれる作用を持つ) も完成している [2]。この時空間における超対称化は南部-後藤型作用や Schild 型作用においても既に成されている [13]。しかしながら 2 次元 World-Sheet 上における南部-後藤型作用と Schild 型作用の超対称化された理論はまだ完成されていない。我々は南部-後藤型作用や Schild 型作用が持つポアソン括弧構造（これは 3 章においても重要な役割を果たした）

$$\{X^{\mathcal{A}}, X^{\mathcal{B}}\} = \epsilon^{mn}\partial_m X^{\mathcal{A}}\partial_n X^{\mathcal{B}}$$

を保ちながら、Schild 型作用の 2 次元超対称化を試みる。ここで m, n は 2 次元上でのベクトル添え字であり、ϵ^{mn} は 2 次元反対称テンソル、$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は時空のベクトル添え字である。このポアソン括弧構造は 2 次元上の面積を不変に保つ座標付け替え変換（以降ではこの変換を $Diff_2$ と略す）の下で不変な構造であることがわかる（Appendix E 参照)。

6.1 First Deformation

最初に考えた作用の変形はもともとの Schild 型作用 (3.1) のボゾン的な場 $X^\mu(\xi)$ を 4 章で導入した超場 $Y^{\mathcal{A}}(\xi,\theta)$(以降、P.S.Howe [10] の Notation に合わせる) に置き換える変形である。つまり作用

$$\begin{aligned}
S_{Schild} &= -\int d^2\xi\{\frac{\Gamma}{e}\{X^{\mathcal{A}}, X^{\mathcal{B}}\}^2 + \Lambda e\} \\
\{X^{\mathcal{A}}, X^{\mathcal{B}}\} &\equiv \epsilon^{ab}\partial_a X^{\mathcal{A}}\partial_b X^{\mathcal{B}} \quad a,b = 2\text{ 次元 World-Sheet 上の添え字} \\
\Gamma &\equiv -\frac{1}{2\lambda^2}, \Lambda = \text{定数} \qquad (6.1)
\end{aligned}$$

において

$$X^{\mathcal{A}}(\xi) \to Y^{\mathcal{A}}(\xi,\theta) = X^{\mathcal{A}} + i\bar{\theta}\psi^{\mathcal{A}} + \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta B^{\mathcal{A}}$$

の置き換えをする。作用の積分についても 2 次元上の空間積分から超空間の積分に変えるまた、簡単のため、もともとの Schild 型作用 [1] の様に補助場 e と Λ を $e=1,\ \Lambda=0$ に固定する。そうすると変形した作用 S_1 は以下の式で表わされる。

$$S_1 = \Gamma\int d^2\xi d^2\theta\{\ Y_{\mathcal{A}}\ ,\ Y_{\mathcal{B}}\ \}^2$$

超場 $Y^{\mathcal{A}}(\xi,\theta)$ を使うことにより、この作用にはフェルミオン場 $\psi^{\mathcal{A}}$ が含まれるが、どのような形で $\psi^{\mathcal{A}}$ が作用に含まれるかを見るため、その置き換えた作用を展開して θ の積分を実行していくと次式の形にまとまる。

$$\begin{aligned}
S_1 &= \Gamma\int d^2\xi d^2\theta\{\ Y_{\mathcal{A}}\ ,\ Y_{\mathcal{B}}\ \}^2 \qquad (6.2) \\
&= -2\Gamma\int d^2\xi[2i\{\ X_{\mathcal{A}}\ ,\ X_{\mathcal{B}}\}\{X^{\mathcal{A}}, B^{\mathcal{B}}\} \\
&+ \{\ X_{\mathcal{A}}\ ,\ X_{\mathcal{B}}\ \}\{\bar{\psi^{\mathcal{A}}}, \psi^{\mathcal{B}}\} + \{\bar{\psi}_{\mathcal{B}}, X_{\mathcal{A}}\}\{\psi^{\mathcal{B}}, X^{\mathcal{A}}\} \\
&- \{\bar{\psi}_{\mathcal{A}}, X_{\mathcal{B}}\}\{\psi^{\mathcal{B}}, X^{\mathcal{A}}\}]
\end{aligned}$$

この作用 (6.2) はどの様な特徴を持っているだろうか。まず、フェルミオン場 $\psi^{\mathcal{A}}$ がゼロの時に元の Schild 型作用

$$S_{Schild} = \Gamma \int d^2\xi d^2\theta \{ X_{\mathcal{A}} , X_{\mathcal{B}} \}^2$$

に帰着するかどうか見てみる。 (6.2) 式において $\psi^{\mathcal{A}} = 0$ とすると最初の項だけが残り次式

$$S_1 = -2\Gamma \int d^2x 2i \{ X_{\mathcal{A}} , X_{\mathcal{B}} \} \{ X^{\mathcal{A}}, B^{\mathcal{B}} \}$$

になる。これは前述のポアソン括弧構造は保つが、もとの作用には帰着しない。しかしながらこの補助場 B についての変分をとると

$$\begin{aligned} \delta S_1 / \delta B^{\mathcal{A}} &= 0 \\ \rightarrow \{ \{ X^{\mathcal{A}}, X^{\mathcal{B}} \}, X_{\mathcal{B}} \} &= 0 \end{aligned}$$

になり、これは 3 章で述べたもともとの Schild 型弦の作用から導かれる運動方程式 (3.6) に一致することがわかる。つまり作用 (6.2) にはもとの Schild 型弦と同じ力学的な要素を含むことがわかる。しかし、もし作用 (6.2) のボゾン場 $X^{\mathcal{A}}$ に対する変分をとると、補助場 B やフェルミオン場 $\psi^{\mathcal{A}}$ を含む式が導かれる。またフェルミオン場 $\psi^{\mathcal{A}}$ に対しての変分をとるとボゾン場 $X^{\mathcal{A}}$, が含まれる式が導かれる。4 章の NSR 型の作用 (4.23) でのボゾン場 $X^{\mathcal{A}}$, に対する運動方程式は超対称化する前の運動方程式に一致していたが、今回の作用 (6.2) に関してはそれが成り立たない。また、NSR 作用の場合と比べてみると作用 (4.23) においては補助場 B の運動方程式は $B = 0$ を意味し、運動方程式を使わないと超対称化が成り立たない作用に帰着したのであった (4 章参考)。もし、この作用 (6.2) において補助場をゼロにすると (6.2) の第一項のボゾン的な項が消えてしまい、補助場がないと成り立たない作用になっていることに気が付く。また、作用 (6.2) には補助場の微分の項が含まれている点が特徴的である。つまり 4 章で述べた作用 (4.23) においての補助場とは根本的に違う役割を果たす場ではないかと考えられるが、それについてはよくわかっていない。

次に作用 (6.2) が持つ対称性について調べてみる。まず、ポアソン括弧構造の作用が保つ $Diff_2$ 不変性 (Appendix E 参照) についてであるが、作用 (6.2) ではどの項もポアソン括弧構造を保っているので、$Diff_2$ の下で不変な作用である。また 4 章での作用 (4.23) が持っていた様な大局的な超対称性について調べてみるとこの対称性も持っていることがわかる。なぜなら 4 章で見た様に、超場 $Y^{\mathcal{A}}$ だけで記述される作用は超対称変換の下で不変である。つまり

$$\delta S = \int d^2\xi d^2\theta \delta Y^{\mathcal{A}} = \int d^2\xi d^2\theta \bar{\epsilon} Q Y^{\mathcal{A}} = 0 \tag{6.3}$$

である。Q には θ の微分が含まれるの上記の被積分関数 $\bar{\epsilon} Q Y^{\mathcal{A}}$ には θ の 2 乗の項が残らないので θ の積分をするとゼロになるのであった。また超場 $Y^{\mathcal{A}}$ の 2 乗、3 乗もまた新たな超場になるので超場を掛け合わせた様な作用は常に大局的な超対称性を保つ。今回考えた作用 (6.2) に関しても 2 次元 World-Sheet 上の微分は含むが、θ の微分を作用に含まないので、超場 $Y^{\mathcal{A}}$ を掛け合わせた様な作用であると考えられる。よって作用 (6.2) は大局的な超対称変換の下で不変な作用である。対称性の点から見ると作用 (6.2) はある種の超対称化された作用と見なすことも出来るが、作用に含まれるフェルミオン場 $\psi^{\mathcal{A}}$ をゼロにしても元のボゾン的な Schild 型作用に帰着しないため、超対称化された Schild 型作用とは見なし難い。またこの作用からは、前述のボゾン場の変分からもとの Schild 型弦と同じ運動方程式が導かれず、補助場の変分からその運動方程式が導かれる事など未解決な問題が残っている。

6.2 Second Deformation

次に4章の大局的超対称化で用いた共変微分 D_α と最初の変形でも使った超場 $Y^{\mathcal{A}}$ を用いた変形を試みる。4章での Polyakov 型作用の超対称化を思い出してみると、その作用は超場と共変微分を使って

$$S = \frac{i}{4\pi}\int d^2\xi d^2\theta \bar{D}Y^{\mathcal{A}}DY_{\mathcal{A}}$$

と書くことができた。このことからヒントを得て、3章で述べた拡張されたポアソン括弧をさらに共変微分を使った形

$$\begin{aligned} \{Y^{\mathcal{A}}, Y^{\mathcal{B}}\}_{(1)} &\equiv \epsilon^{\alpha\beta}\bar{D}_\alpha Y^{\mathcal{A}} D_\beta Y_{\mathcal{A}} \qquad (6.4)\\ D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + \gamma^a\theta_\alpha\partial_a \\ \alpha,\beta &= 2\text{次元 Spinor 添え字、}a,b = 2\text{次元 World-Sheet 上の添え字} \end{aligned}$$

に拡張し、この括弧構造 (6.4) を使って次式の様な Schild 型作用を考えた。

$$\begin{aligned} S_2 &= \Gamma\int d^2\xi d^2\theta\{Y^{\mathcal{A}}, Y^{\mathcal{B}}\}^2_{(1)} \qquad (6.5)\\ \Gamma &= \text{定数} \end{aligned}$$

しかしながらこの作用を計算してみると、そのボゾン的な項はもとのボゾン的な Schild 型作用に含まれるポアソン括弧構造 $\{X^{\mathcal{A}}, X^{\mathcal{B}}\} = \epsilon^{mn}\partial_m X^{\mathcal{A}}\partial_n X^{\mathcal{B}}$ を持たないため、Schild 型作用の超対称化されたものと見なし難い。Conformal ゲージで固定された NSR 型作用が元のボゾン的な弦の作用を含む様に、Schild 型作用の超対称化された作用としては、少なくとも元のボゾン的弦の作用に含まれるポアソン括弧構造を含んでいて欲しいと考える。この様な性質を持つ作用として次に考えられた作用は γ_5 を含む以下の定義を持つ括弧構造を使った作用である。

$$\begin{aligned} \{Y^{\mathcal{A}}, Y^{\mathcal{B}}\}_{(2)} &\equiv \gamma_5^{\alpha\beta}\bar{D}_\alpha Y^{\mathcal{A}} D_\beta Y_{\mathcal{A}} \qquad (6.6)\\ \gamma_5 &= \gamma_0\gamma_1 = diag(1,-1) \end{aligned}$$

この括弧構造 (6.6) を使って作用 (6.5) と同様な形の作用を計算すると以下の様な形にまとまる。

$$\begin{aligned} S_{2'} &= \Gamma\int d^2\xi d^2\theta\{Y^{\mathcal{A}}, Y^{\mathcal{B}}\}^2_{(2)} \\ &= -2\Gamma\int d^2\xi\{\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\psi_{\mathcal{A}}\left(B^2 - \partial_\alpha X^{\mathcal{B}}\partial^\alpha X_{\mathcal{B}} + \bar{\psi}^{\mathcal{B}}\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi_{\mathcal{B}}\right) \\ &\quad +\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\psi_{\mathcal{B}}\left(-B^{\mathcal{B}}B_{\mathcal{A}} + \partial_\beta X^{\mathcal{B}}\partial^\beta X_{\mathcal{A}}\right) \\ &\quad -(\bar{\psi}^{\mathcal{B}}\gamma_5\psi^{\mathcal{A}})\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X_{\mathcal{B}}\partial_\beta X_{\mathcal{A}} + 2B^{\mathcal{B}}\partial_\alpha X_{\mathcal{A}}(\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\gamma^\alpha X_{\mathcal{B}})\} \qquad (6.7) \end{aligned}$$

作用 (6.7) の対称性について調べてみると、まず最初の変形と同様に $Diff_2$ 不変な作用になっていることが計算によりわかる。また4章で述べた様に $\bar{D}Y^{\mathcal{A}}DY_{\mathcal{A}}$ が超対称変換で不変な作用であるため、それを含む作用 (6.7) の大局的な超対称性は明らかである。しかしながら作用 (6.7) は全ての項にフェルミオン場 $\psi^{\mathcal{A}}$ が掛かっているため、$\psi^{\mathcal{A}} = 0$ にするとボゾン的な作用に戻るどころか作用全部がゼロになってしまう。ボゾン場 $X^{\mathcal{A}}$ に対する運動方程式を解いてもフェルミオン場 $\psi^{\mathcal{A}}$ が掛かってしまうため、もとの Schild 型弦の作用から導かれた運動方程式は得られない。この様な作用 (6.7) をどう理解すべきであろうか。

6.3 Third Deformation

今までの変形はConfomalゲージに固定したNSR型作用の超対称化を基にしてSchild型弦の超対称化を試みていたが、もし5章で述べた様に全くゲージ固定をしていないNSR型作用の超対称化を真似てSchild型弦の超対称化を試みたらどうであろうか。第3番目の変形は5章で述べたsupervierbein,E_M^A(5.16)を使う変形である。まず、前章と同様にしてポアソン括弧の拡張を考え、次式の様な括弧構造

$$\begin{aligned}\left[\, Y^{\mathcal{A}}\,,\, Y^{\mathcal{B}} \,\right] &\equiv \epsilon^{\alpha\beta} D_\alpha Y^{\mathcal{A}} D_\beta Y^{\mathcal{B}} \\ D_\alpha &= E_\alpha^M \partial_M\end{aligned} \tag{6.8}$$

を考える。この括弧構造を使って元のSchild型作用(3.1)を書き換えると

$$\begin{aligned}S_3 &= \int d^2\xi d^2\theta \{ \frac{\Gamma}{E} \left[\, Y^{\mathcal{A}}\,,\, Y^{\mathcal{B}} \,\right]^2 + \Delta E \} \\ E &= \mathrm{sdet} E_M^A,\ \Delta, \Gamma = \text{定数}\end{aligned} \tag{6.9}$$

という形の作用になる。この作用を計算する前にまず、作用(6.9)が持っている対称性を調べる。作用の局所的な対称性の不変性から、微少変換パラメーター ϵ^M に対して次式

$$\begin{aligned}\partial_M \epsilon^M &= 0 \\ M &= (m, \mu)\ \text{曲がった空間の添え字}\end{aligned} \tag{6.10}$$

が導かれる。一般的にスカラー的な関数 I は $Diff_2$ の下で $\delta I = \epsilon^m \partial_m I$ と変換される。今回考えた作用の被積分関数(V とおく)はスカラー関数と見なすことが可能なのでその変換は $\delta V = \epsilon^m \partial_m V$ になる。それを次式の様に

$$\epsilon^m \partial_m V = -(\partial_m \epsilon^m) V + \partial(\epsilon^m V)$$

と変形すると右辺、第一項目は $Diff_2$ 不変性が成り立つ時は消え、第二項目は表面項となるため、積分すると消える。しかしながら後に述べる様に、今回の場合は $\partial^m \epsilon_m = 0$ が自明でないため、$Diff_2$ 不変性は明らかではない。(6.10)の微少変換パラメーター ϵ^M は超場の様に ξ と θ の関数として表わされる。また局所的なローレンツ変換の微少変換パラメーターの関数 L も同様に ξ と θ の関数として次式の様に書くことが出来る[10]。

$$\begin{aligned}\epsilon^m &= f^m - i\bar\zeta\gamma^m\theta + \frac{1}{4}\bar\theta\theta\bar\zeta\gamma^n\gamma^m\chi_n, \\ \epsilon^\mu &= \zeta^\mu - \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^m\zeta\chi_m{}^\mu - \frac{1}{2}\theta^\lambda(\gamma_5)_\lambda{}^\mu l - \frac{i}{4}\bar\theta\theta(\gamma_5\gamma^m)^{\mu\beta}\zeta_\beta\omega_m - \frac{1}{8}\bar\theta\theta\bar\zeta\gamma^n\gamma^m\chi_n\chi_m{}^\mu, \\ L &= l - \frac{i}{2}\bar\zeta\gamma_5\theta A - i\bar\zeta\gamma^m\theta\omega_m + \frac{i}{4}\bar\theta\theta\bar\zeta\gamma^m\gamma_5\chi_m A + \frac{1}{4}\bar\theta\theta\bar\zeta\gamma^n\gamma^m\chi_n\omega_m,\end{aligned} \tag{6.11}$$

ここで m と μ は5章で使った添え字と同じで、曲った空間の2次元上のベクトル添え字とSpinor添え字を表わす。(6.11)の独立なパラメーターは f^m, ζ^μ(各々2つ)と l の計5つである。(6.10)の条件式に(6.11)を代入することにより、その θ の0次、1次、2次の項が各々ゼロになることから、それらのパラメーターに次の拘束条件

$$\begin{aligned}\partial_m f^m + \frac{i}{2}\bar\chi_m\gamma^m\zeta &= 0, \\ i\partial_m(\gamma^m\zeta)_\alpha + \frac{i}{2}(\gamma_5\gamma^m\zeta)_\alpha\omega_m + \frac{1}{4}\chi_{m\alpha}\bar\zeta\gamma^n\gamma^m\chi_n &= 0, \\ \partial_m(\bar\zeta\gamma^n\gamma^m\chi_n) &= 0.\end{aligned} \tag{6.12}$$

が課せられる。この拘束条件によりパラメーター f^m, ζ^μ が決まり、$Diff_2$ と局所的な超対称変換の自由度が固定されてしまっていることがわかる。しかしながら局所的なローレンツ変換のパラメーター l は決まらないので、その自由度は残っている。 以上の様の多くの対称性の自由度が固定されている作用 (6.9) が何を表わしているのか不明な点は多いが、その形を見るため、作用 (6.9) を計算し、θ の積分を実行すると次式の様な形の作用が導かれた (計算の詳細は Appendix E 参照)。

$$\begin{aligned}S_3 = \int d^2x[\frac{\Gamma}{e}\{&B_{\mathcal{A}}B^{\mathcal{B}}\bar{\psi}_{\mathcal{B}}\psi^{\mathcal{A}} - B^2\bar{\psi}\psi + \frac{3i}{2}B^{\mathcal{A}}\bar{\psi}\psi\bar{\chi}_m\gamma^m\psi_{\mathcal{A}} - 2B^{\mathcal{A}}\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\gamma^n\psi^{\mathcal{B}}\partial_n X_{\mathcal{B}}\\ &+(\bar{\psi}\psi)^2(\frac{3i}{8}A + \frac{1}{2}g^{nm}\bar{\chi_n}\chi^m + \frac{1}{16e}\epsilon^{nm}\bar{\chi_m}\gamma^5\chi_n)\\ +\bar{\psi}\psi(i\bar{\psi}^{\mathcal{B}}\gamma^m\partial_m\psi_{\mathcal{B}} &+ g^{nm}\partial_n X_{\mathcal{A}}\partial_m X^{\mathcal{A}} - \frac{5i}{2}g^{mn}\bar{\chi}_n\psi^{\mathcal{A}}\partial_m X_{\mathcal{A}} + \frac{i}{2e}\epsilon^{ml}\partial_m X_{\mathcal{A}}\bar{\psi^{\mathcal{A}}}\gamma^5\chi_l)\\ &-\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B}}g^{mn}\partial_m X_{\mathcal{A}}\partial_n X_{\mathcal{B}} + \frac{1}{e}\{X_{\mathcal{A}}, X^{\mathcal{B}}\}\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\gamma_5\psi^{\mathcal{B}}\}\\ &-\frac{\Delta}{2}(\frac{1}{2}\epsilon^{mn}\bar{\chi_m}\gamma_5\chi_n + ieA)]\end{aligned} \tag{6.13}$$

この作用の特徴は最後の項以外は2番目の変形と同様にフェルミオン場 $\psi^{\mathcal{A}}$ が全ての項に掛かる。またNSR型の作用には最終的には残らなかった補助場 A が最後まで作用に残った。このことは何を表わすのであろうか。この補助場 A に対する変分をとると

$$\frac{\delta S_3}{\delta A} = \frac{3i\Gamma}{8e}(\bar{\psi}\psi)^2 - \frac{\Delta i}{2}e = 0. \tag{6.14}$$

になる。この式を使って $\bar{\psi}\psi$ を補助場 e に置き換えると、NSR型の作用と同様な形の作用が含まれることがわかる。この様な事は2番目の変形の際にも言えたが、この作用が何を表わすのか未解決である。

6.4 Conclusions and Discussion

以上の様に、2次元超対称化されたSchild型作用を作ることを目標に3通りの変形を行ってきたが、各々、変形された作用に関して未解決な問題が多い。まとめると最初の変形 (6.2) ではボゾン場をフェルミオン場を含む超場 $Y^{\mathcal{A}}$ に置き換え、ポアソン括弧構造は変えない変形を行った。その変形で得られた作用は補助場の微分を含み、補助場の変分から導かれる運動方程式は、もとのSchild型から得られる運動方程式と等しいことがわかり、よってこの作用 (6.2) は元のSchild型作用と同じ力学を含むことがわかる。しかしボゾン場の変分から導かれる運動方程式は補助場を含む形になってしまい、もとのSchild型作用から導かれる運動方程式とは一致しない。また、この作用に現れる補助場 B は微分された形で含まれるため、NSR型作用の補助場とは違う役割をする場の様に思われるが、それについてはまだ良くわかっていない。作用が持つ対称性は、大局的な超対称性と $Diff_2$ 不変性であった。対称性だけ見ると満足のいく作用の様にも見えるが、フェルミオン場 $\psi^{\mathcal{A}}$ をゼロにしても、元のボゾン的なSchild型作用に帰着しないため、超対称化されたSchild型作用とは見なし難い。

2番目に考えた作用 (6.5) は超場 $Y^{\mathcal{A}}$ と4章で述べた共変微分 D_α を使う新たな括弧構造 (拡張されたポアソン括弧) を用いた作用である。この括弧構造を γ_5 を含めた形にすることにより、もとのポアソン括弧構造を含む形になった。しかしながら全ての項にフェルミオン場 $\psi^{\mathcal{A}}$ が掛かる作用になってしまい、$\psi^{\mathcal{A}} = 0$ にすると全ての項が消えてしまい、もとのボゾン的な作用に帰着しない。また、$\psi^{\mathcal{A}}$ をある種の補助場と見なすことによって部分的にConformalゲージをとった大局的な超対称性を持つNSR型作用とポアソン括弧構造を含むことがわかった。しかしながらSchild

型作用の形は含まれず、この作用をSchild型作用の超対称化されたものと見なすのは難しい。作用が持つ対称性は最初の変形で得られた作用と同様で、$Diff_2$ 不変性と大局的な超対称性である。

1番目と2番目の変形(6.2)(6.7)はConformalゲージをとった大局的な超対称性を持つNSR型作用に基づいた変形であったので、当然得られた作用はゲージ固定された後の作用であった。3番目の変形(6.9)ではゲージ固定されていない、より一般的な局所的な対称性を持つNSR型作用(5章参照)に基づいて、Schild型作用の超対称化を試みた。変形には5章で定義されたSupervierbein,E_M^A を使った。作用の対称性を調べてみると多くの対称性（局所的な超対称変換や $Diff_2$ 不変性など）が既にゲージ固定されてしまっていることがわかる。また2番目の変形で得られた作用と同様に(6.13)の最後の項以外の項、全てにフェルミオン場 ψ^A が係り、それは補助場 A に対する変分から導かれる式を使うことにより解決された(6.14)。この補助場 A はNSR型作用では最終的に作用の中に残らなかった場でSupervierbein,E_M^A に含まれている場であるが、その場が持つ性質についてはこれから検討していきたい。またこの作用は局所的な超対称性を持つNSR型作用を部分的に含み、ポアソン括弧構造も含むことがわかったが、元のSchild型作用の形は現れず、Schild型作用を超対称化した作用としては見なし難い。

以上、3通りの変形を行ってきたが、Schild型作用の2次元超対称化された作用を作りあげることは出来なかった。もとのSchild型作用に含まれるポアソン括弧構造を保つため、それを含む様な拡張された括弧構造を使ってフェルミオン場を含んだSchild型作用を作ることを試みてきたが、その他の方法を使って超対称化された作用を作ることは出来ないだろうか。例えば5章で述べたような局所的な超対称性を持つ作用を形成する最初の方法(超場やSupervierbeinを使わない方法)、つまり対称性を保つ様に必要な項を足して作用を形成する方法で、2次元の超対称性を持つSchild型作用を作ることは出来ないだろうか。検討していきたい。

また、後の行列模型(Matrix Model)で述べる10次元時空で超対称化されたSchild型作用[13]は、超対称化されたYang-Mills理論(以降、SYM理論と略す)の行列化された作用とある近似で等しいことが示される。もし2次元超対称化されたSchild型作用があるとしたら、その作用は2次元SYM理論と何らかの関係を持つことが予想される。2次元SYM理論の作用は、3次元SYM理論を1次元、空間方向にコンパクト化して次の様な作用が考えられている[28]。

$$\begin{aligned}
S &= \int d^2x\, \mathrm{tr}(-\frac{1}{4g^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\phi D^\mu\phi + i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - 2ig\phi\bar{\psi}\gamma_5\psi) \qquad (6.15)\\
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]\\
D_\mu\psi &= \partial_\mu\psi + i[A_\mu, \psi]
\end{aligned}$$

ここで、A_μ, ϕ, ψ はそれぞれベクトル場、スカラー場、Majorana-フェルミオン場で、$N\times N$ 行列の $U(N)$ 対称性を持つ場である。この作用からわかる様に、2次元SYM理論の作用は湯川型の相互作用項 $-2ig\phi\bar{\psi}\gamma_5\psi$ を含むことがわかる。もし、2次元SYM理論の作用と2次元超対称化されたSchild型作用がある近似で等しいなら、2次元超対称化されたSchild型も γ_5 を含む項を持つことが予想される。このことから我々の考えた2番目に変形した作用(6.7)と3番目に変形した作用(6.13)に γ_5 を含む湯川型の相互作用項が含まれることは、望ましいことではないかと思われる。我々は今後、2次元SYM理論と2次元超対称化されたSchild型作用の関係についてより深く検討していきたい。

7 Relation between Green-Schwartz Superstring and Matrix Model

この章では [13] に基づいて時空の超対称性を持つ Green-Schwartz 型の超弦理論と行列模型の関係について述べる。2 次元上での超対称性を持つ弦の理論については 4 章、5 章で説明してきたが、時空 10 次元上で超対称性を持つ Green-Schwartz 型の理論 [2] についての詳細は省略し、2 次元面上での超対称化との違いや特徴のみ述べる。時空の超対称性を持つ Green-Schwartz 型超弦理論の作用 (ここでは南部-後藤型の作用を扱う) は次式で与えられる。

$$S_{GS}=-T\int d^2\xi(\sqrt{-\frac{1}{2}\Sigma^2}+i\epsilon^{ab}\partial_aX^\mu(\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_b\theta^1+\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2)+\epsilon^{ab}\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial_a\theta^1\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2) \quad (7.1)$$

ここで θ^1 と θ^2 は 10 次元の Majorana-Weyl Spionrs(Appendix B 参照) で同じカイラリティーを持つ。$\Sigma^{\mu\nu}$ と Π_a^μ は次式で定義される。

$$\begin{aligned}\Sigma^{\mu\nu} &= \epsilon^{ab}\Pi_a^\mu\Pi_b^\nu \\ \Pi_a^\mu &= \partial_aX^\mu-i\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial_a\theta^1+i\bar{\theta}^2\Gamma^\mu\partial_a\theta^2\end{aligned} \quad (7.2)$$

この系は 2 つの超対称性 ($N=2$ の時空の超対称性) を持ち、以下の変換のもとで作用 (7.1) は不変である。

$$\begin{aligned}\delta_{SUSY}\theta^1 &= \epsilon^1 \\ \delta_{SUSY}\theta^2 &= \epsilon^2 \\ \delta_{SUSY}X^\mu &= i\bar{\epsilon}^1\Gamma^\mu\theta^1-i\bar{\epsilon}^2\Gamma^\mu\theta^2\end{aligned} \quad (7.3)$$

また、時空の超対称性理論で必要なフェルミオン的な対称性：κ 対称性（これは NSR 型作用にはない対称性である。）は以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned}\delta_\kappa\theta^1 &= \alpha^1 \\ \delta_\kappa\theta^2 &= \alpha^2 \\ \delta_\kappa X^\mu &= i\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\alpha^1-i\bar{\theta}^2\Gamma^\mu\alpha^2 \\ \text{但し、}\alpha^1 &= (1+\tilde{\Gamma})\kappa^1,\ \alpha^1=(1-\tilde{\Gamma})\kappa^2 \\ \tilde{\Gamma} &= \frac{1}{2\sqrt{-\frac{1}{2}\Sigma^2}}\Sigma_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\text{である。}\end{aligned} \quad (7.4)$$

κ^1 と κ^2 は局所的なフェルミオン的パラメーターであり、$\tilde{\Gamma}^2=1$ なので θ^1 と θ^2 の自由度の半分は落ちる。κ 対称性は $\theta^1=\theta^2=\psi$ という条件を置くことによってゲージ固定される。Type II B 型弦の理論では θ^1 と θ^2 は異なるカイラリティーを持つので (8 章参照)、この条件はローレンツ変換の対称性と矛盾しない。このゲージ固定により次式が導かれる。

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{GS} &= -T\int d^2\xi(\sqrt{-\frac{1}{2}\sigma^2}+2i\epsilon^{ab}\partial_aX^\mu\bar{\psi}\Gamma_\mu\partial_b\psi) \\ \text{ここで}\ \sigma &= \epsilon^{ab}\partial_aX\partial_bX^\nu\ \text{である。}\end{aligned} \quad (7.5)$$

この作用 $\tilde{S}_{GS}$ はまだ $N=2$ 超対称変換 (7.3) の下で不変である。しかしこの超対称変換は $\theta^1=\theta^2$ のゲージ固定条件を保つ様にするため、もとの超対称変換と κ 対称性の変換を混ぜた次の変換で

なければならない。

$$\begin{aligned}\delta\theta^1 &= \delta_{SUSY}\theta^1 + \delta_\kappa\theta^1 \\ \delta\theta^2 &= \delta_{SUSY}\theta^2 + \delta_\kappa\theta^2 \\ \delta X^\mu &= \delta_{SUSY}X^\mu + \delta_\kappa X^\mu \end{aligned} \tag{7.6}$$

ここで κ^1 と κ^2 を $\delta\theta^1 = \delta\theta^2$ となる様に次式に選ぶ。

$$\begin{aligned}\kappa^1 &= \frac{-\epsilon^1 - \epsilon^2}{2} \\ \kappa^2 &= \frac{\epsilon^1 - \epsilon^2}{2}\end{aligned} \tag{7.7}$$

また、新しく導入した η と ϵ は

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{\epsilon^1 + \epsilon^2}{2} \\ \epsilon &= \frac{\epsilon^1 - \epsilon^2}{2}\end{aligned} \tag{7.8}$$

である。これらを使うと $\tilde{S}_{GS}$ の $N=2$ 超対称変換は以下の様に表わされる。

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}\psi &= -\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\sigma^2}}\sigma_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\epsilon \\ \delta^{(1)}X^\mu &= 4i\bar{\epsilon}\Gamma^\mu\psi \end{aligned} \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}\psi &= \eta \\ \delta^{(2)}X^\mu &= 0\end{aligned} \tag{7.10}$$

今まで南部-後藤型をした $\tilde{S}_{GS}$ 作用を扱ってきたが、次に $\tilde{S}_{GS}$ をSchild ゲージで固定した作用（２、３章で述べたSchild 型をした作用）を考える。まず最初にポアソン括弧を導入する。

$$\{X\ ,Y\} \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ab}\partial_a X\partial_b Y \tag{7.11}$$

$\sqrt{g}$ はWorld-Sheet 上で定義された正定値のスカラー密度であり、World-Sheet 上の計量 g_{ab} から作られた量 $\sqrt{\det(g_{ab})}$ と同一視できるものである。これらを使うと $\tilde{S}_{GS}$ のSchild 型作用は次式で表わされる。

$$S_{Schild} = \int d^2\xi[\sqrt{g}\alpha(\frac{1}{4}\{X^\mu\ ,X^\nu\}^2 - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu\{X^\mu\ ,\psi\}) + \beta\sqrt{g}] \tag{7.12}$$

この作用は少なくとも古典的には $\tilde{S}_{GS}$ と等しい作用であることが、(7.12) の $\sqrt{g}$ に対する運動方程式を解くことによって示される。

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4}\frac{\alpha}{(\sqrt{g})^2}(\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu)^2 + \beta = 0 \\ &\to \sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sqrt{(\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu)^2}\end{aligned} \tag{7.13}$$

この $\sqrt{g}$ を (7.12) に代入することによって次式

$$\int d^2\xi(\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{(\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu)^2} - \frac{i}{2}\alpha\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu\bar{\psi}\Gamma^\mu\partial_b\psi) \tag{7.14}$$

を得る。この作用は $\tilde{S}_{GS}$ と ψ の規格化（自由に調整できる）の範囲で等しい。また $\tilde{S}_{GS}$ が持っていた $N=2$ の超対称性 (7.9)(7.10) は S_{Schild} においても次式の様に明らかである。

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}\psi &= -\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\epsilon \\ \delta^{(1)}X^{\mu} &= i\bar{\epsilon}\Gamma^{\mu}\psi \\ \delta^{(2)}\psi &= \eta \\ \delta^{(2)}X^{\mu} &= 0 \end{aligned} \tag{7.15}$$

しかしながらこのゲージで固定した作用が量子論においても成り立つかどうかは明らかではない。形式的には、量子論は X,ψ と $\sqrt{g}$ の経路積分

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\sqrt{g}\mathcal{D}X\mathcal{D}\psi e^{-S_{Schild}} \tag{7.16}$$

として表わされる。 [13] では (7.16) 式の厳密な定義を与えようとする代わりにこの式と (少なくとも古典的には) 等しい行列模型を構成し、その模型の経路積分を (7.16) 式の定義と解釈することを試みている。
以降では (7.16) で定義される系を次式で定義される系のある種の古典的な極限とみなす。

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty}\int dAd\psi e^{-s} \tag{7.17}$$

$$S = \alpha(-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[A_\mu\,,A_\nu] - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\bar{\psi}\Gamma^{\mu}[A_\mu\,,\psi])) + \beta\mathrm{Tr}1 \tag{7.18}$$

$$\alpha = \frac{Na^4}{g^2}$$

ここで A_μ と ψ はそれぞれボゾン的、フェルミオン的な $N\times N$ のエルミート行列を表わす。(7.18) において、N が十分大きくて、A_μ と ψ の固有値の分布が十分に穏やかであるならば、(7.18) の交換子と Tr は以下で示す様にポアソン括弧と積分にそれぞれ置き換え可能であると仮定する。

$$\begin{aligned} -i[\,,\,] &\to \{\,,\,\} \\ \mathrm{Tr} &\to \int d^2\sigma\sqrt{g} \end{aligned} \tag{7.19}$$

これは古典力学と量子力学との間の対応と同じである。良く知られている様に交換子と Tr の基本的な性質は

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[X\,,Y] &= 0 \\ \mathrm{Tr}(X[Y\,,Z]) &= 0 \end{aligned}$$

であり、これは古典的な極限をとった後にも保たれる。

$$\begin{aligned} \int d^2\xi\sqrt{g}\{X\,,Y\} &= 0 \\ \int d^2\xi\sqrt{g}X\{Y\,,Z\} &= \int d^2\xi\sqrt{g}Z\{X\,,Y\} \end{aligned}$$

この置き換え (7.19) をすると行列模型の作用 (7.18) は Schild ゲージの作用 (7.12) になる。また (7.17) において n で和をとることは (7.16) で $\sqrt{g}$ の経路積分を行うことに対応している。更に

S_{Schild} における (7.15) の $N=2$ 超対称性は直接 (7.18) の作用 S の超対称性に移される。

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}\psi &= \frac{i}{2}[A_\mu\,, A_\nu\,]\Gamma^{\mu\nu}\epsilon \\ \delta^{(1)}A_\mu &= i\bar{\epsilon}\Gamma_\mu\psi \end{aligned} \tag{7.20}$$

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}\psi &= \eta \\ \delta^{(2)}A_\mu &= 0 \end{aligned} \tag{7.21}$$

この段階では、まだ (7.17) がユニタリーの性質や因果律などを満たす矛盾のない理論を与えるということを要求できない。しかしながら経路積分 (7.17) がより完成された理論（超対称 Yang-Mills 理論の $N\to\infty$ での理論）の有効理論を与えると見なすことができる。(詳細は [13] 参照) ここでは単に作用 (7.18) が 10 次元的な超対称 Yang-Mills 理論の体積ゼロの極限 $a\to 0$ として見なす事が出来ることを指摘しておく (但し (7.18) の β に比例した項を除く)。そのように考えると (7.20) の対称性は $N=1$ 超対称 Yang-Mills 理論（体積ゼロの極限で）の対称性に他ならない。(7.20) と (7.21) の対称性が $N=2$ の超対称性を成しているかどうか見るために、[13] では $N=2$ の超対称性理論が満たすべき代数がなり立っていることを計算で確かめている。(ここではその代数については省略する。) それにより (7.17) の理論がローレンツ不変性を持ち、ユニタリーの性質も持つことが明らかになった。

この論文 [13] では更に経路積分 (7.17) が 1 つの弦の状態だけではなく、多くの弦の状態を自動的に含むことが示されている。また行列 A_μ と ψ が Block 対角化できるとき、その作用はそれぞれの Block の Tr をとるようになり、それらの Tr が古典的な極限では Schild ゲージをとった弦の作用に帰着することが示されている。それゆえ (7.18) の Tr は分離した World-Sheet 上の積分に対応している。すなわちそれぞれの Block が 1 つの弦を表わしており、(7.17) で定式化される理論は多数の弦の状態を含んでいる。更に行列の Block 対角化以外の成分は Block 対角化で表わされる弦の相互作用を表わしている。例えば 2 つの Block 対角成分を持つ以下の様な行列

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

を考えると（ここで A と D は対角行列を表わす）、A, D の Block がそれぞれ 1 つの弦を表わしており、それ以外の B, C の成分がそれらの相互作用を表わしているのである。よって (7.17) は弦理論の構成的な定義を表わすのではないかということが [13] では詳しく述べられている。以上が [13] で述べられている内容の一部であるが、我々の扱ってきた型弦との一番大きな違いは ここでの Schild 型弦は 10 次元の超対称性を持つ弦の作用（GS 型作用）[2] であり、2 次元 World-Sheet 上の超対称性を持つ作用ではないということである。10 次元の超対称性を持つ作用のフェルミオン ψ は Spinor 表現が $SO(1,9)$ の群に従うものであり、そこが 2 次元の場合（Spinor 表現が $SO(1,1)$ の群に従うものを用いる）と一番大きな違いである。また、この章で述べたように 10 次元の超対称化された作用は 2 次元の超対称化された理論では現れなかった新たな対称性、κ 対称性を持つことがわかる。今後はこの 2 次元超対称性を持つ作用と 10 次元超対称性を持つ作用を結び付ける役割を持つ GSO 射影 [2] についても調べていきたい。

また、最近この章で述べた行列模型と弦理論のソリトン解である D-brane の関係が詳しく調べられており、その関係について次章で述べる。

8 Duality, D-brane and Matrix Model

超弦理論は重力を含む統一理論として研究されている理論であり、その摂動論的な解析は多くの成功を収めている [2]。しかしながらこれらの摂動的な計算は重力相互作用が弱い場合（弱結合領域）にしか適用できないため、重力の効果が本質的になる場合（強結合領域）には適用できない。そこで非摂動論的な弦の理論の定式化が必要になってくるのだが、その定式化として弦理論の双対性という概念が使われる。この双対性を使うことによって、摂動論の知識だけから非摂動論的な性質を調べることができる。ここで言う双対性とは電磁気学で知られる電気と磁気の入れ替えに関する双対性と同種類の双対性を意味する。 まず最初に電磁気学における双対性について述べ、そのソリトン解（モノポール）に対応するものが、超弦理論では D-brane になることを説明する。更に行列模型と D-brane の関係について調べられているいくつかのことについてまとめる。

古典電磁気学の Maxwell 方程式

$$\mathrm{div}\, E = 4\pi e\rho_e, \quad \mathrm{rot}\, H - \frac{\partial E}{\partial t} = 4\pi e j_e \tag{8.1}$$

$$\mathrm{div}\, H = 0, \quad -\mathrm{rot}\, E - \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{8.2}$$

において電荷密度 ρ_e と電流密度 j_e がゼロの時に電場と磁場の入れ替えに関して対称な理論であったが、Dirac はこの対称性に注目し、磁気単極子（モノポール） [29] を導入した。もし磁気単極子が存在するのならば、電荷密度と電流密度に対して磁化密度 ρ_m と磁流密度 j_m が存在し、 電荷 e(結合定数) に対して磁化 g が存在する。この時、(8.2) の右辺はそれぞれ $4\pi g\rho_m$, $4\pi g j_m$ となる。こうすると Maxwell 方程式は以下の変換で不変である。

$$\begin{cases} (E,H) & \to & (H,-E) \\ (\rho_e,\rho_m) & \to & (\rho_m,-\rho_e) \\ (j_e,j_m) & \to & (j_m,-j_e) \\ (e,g) & \to & (g,e) \end{cases} \tag{8.3}$$

この変換の不変性は電磁双対性と呼ばれる。更に Dirac はこの系の量子化を考察し、磁気単極子が量子力学的にも矛盾なく存在できるためには結合定数 e, g の間に次の関係が成り立たなくてはならない事を示した。

$$eg = \frac{\hbar}{2} \tag{8.4}$$

この式で重要なことは電荷の結合定数 e が大きい時（強結合領域）には磁荷の結合定数 g は小さくなり、逆に磁荷の結合定数 g が大きい時（弱結合領域）には電荷の結合定数 e が大きくなる。従って変換 (8.3) は強結合と弱結合の双対性と考えることも出来る。弱結合領域では電子は基本粒子として考えられ摂動論で扱うことが出来るが、モノポールはこの時、基本粒子としてではなく、ソリトンとして存在する。一方、強結合領域では電子は強く束縛されており、単独に取り出すことは出来ないため、基本粒子として扱うことが出来ず、ソリトンとして存在する。しかしながらモノポールはこの時、弱結合状態なので基本粒子として扱うことが出来る。(簡単のため、量子補正については省略する。) よって電磁双対性により、強結合領域においても摂動論的な理論の定式化が可能になった。

また電子のベクトルポテンシャル（ゲージ場）A_e とモノポールのベクトルポテンシャル A_m の関係は場の強さ F を用いて次式の様に示される。

$$\tilde{F} = *F, \quad F = dA_e, (F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \quad \tilde{F} = dA_m \tag{8.5}$$

ここで d は外微分を表わし、$*$ は 4 次元における Hodge 双対を表わす。一般に D 次元における n-form の A_n の Hodge 双対の定義は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} *A_n &= \frac{1}{n!(D-n)!}\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_n\nu_1\cdots\nu_{D-n}} A_{\mu_1\cdots\mu_n} dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_{D-n}} \\ \text{例えば電磁場の場合 } n &= 2,\ D=4 \\ A_2 &= \frac{1}{4}\epsilon_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} A_{\mu_1\mu_2} dx^{\nu_1}\wedge dx^{\nu_2} \end{aligned} \tag{8.6}$$

電子とゲージ場との相互作用は

$$S = e\int d\tau A_e\mu(x(\tau))\frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \tag{8.7}$$

の形で記述される。ここでは $x^\mu(\tau)$ は電子の位置を表わしている。モノポールの相互作用は (8.7) の A_e, e を A_m, g と置き換えることによって得られる。

１９９０年代半ばに弦理論においても、この電磁双対性（強結合と弱結合の双対性）のような双対性が存在することがわかり、D-brane と呼ばれるソリトン解が発見された [14] [15]。これによって双対な理論の摂動論の知識だけから超弦理論の非摂動論的な性質を理解することが可能になってきた。

D-brane は本来、開いた弦の満たす境界条件の研究により発見されたものである。弦の理論には開いた弦と閉じた弦があり、開いた弦の境界条件には Neumann 条件（自由端を表わす）と Dirichlet 条件（固定端を表わす）が存在する (Appendix A 参照)。一般には固定端と自由端の混ざったような境界条件を考える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma}|_{0,\pi} &= 0,\ \mu = 0,1,...,p \\ X^\mu|_{0,\pi} &= x^\mu,\ \mu = p+1,...,9 \end{aligned} \tag{8.8}$$

ここで $X^\mu = X(\sigma,\tau)^\mu$ $(\mu = 0,..,9)$ は 10 次元における弦の座標、x^μ は定数、p は 0 から 9 までの任意の整数を表わす。この式は弦の端点のうち (8.8) の $p+1$ 個の成分 X^μ $(\mu = 0,..,p)$ は時間と共に変化するが、残りの成分 X^μ $(\mu = p+1,..,9)$ は x^μ に固定されていることを意味する。この様に開いた弦の端点が固定されている 10 次元時空内の $(p+1)$ 次元超空間を Dirichlet p-brane と呼ぶ。この様な境界条件を満たす D-brane の存在は知られていたが、よりその重要性が明らかになったのは、次に説明する Type II と呼ばれる弦の模型の R-R 場の源としてそれが見なされるようになってからである。

現在、時空 10 次元の超弦理論には Heterotic 型（混成型） ２つ、Type I （開弦）、Type II A（閉弦）、Type II B（閉弦）の 5 種類の弦理論が存在する。 Type I 理論は開いた弦の理論であり、Heterotic 弦は閉じた弦の理論であるが、右向き成分と左向き成分が異なる統計性を示す場で表わされる。すなわち一方はボゾン的でもう一方はフェルミオン的であり、混成型と呼ばれる。この Heterotic 型と Type I の理論は 1 つの超対称性を持つ理論である。Type II A と Type II B の理論は閉じた弦の理論である。弦理論のソリトン解は Type II の理論に関係しているので、以降では Type II の理論について述べる。Type II と呼ばれるのは２つの超対称性を持つためで、A と

B の違いはそれらの理論に含まれる２つの重力微子 (gravitino) が反対のカイラリティーを持つ場合;A と同じカイラリティー を持つ場合;B とで分類される。また、閉じた弦の理論のため、弦を定義する２次元の場 $X^\mu(\sigma,\tau),\psi^\mu(\sigma,\tau)$ は右向きの成分と左向きの成分に分類される。フェルミオン場 ψ^μ は $\sigma\to\sigma+2\pi$ の変換で異なる境界条件

$$\psi(\sigma+2\pi)=\psi(\sigma),\ \psi(\sigma+2\pi)=-\psi(\sigma)$$

前者の境界条件を持つフェルミオンを R(Ramond) フェルミオン、後者の境界条件を持つフェルミオンを NS(Neveu-Schwarz) フェルミオンと呼ぶ。右向き左向き成分を合成すると NS-NS、R-R は 10 次元のベクトル（テンソル）表現を与え、そのため 10 次元のボゾンを記述する。また R-NS(NS-R) は 10 次元の Spinor 表現を与えるため 10 次元時空のフェルミオンを記述する。Type II A と Type II B に現れる場は以下の様にまとめられる。

- Type II A
  ボゾン：NS-NS; $G_{\mu\nu},\ B_{\mu\nu},\ \phi,$ R-R; $A_\mu,\ A_{\mu\nu\rho}$
  フェルミオン：NS-R; $\psi^\alpha_\mu,\ \psi_{\alpha,\mu},\ \lambda^\alpha,\ \lambda_\alpha$
- Type II B
  ボゾン：NS-NS ; $G_{\mu\nu},\ B_{\mu\nu},\ \phi,$ R-R; $\chi,\ B'_{\mu\nu},\ A^{(+)}_{\mu\nu\rho\sigma}$
  フェルミオン：NS-R; $\psi^{i,\alpha}_\mu,\ \lambda_{i,\alpha},\ i=1,2$

$G_{\mu\nu}$ は 10 次元の重力場、$B_{\mu\nu}$ は 2 階反対称テンソル場、ϕ は dilaton 場を表わしている。ψ^α_μ は重力微子 (gravitino) で、λ_α は dilaton の相棒で diratino と呼ばれる粒子を表わしている (これらはどの型の超弦理論にも含まれている)。Type II A 理論の $A_{\mu\nu\rho}$ と Type II B 理論の $B'_{\mu\nu},\ A^{(+)}_{\mu\nu\rho\sigma}$ はそれぞれ 3,2,4 階の反対称テンソル場である ($A^{(+)}_{\mu\nu\rho\sigma}$ の＋符号はこれを外微分してできる 5 階の反対称場が 10 次元空間で自己双対であることを意味する)。それらの持つ場の力学的自由度はテンソルの自由度の計算から、フェルミオンとボゾンで同数 128 であることがわかる。II A と II B 理論の R-R 場は II A では奇数次の反対称テンソル、II B では偶数次の反対称テンソルで表わされ、II A と II B で異なる場を持つ。(8.7) はゲージ場と電子の相互作用を表わしていたが、この反対称テンソル場 (R-R 場) はどの様な物体と相互作用するのであろうか。まず (8.7) の作用の一般化を考える。$(p+1)$ 階反対称テンソル場 $A_{\mu_0\mu_1\cdots\mu_p}$ と相互作用するのは電子の様な粒子ではなく p 次元的に広がった物体 (p-brane) であり、その相互作用は

$$S=\mu_p\int d\tau d\sigma_1\cdots d\sigma_p A_{\mu_0\mu_1\cdots\mu_p}(X(\tau,\sigma))\frac{\partial(X^{\mu_0},X^{\mu_1},\cdots X^{\mu_p})}{\partial(\tau,\sigma_1\cdots\sigma_p)} \tag{8.9}$$

の様になる。ここで μ_p は結合定数、$\sigma_1\cdots\sigma_p$ は p-brane の広がりを記述する座標を表わす。ところでこの R-R の反対称テンソル場 $A_{\mu_0\mu_1\cdots\mu_p}$ は電磁気学における場の強さ $F_{\mu\nu}$ と同じ方定式を満たすことが知られている。すなわち運動方程式とビアンキ方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=0,\ \ \partial_\mu * F^{\mu\nu}=0$$

と同様な方程式を満たす。よって R-R の反対称テンソル場は「場の強さ」という形でしか現れず、電荷を持つ粒子としては現れない。この「場の強さ」の源は長い間不明であった。

ところが、先に説明した (8.8) の境界条件を満たす D-brane が両端にくっついている開いた弦のループ（Fig.3 参照）を計算することによって、R-R 場の源が D-brane であると考えられるようになった [14]。というのも Fig.3 は正面から見ると開いた弦のループ計算に見え、横から見ると閉じた弦が１つの D-brane からもう１つの D-brane へ伝播するという見方もできるからである。

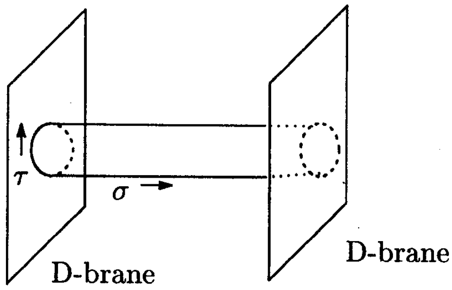

Figure 3: 開いた弦の1ループ

その様な見方は開いた弦の1ループを計算し([2] 参照)、次のモジュラー変換

$$\tau \to -\frac{1}{\tau}$$

をすることによって閉じた弦の brane 間の伝播という解釈が可能になる。この D-brane 間の距離 r が無限大の極限を考えると閉じた弦の長距離の伝播を考えることになり、長距離で寄与する粒子は質量ゼロのものだけであると考える。これらの粒子は Type II 理論では重力子と R-R 場等によるクーロン力に相当する粒子であると考えられる。このようにして R-R 場の源が D-brane であると見なすことが可能になってきたのである。

このD-brane の代表的な性質として次の様なものがある。まず、R-R 場の10次元における $(p+1)$ 階の反対称テンソル場のホッジ双対が

$$*dA_{p+1} = dA_{7-p}$$

の様に $((6-p)+1)$ 階の反対称テンソル場になることである。10次元の物理的な自由度は $10-2$ の8次元 (4次元での物理的な自由度が $4-2=2$ 次元である様に) であり、それから $(p+1)$ 次元を引いて $(7-p)$ 次元になるのである。よってII A の超弦理論には $p=0,2,4,6$ の D-brane が存在し、II B には $p=-1,1,3,5,7$ の D-brane が存在する。また、互いに双対な p 次元の D-brane と $(6-p)$ 次元の D-brane の結合定数の間には電磁双対性の Dirac の量子化条件 (8.4) と同様な関係式 (一般化された Dirac の量子化条件)

$$\mu_p \mu_{6-p} = 2\pi$$

が成り立つことが知られている。

この様にして超弦理論のソリトン解が D-brane であることがわかる。従って超弦理論と双対な理論は D-brane の理論となり、これを用いて超弦理論の様々な非摂動論的な性質が議論されている。その代表的な試みに行列模型 (Matrix Model) [16] がある。一般に N 枚の D-brane が重なると D-brane 上にの $U(N)$ 超対称 Yang-Mills 理論が存在し、D-brane が離れていくと $U(1)^N$ の理論になる [17]。その理由を以下で説明する。まず開いた弦の基底状態について (Appendix A 参照) 考えるとそこにはゲージ場 A とフェルミオン場 ψ が存在していた。 D-brane が1枚しかないときには開いた弦の両端が同じ brane 上にあり、その brane 上から離れることが出来ないため、ゲージ場 A とフェルミオン場 ψ も D-brane 上にのみ存在することになる。p 次元の D-brane(p-brane) は $p+1$ 次元時空を張るため、その上に $p+1$ 次元のゲージ群が $U(1)$ の超対称ゲージ理論が存在することになる (Fig.4 参照)。

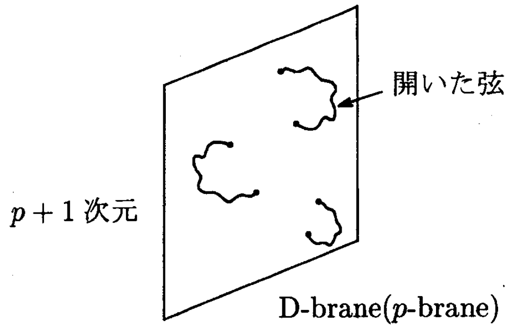

Figure 4: 1枚の D-brane

2枚の D-brane が存在するときには開いた弦の端が同じ D-brane 上にあるものと、異なる D-brane 上にあるものがあり、その様子は場（ゲージ場 A とフェルミオン場 ψ）を 2×2 の行列で表わすことで表現される。例えばゲージ場 A はエルミート行列

$$A^\mu = \begin{pmatrix} A^\mu_{11} & A^\mu_{12} \\ A^\mu_{21} & A^\mu_{22} \end{pmatrix} \tag{8.10}$$

に拡張され、対角成分 A^μ_{11} と A^μ_{22} は各々開いた弦の両端が1枚目の D-brane 上にある弦のゲージ場と、2枚目の D-brane 上にある弦のゲージ場を示す。また非対角成分 A^μ_{12}, A^μ_{21} は開いた弦の両端がそれぞれ違う D-brane 上にある弦を表わし、相互作用に関係している (Fig.5 参照)。各々の D-brane 上にゲージ群が $U(1)$ の超対称ゲージ理論が存在するので、全体としては $U(1)^2$ の超対称ゲージ理論になる。

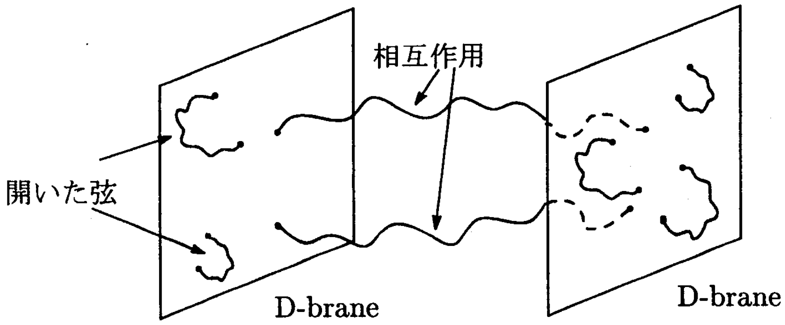

Figure 5: 2枚の D-brane

2枚の D-brane が重なると各々の D-brane 上にあったゲージ場が一緒になってゲージ群が $U(2)$ の超対称ゲージ理論が存在するようになる。一般に N 枚の D-brane が存在すると、ゲージ群が $U(1)^N$ の対称性を持つ超対称ゲージ理論になり、その N 枚の D-brane が重なるとゲージ群が $U(N)$ の超対称ゲージ理論になる。

その様子は最初 N 枚の D-brane が重なった状態の p-brane 上にあるゲージ群が $U(N)$ の Yang-Mills 理論のラグランジアンを考えることで明らかになる。p-brane 上の $U(N)$ の超対称 Yang-Mills

理論の作用は次式で表わされる。但し、時空の次元を 10 次元とする。

$$\begin{aligned} S_p &= \int d^{p+1}x \mathrm{Tr}\left\{-\frac{1}{4g^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2g^2}D_\mu X_m D^\mu X^m - \frac{1}{4g^2}[X_m, X_n]^2 \right. \\ &\left. -\frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu \psi - \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^m [A_m, \psi]\right\} \qquad (8.11) \\ \mu,\nu &= 0,...,p, \quad m,n = p+1,...,9, \quad M,N = 0,...,9 \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \\ D_\mu X_m &= \partial_\mu X_m + [A_\mu, X_m] \\ \eta^{MN} &= diag(-,+,+,...,+), \{\Gamma^M, \Gamma^N\} = 2\eta^{MN} \\ A_m &= X_m \end{aligned}$$

ここでゲージ場 A^μ、10 次元 Majorana-フェルミオン場 ψ^μ、スカラー場 X^m 全て $N\times N$ のエルミート行列である。p-brane 上 (0 次元から p 次元方向) はゲージ場 A_μ とフェルミオン場 ψ^μ は自由に動けるので、通常の Yang-Mills 理論のラグランジアンと同じであるが、$(p+1)$ 次元から 9 次元方向は場は固定されているため、その次元方向の微分 ∂_m の項はありえない。また $(p+1)$ 次元から 9 次元方向のゲージ場はスカラー場 (ヒッグス場) の性質しか持たないため、スカラー場 (X_m と書く) として扱われる。$p=0$ の時には (8.11) は Type II A 型の行列模型 [16]

$$\begin{aligned} S_{p=0} &= \int dt \mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{2g_s}(D_t X_m)^2 - \frac{1}{4g_s}[X_m, X_n]^2 + \frac{1}{2}\psi^T D_t \psi - \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^m [X_m, \psi]\right\} \qquad (8.12) \\ m,n &= 1,...,9, \quad D_t X_m = \partial_t X_m - i[A, X_m] \\ A &\equiv A_0, \quad g^2 \equiv g_s; \text{closed string coupling} \end{aligned}$$

に帰着し、$p=-1$ の時には (8.11) は前章で述べた Type II B 型の行列模型 [13]

$$\begin{aligned} S_{p=-1} &= \mathrm{Tr}\left\{-\frac{1}{4g_s}[X_m, X_n]^2 - \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^m [X_m, \psi]\right\} \qquad (8.13) \\ m,n &= 0,...,9, \end{aligned}$$

に帰着する。一般に p-brane 上の $U(N)$ の Yang-Mills 理論のポテンシャルの項は

$$V = \sum_{m,n=p+1}^{9} \mathrm{Tr}[X_m, X_n]^2 \qquad (8.14)$$

で表わされ、この $X^m (m = p+1,...,9)$ は $N\times N$ 行列のスカラー場（ヒッグス場）であり、基底状態は $V=0$ で与えられる。

$V=0$ になるためにはスカラー場 X^m は全て同時対角化可能でなければならない。スカラー場 X^m の期待値の対角成分が全て異なると対称性は $U(1)^N$ になり、もし対角成分 N 個のうちある K 個の対角成分が同じ値をとるのなら、その値を回す対称性が余分に残り、$U(K)$ の対称性になる。$U(K)$ の対称性は K 枚の D-brane が重なったときに現れる対称性なので、ヒッグス場の期待値の固有値と D-brane の座標が関係していることがわかる。そこで D-brane の座標は X^i 行列の固有値であると考える。つまり N 個の固有値のうち a 番目の固有値は N 枚の D-brane のうち a 番目の D-brane の座標を表わすと考える。このように D-brane はヒッグス場の期待値に幾何学的な意味を与える。

前述した様に、超弦理論の非摂動的な性質は D-brane の理論で議論される。具体的には前の章で述べた Type II B 型の行列模型のブロック対角部分を D-brane が何枚か集まった状態とみな

し、そのbraneの固まり同士の相互作用等を計算することができる。例えば$N \times N$行列において$p \times p$の部分行列と残りの$(N-p) \times (N-p)$部分行列がブロック対角化を成していた場合

$$
\begin{aligned}
X^m &= \begin{pmatrix} A^m & B^m \\ C^m & D^m \end{pmatrix} \\
X^m &= N \times N \text{ 行列、} A^m = p \times p \text{ 対角部分行列、} \\
D^m &= (N-p) \times (N-p) \text{ 対角部分行列} \\
m &= p+1, \ldots, 9
\end{aligned}
$$

p枚のbraneの固まりと$(N-p)$枚のbraneの固まり(braneは一般には重なっていない)の相互作用等は前章で扱った(7.16)式を使って場の理論における摂動論と同じ手法で計算できる[30]。また$p=0$のD0-braneの相互作用については詳しく調べられている[31][32]。この様にしてD-brane同士の相互作用を計算することにより、超弦理論の強結合領域における非摂動的な性質を調べることができる。しかしながら行列模型の様な離散的なモデルから、どの様にして一般相対性理論の様な幾何学的な連続理論が導かれるのか、また行列模型が記述する「時空」が何を表わしているのか、など多くの未解決の問題が残っている。最近、その問題に対する1つの提案として、TypeⅡB型の行列模型と場の理論との新たな対応を検討した[33]。その最も根本的な考えはD-instanton(D(-1)-brane)の距離の差を運動量と見なし、それをフーリエ変換する(T-dualをとる)ことで場の理論と同様な作用を導き、場の理論における繰り込みの手法を行列模型で解釈し直したことにある。それは行列模型におけるLarge Nの取り方に関係しているのであるが、この論文では[33]の内容の詳細は省略する。

Acknowledgments

この論文を書くにあたり、適切な助言と有効な議論をして頂いた菅本晶夫教授と栗木理恵さん、東大数理科学研究科の加藤晃史さんに深く感謝します。

Appendix

A Bosonic String Theory

ここではボゾン的な弦理論の基本的事項を述べる[8]。
弦理論の代表的な作用にポリヤコフ型作用があり、それは次の式で表わされる。

$$S = -\frac{T}{2}\int d^2\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \tag{A.1}$$

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-,+,+,...,+),\ \ \alpha,\beta = 0,1\ \ \mu = 0,1,...,D-1$$

$$T : \text{string tension} = \dim[T] = [\text{mass}]^2 = [\text{length}]^{-2} = \frac{1}{2\pi\alpha'}$$

この作用の古典的対称性には次の 3 種類の対称性がある。

(1) 座標付け替え変換 (2D) 不変性 $\xi_\alpha \to f_\alpha(\xi)$
(2) 局所的 Weyl 変換不変性 $g_{\alpha\beta} \to e^{\phi(\xi)}g_{\alpha\beta},\ (\sqrt{-g} \to e^{phi}\sqrt{-g})$
(3) 大局的ポアンカレ変換不変性 $X^\mu \to a^\mu + \Lambda^\mu_\nu X^\nu$

対称テンソル $g_{\alpha\beta}$ の 3 つの独立な成分は座標付け替え変換不変性 (2 つ) と局所的 Weyl 変換不変性 (1 つ) により、完全に決定された。

量子論的対称性は上記の (1) と (3) は常にある対称性であるが、(2) の局所的 Weyl 変換不変性は (2.1 章で述べた理由により)$D = 26$ での臨界次元でのみ存在する。よって臨界次元でのみ $g_{\alpha\beta}$ の 3 つの独立な成分は決定される。

次に $g^{\alpha\beta}$ に対する運動方程式から導かれる制限を見てみる。

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}$$

を使うと

$$\delta S = 0 \to -\frac{1}{2}\int d^2\xi\sqrt{-g}T_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} = 0$$

になり、そこからエネルギー、運動量テンソル $T_{\alpha\beta}$ はゼロとなることがわかる。

$$T_{\alpha\beta} = T(M_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\mathrm{tr}M) = 0 \tag{A.2}$$

但し、$M_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$ である。また Weyl 変換不変性からエネルギー、運動量テンソル $T_{\alpha\beta}$ はトレースレス $g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = 0$ であることが以下の式からわかる。

$$\delta_\phi S = -\frac{1}{2}\int d^2\xi\sqrt{-g}T_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}e^{2\phi} = 0 \to g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = 0$$

今、$g_{\alpha\beta}$ をコンフォーマルゲージ $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = diag(-,+)$ に固定して話を進めることにすると、作用は次式の様になる。

$$\begin{aligned} S &= -\frac{T}{2}\int d^2\xi\partial^\alpha X^\mu \partial_\alpha X_\mu = \frac{T}{2}\int d^2\xi(\dot{X}\cdot\dot{X} - X'\cdot X') \qquad \text{(A.3)} \\ &= \frac{T}{2}\int d^2\xi\{-(\dot{X}^0)^2 + (\dot{X}^i)^2 + (X'^0)^2 - (X'^i)^2\} \\ \text{但し、}\dot{X} &= \partial_t X,\ X' = \partial_\sigma X,\ (\xi^0,\xi^1) = (t,\sigma) \end{aligned}$$

[8] この章と次章はお茶大で行われた風間先生の集中講義の講義ノート [18] を使ってまとめた。

このゲージの下では次の様に定義された光円錐座標 (light-cone coordinates; 以下、L.C と略す) を使うのが便利である。

$$
\begin{aligned}
\xi^{\pm} &\equiv \xi^0 \pm \xi^1 = t \pm \sigma \\
\partial_{\pm} &= \frac{1}{2}(\partial_t \pm \partial_\sigma), \;\; \partial^\alpha \partial_\alpha = -4\partial_+\partial_- \\
\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta &= -(d\xi^0)^2 + (d\xi^1)^2 = \eta_{ab} d\xi^a d\xi^b, \; a, b = \pm, \;\; \alpha, \beta = 0, 1 \\
\eta_{++} &= \eta_{--} = 0, \;\; \eta_{+-} = \eta_{-+} = -\frac{1}{2}, \;\; \eta^{+-} = \eta^{-+} = 2 \\
\xi^\alpha &= e^\alpha_a \xi^a, \;\; e^\alpha_a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
\xi^a &= e^a_\alpha \xi^\alpha, \;\; e^a_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
e^\alpha_a e^a_\alpha &= 1
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

この座標を使うと作用 (A.3) は次の式で書き換えられる。

$$
S = T \int d\xi^- d\xi^+ \partial_+ X^\mu \partial_- X_\mu \tag{A.5}
$$

この作用が持っている対称性（残余対称性）を調べてみると、次の等角 (Conformal) 座標付け替え不変性がある。すなわち２つの任意の関数 f^+, f^- によって、次の変換

$$
\begin{aligned}
\xi^+ &\rightarrow \xi'^+ = f^+(\xi^+) \\
\xi^- &\rightarrow \xi'^- = f^-(\xi^-)
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

に対する不変性である。その不変性の数学的表現は Virasoro 代数と呼ばれる代数で表わされる。

$$
\begin{aligned}
\text{基底}\, \{z^n\}, \;\; z &\equiv \xi^{\pm} \\
z &\rightarrow z - \epsilon z^{n+1} \text{ の無限小変換に対する生成子を} \\
L_n &\equiv -z^{n+1}\frac{d}{dz} \text{ で定義すると} \\
z &\rightarrow (1 + \epsilon L_n) z \text{ と書くことができる。}
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

この生成子が成す代数が（古典的な）Virasoro 代数であり、次の交換関係を満たす。

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= [z^{m+1}\frac{d}{dz}, z^{n+1}\frac{d}{dz}] = [(n+1) - (m+1)] z^{m+n+1}\frac{d}{dz} \\
&= (m-n)\left(-z^{m+n+1}\frac{d}{dz}\right) \\
&= (m-n) L_{m+n}
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

さて、作用 (A.3) から導かれる運動方程式を見てみよう。作用の変分から次式の運動方程式が導かれる。

$$
\begin{aligned}
\delta S &= -T \int d^2\xi \partial^\alpha X \cdot \partial_\alpha \delta X \\
&= -T \int d^2\xi \partial_\alpha X (\partial^\alpha X \cdot \delta X) + T \int d^2\xi \partial^\alpha \partial_\alpha X \cdot \delta X \\
&\rightarrow \partial^\alpha \partial_\alpha X^\mu = (-\partial_t^2 + \partial_\sigma^2) X^\mu = 0
\end{aligned}
\tag{A.9}
$$

この２次元波動方程式の解は右向きの波 (Right-mover : $t-\sigma=\xi^-$に依存) と左向きの波 (Left-mover : $t+\sigma=\xi^+$に依存) の任意の重ね合わせであることが知られている。

$$X^\mu(\xi)=X_L^\mu(\xi^+)+X_R^\mu(\xi^-) \tag{A.10}$$

この運動方程式に対する最も一般的な解は次のモード展開の式で表わされる。

$$\begin{aligned} X^\mu(t,\sigma) &= x^\mu+\ell^2p^\mu t+\ell^2\omega^\mu\sigma+\frac{i\ell}{2}\sum_{n\neq 0}\left(\underbrace{\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in(t-\sigma)}}_{\text{Right-mover}}+\underbrace{\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in(t+\sigma)}}_{\text{Left-mover}}\right) \\ \text{但し}\ \ell &= \text{const},\ \dim[\ell]=L \end{aligned} \tag{A.11}$$

ここで x^μ は重心座標、p^μ は運動量を表わし、ω^μ は巻き数 (winding vector) を表わす。
境界条件を $t\to\infty$ で場が消える様にとると式 (A.9) から次の条件式が導かれる。

$$\begin{aligned} \delta S_{boundary} &= -T\int d\xi^2\partial_\alpha(\partial^\alpha X^\mu\delta X_\mu)\to -T\int d\sigma\partial_\sigma(\partial^\sigma X^\mu\delta X_\mu) \\ &\to \partial^\sigma X^\mu\delta X_\mu|_{\sigma=0}^{\sigma=\sigma_{max}}=0 \end{aligned} \tag{A.12}$$

弦には閉じた弦 (closed string) と開いた弦 (open string) があるが、まず最初に開いた弦について考える。弦の端を $0\leq\sigma\leq\sigma_{max}=\pi$ とすると、境界条件 (A.12) から次の２つの境界の取り方があることがわかる。

$$\begin{cases} \text{Neumann 条件} & \partial_\sigma X^\mu|_{end}=0 \\ \text{Dirichlet 条件} & \delta X^\mu|_{end}=0\to X^\mu|_{end}=\text{const}\leftrightarrow\partial_t X^\mu|_{end}=0 \end{cases} \tag{A.13}$$

これらの境界条件の意味を考えてみる。

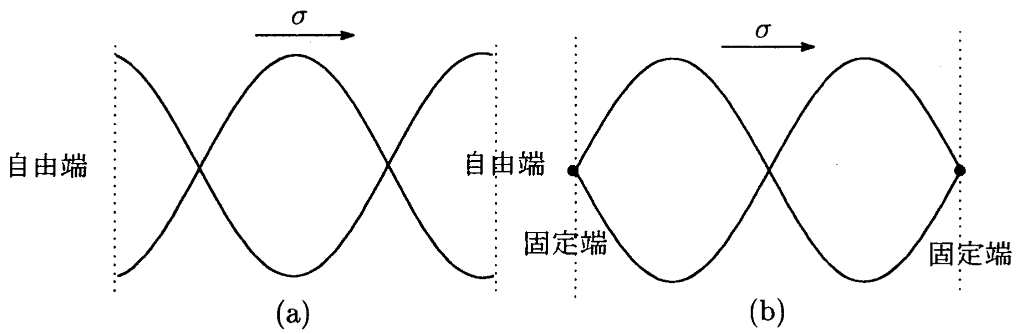

Figure 6: Neumann 条件 (a) と Dirichlet 条件 (b)

• Neumann 条件

World Sheet 上の運動量ベクトルは $p^\mu_\alpha \equiv T\partial_\alpha X^\mu$ であることがわかっている。よって式 (A.13) から、運動量ベクトルが端でゼロになることがわかる。また、開いた弦の端で自由端になっていることを表わしている。(Fig.6(a) 参考)

• Dirichlet 条件

式 (A.13) から、開いた弦の端が壁の様なもので固定されていて、動けない状態を表わすことがわかる。(Fig.6(b) 参考) もし壁が空間的に p 次元に広がっているもの ($p+1$ 次元の World-Volume を持つ) だとしたら、そのとき弦は（時空間を D 次元として）$D-(p+1)$ の空間的な Dirichlet 条件を持つ。その様な p 次元に広がっている壁を p-brane という。(Fig.7 参考)

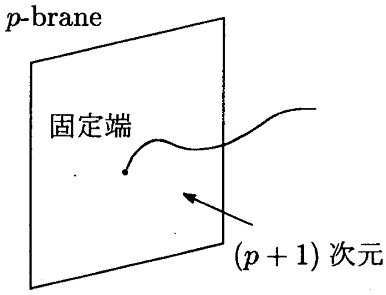

Figure 7: p-brane

上記の Neumann 条件と Dirichlet 条件を課すために、まず $X^\mu(t,\sigma)$(A.11) に対して σ と t の微分をとってみると次式になる。

$$\partial_\sigma X^\mu(t,\sigma) = \ell^2\omega^\mu - \frac{\ell}{2}\sum_{n\neq 0}\left(\alpha^\mu_n e^{-in(t-\sigma)} - \tilde{\alpha}^\mu_n e^{-in(t+\sigma)}\right) \tag{A.14}$$

$$\partial_t X^\mu(t,\sigma) = \ell^2 p^\mu + \frac{\ell}{2}\sum_{n\neq 0}\left(\alpha^\mu_n e^{-in(t-\sigma)} + \tilde{\alpha}^\mu_n e^{-in(t+\sigma)}\right) \tag{A.15}$$

開いた弦は２つの端を持つので境界条件の取り方は次の３通りある。

1.両端とも Neumann 条件

2.片端が Neumann 条件で、片端が Dirichlet 条件

3.両端とも Dirichlet 条件

それぞれの場合に対して境界条件 (A.13) と (A.14) から次の拘束条件が導かれる。
1. 両端とも Neumann 条件 (以下 N-N と略す)

$$\begin{aligned} \text{まず、}\sigma &= 0 \text{ で Neumann 条件を課すと} \\ \omega^\mu &= 0 \\ \alpha_n^\mu &= \tilde{\alpha}_\nu^\mu \qquad\qquad \text{(A.16)} \\ \text{になる。これは}\sigma &= \pi\text{でも Neumann 条件を満たす式になっている。} \end{aligned}$$

但し $n \in Z$(整数)

2. 片端が Neumann 条件で、片端が Dirichlet 条件 (以下 N-D と略す)
$\sigma = 0$ で Neumann 条件を課すと上記 (A.16) と同じ条件式になる。

$$\begin{aligned} \text{それに加えて}\sigma &= \pi \text{ で Dirichlet 条件を課すと} \\ p^\mu &= 0 \\ \alpha_n^\mu e^{in\pi} + \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\pi} &= 0 \qquad\qquad \text{(A.17)} \end{aligned}$$

但し $n \in Z + \frac{1}{2}$(半整数)

3. 両端とも Dirichlet 条件 (以下 D-D と略す)
$\sigma = \pi$ で Dirichlet 条件を課すと上記 (A.17) と同じ条件式になる。

$$\begin{aligned} \text{それに加えて}\sigma &= 0 \text{ で Dirichlet 条件を課すと} \\ p^\mu &= 0 \\ \alpha_n^\mu + \tilde{\alpha}_n^\mu &= 0 \qquad\qquad \text{(A.18)} \end{aligned}$$

但し $n \in Z$(整数)

以上の拘束条件からそれぞれの境界条件を持つ開いた弦の $X^\mu(t, \sigma)$ は次式でまとめられる。

$$\left\{ \begin{aligned} X_{NN}^\mu &= x^\mu + \ell^2 p^\mu t + i\ell \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-int} \cos n\sigma \\ X_{DD}^\mu &= x^\mu + \ell^2 \omega^\mu \sigma - \ell \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-int} \sin n\sigma \\ X_{ND}^\mu &= x^\mu + i\ell \sum_{r\in Z+\frac{1}{2}} \frac{1}{r} \alpha_r^\mu e^{-irt} \cos r\sigma \end{aligned} \right. \qquad \text{(A.19)}$$

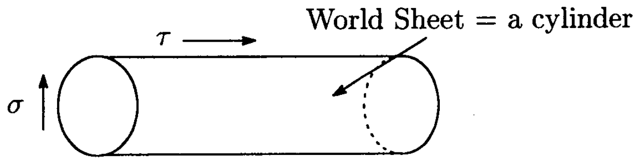

Figure 8: 閉じた弦の伝搬

次に閉じた弦について考える。閉じた弦の境界条件は周期境界条件（Fig.8 参考）になる。

$$X^\mu(t,0) = X^\mu(t,\sigma_{max}) \tag{A.20}$$

よく使われる周期境界条件には２通り ($\sigma_{max} = \pi$ の場合と 2π の場合) ある。まず、$\sigma_{max} = \pi$ の場合（これは閉じた弦の場合と似ている）について

$$\begin{cases} 0 \le \sigma \le \sigma_{max} = \pi \\ X^\mu(t,\sigma) = X^\mu_R(t-\sigma) + X^\mu_L(t+\sigma) \\ X^\mu_R(t-\sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{\ell^2}{2}p^\mu(t-\sigma) + \frac{i\ell}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha^\mu_n e^{-2in(t-\sigma)} \\ X^\mu_L(t+\sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{\ell^2}{2}p^\mu(t+\sigma) + \frac{i\ell}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}^\mu_n e^{-2in(t+\sigma)} \end{cases} \tag{A.21}$$

また、$\sigma_{max} = 2\pi$ の場合 (この境界条件は Euclidean で適している。)
この条件では (A.21) の $t \pm \sigma$ を $\frac{1}{2}(t\pm\sigma)$ に置き換える。

$$\begin{cases} 0 \le \sigma \le \sigma_{max} = 2\pi \\ X^\mu_R(t-\sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{\ell^2}{4}p^\mu(t-\sigma) + \frac{i\ell}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha^\mu_n e^{-in(t-\sigma)} \\ X^\mu_L(t+\sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{\ell^2}{4}p^\mu(t+\sigma) + \frac{i\ell}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}^\mu_n e^{-in(t+\sigma)} \end{cases} \tag{A.22}$$

以下では (A.22) の方を使う。

次に弦の量子化について考える。量子化は一般に次の対応原理に従って遂行される。

$$\{\text{ポアソン括弧}\} \to -\frac{1}{i\hbar}[\text{同時刻における交換子}],$$

(但し、今 $\hbar = 1$ にする単位系をとっているため右辺の $\hbar$ は以後、省略する。)
量子化を実行するため、まず、正準運動量を求める。正準運動量 $P^\mu(t,\sigma)$ は (A.3) から

$$\begin{aligned} L &= \frac{T}{2}(\dot{X}^2 - X'^2) \\ P^\mu(t,\sigma) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = T\dot{X}^\mu \end{aligned} \tag{A.23}$$

運動量 $P^\mu(t,\sigma)$ と X^μ が満たす交換関係は

$$\begin{aligned}
[P^\mu(t,\sigma), X^\nu(t,\sigma')] &= \frac{1}{i}\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma') \\
\to [\dot{X}^\mu(t,\sigma), X^\nu(t,\sigma')] &= \frac{1}{iT}\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma') = \frac{2\pi\alpha'}{i}\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma')
\end{aligned} \tag{A.24}$$

であり、この式に対応して X^μ のモード展開をした式 (A.11) と X^μ の時間微分の式 (A.15) から、力学変数 $(p^\mu, x^\mu, \alpha_n^\mu, \tilde{\alpha}_\nu^\mu)$ に対する次の交換関係が導かれる。

$$\begin{aligned}
[p^\mu, x^\nu] &= \frac{1}{i}\eta^{\mu\nu} \\
[\alpha_n^\mu, \alpha_{-m}^\nu] &= n\eta^{\mu\nu}\delta_{nm} \\
[\tilde{\alpha}_n^\mu, \tilde{\alpha}_{-m}^\nu] &= n\eta^{\mu\nu}\delta_{nm}
\end{aligned} \tag{A.25}$$

この交換関係を例をあげて見てみよう。

例 1 閉じた弦の場合 ((A.22) を使う)

$$\begin{aligned}
[\dot{X}^\mu(t,\sigma), X^\nu(t,\sigma')] &= \frac{\ell^2}{2}[p^\mu, x^\nu] + i\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{-n}\right)[\alpha_n^\mu, \alpha_{-n}^\nu]\, e^{in(\sigma-\sigma')} \\
&\quad + i\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{-n}\right)[\tilde{\alpha}_n^\mu, \tilde{\alpha}_{-n}^\nu]\, e^{-in(\sigma-\sigma')} \\
&= \frac{\ell^2}{2i}\eta^{\mu\nu}\sum_{n\in Z} e^{-in(\sigma-\sigma')} = \pi\frac{\ell^2}{i}\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma')
\end{aligned}$$

よって $\ell = \sqrt{2\alpha'} = \frac{1}{\sqrt{\pi T}}$ だとすると、(A.24) が成り立つ。

例 2 開いた弦で両端とも Dirichlet 条件を持つ場合 (X_{DD})(A.19)

$$\begin{aligned}
X_{DD}^\mu &= x^\mu + \ell^2\omega^\mu\sigma - \ell\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-int}\sin n\sigma \\
\dot{X}_{DD}^\mu &= i\ell\sum_{n\neq 0}\alpha_n^\mu e^{-int}\sin n\sigma \\
\left[\dot{X}^\mu(t,\sigma), X^\nu(t,\sigma')\right] &= -i\ell^2\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}[\alpha_n^\mu, \alpha_{-n}^\nu]\sin n\sigma\sin n\sigma' \\
&= -i\ell^2\eta^{\mu\nu}\sum_{n\in Z}\sin n\sigma\sin n\sigma' \\
&= -i\ell^2\eta^{\mu\nu}\pi\{\delta(\sigma-\sigma') + \delta(\sigma+\sigma')\} \\
&= \frac{\pi\ell^2}{i}\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma')
\end{aligned}$$

よってこの例 2 においても $\ell = \sqrt{2\alpha'} = \frac{1}{\sqrt{\pi T}}$ のとき、(A.24) が成り立つ。次にエネルギー、運動量テンソル $T_{\alpha\beta}$ と Virasoro 代数の関係を見ていく。エネルギー、運動量テンソル $T_{\alpha\beta}$ は (A.2) 式で書かれたことを思い出すと L.C 座標では

$$T_{ab} = T(M_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}trM_{ab}), \quad a,b = +,- \tag{A.26}$$

$$
\begin{aligned}
T_{++} &= TM_{++} = T(\partial_+ X)^2(\xi^+) &\text{(A.27)}\\
T_{--} &= TM_{--} = T(\partial_- X)^2(\xi^-) &\text{(A.28)}\\
T_{+-} &= TM_{-+} \propto (T_{+-}\eta^{+-} + T_{-+}\eta^{-+}) = T_{ab}\eta^{ab} = 0
\end{aligned}
$$

となる。この式から T_{++} と T_{--} は場 $X^\mu(t,\sigma)$ の共形変換（等角変換）(Conformal transformation) の生成子 (Generator) になっていることがわかる。古典的にはこの生成子は Poisson 括弧を使った次式の代数を満たしている。

$$
\begin{aligned}
\{T_{--}(t-\sigma), X^\mu(t,\sigma)\}_p &= 2T\partial_- X_\mu \{\partial_- X^\mu, X^\nu\} = T\partial_- X_\mu \left\{\dot{X}^\mu, X^\nu\right\}\\
&= T\partial_- X_\mu \frac{1}{T}\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma') = \partial_- X_\mu \delta(\xi^- - \xi'^-)\\
\int d\xi'^- \epsilon^-(\xi'^-)\left\{T_{--}(\xi'^-), X^\nu(\xi)\right\} &= \epsilon^-(\xi^-)\partial_- X^\nu(\xi)\\
X^\nu(\xi^+, \xi^- + \epsilon^-(\xi^-)) &= X^\nu(\xi) + \epsilon^-(\xi^-)\partial_- X^\nu(\xi)
\end{aligned}
$$

Virasoro Generators

1. 閉じた弦の場合

$$
\begin{aligned}
T_{--}(\xi^-) &\equiv \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in Z} L_n e^{-in\xi^-} &\text{(A.29)}\\
T_{++}(\xi^+) &\equiv \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in Z} L_n e^{-in\xi^+} &\text{(A.30)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{--}(\xi^-) &= T(\partial_- X)^2 = T\left(\frac{\ell^2}{4}p^\mu + \frac{\ell}{2}\sum_{n\neq Z}\alpha_n^\mu e^{-in\xi^-}\right)^2\\
&= \frac{T\ell^2}{4}\left(\sum_{n\in Z}\alpha_n^\mu e^{-in\xi^-}\right)^2\\
&= \frac{1}{4\pi}\sum_{n,m\in Z}\alpha_{n-m}^\mu \alpha_{\mu m} e^{-in\xi^-} \quad \text{但し、}\alpha_0^\mu \equiv \frac{\ell}{2}p^\mu
\end{aligned}
$$

この式から L_n と $\tilde{L}_n$ は次の式で書くことができる。

$$
\begin{aligned}
L_n &= \frac{1}{2}\sum_{m\in Z}\alpha_{n-m}^\mu \alpha_{\mu n} &\text{(A.31)}\\
\tilde{L}_n &= \frac{1}{2}\sum_{m\in Z}\tilde{\alpha}_{n-m}^\mu \tilde{\alpha}_{\mu n} &\text{(A.32)}
\end{aligned}
$$

もっとあらわに書くと

$$
\begin{aligned}
L_0 &= \frac{1}{2}{\alpha_0}^2 + \sum_{m\geq 1}\alpha_{-m}\cdot\alpha_m = \frac{\alpha'}{2}\left(\frac{1}{2}p^2 + \frac{2}{\alpha'}\sum_{m\geq 1}\alpha_{-m}\cdot\alpha_m\right) &\text{(A.33)}\\
L_{n,(n\neq 0)} &= \frac{1}{2}\sum_{m\in Z}\alpha_{n-m}\cdot\alpha_m &\text{(A.34)}
\end{aligned}
$$

と表わされる。

2．開いた弦の場合 Neumann 条件では

$$T_{--}(\xi^-) = T(\partial_- X)^2 = T\left(\frac{\ell^2}{2}p^\mu + \frac{\ell}{2}\sum_{n\neq Z}\alpha_n^\mu e^{-in\xi^-}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\sum_n L_n e^{-in\xi^-} \quad (A.35)$$

$$T_{++}(\xi^+) = T(\partial_+ X)^2 = T\left(\frac{\ell^2}{2}p^\mu + \frac{\ell}{2}\sum_{n\neq Z}\alpha_n^\mu e^{-in\xi^+}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\sum_n L_n e^{-in\xi^+} \quad (A.36)$$

T_{--} と T_{++} は関連しており、同じ Virasoro 生成子を与える。

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{m\in Z}\alpha_{n-m}\cdot\alpha_m, \text{ 但し}\alpha_0^\mu = \ell p^\mu \quad (A.37)$$

$$\text{また、特に} L_0 = \frac{1}{2}{\alpha_0}^2 + \sum_{m\geq 1}\alpha_{-m}\cdot\alpha_m = \alpha'\left(p^2 + \frac{1}{\alpha'}\sum_{m\geq 1}\alpha_{-m}\cdot\alpha_m\right) \quad (A.38)$$

Dirichlet 条件の場合も α_0^μ 以外は同じ表現で与えられる。
次にハミルトニアン $\mathcal{H} = T_{00} = T_{++} + T_{--}$ を見てみると、
開いた弦では

$$\begin{aligned} H &= \int_0^\pi d\sigma\mathcal{H} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\sigma\sum L_n e^{-int}(e^{in\sigma} + e^{-in\sigma}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi d\sigma\sum L_n e^{-int+in\sigma} = L_0 \end{aligned} \quad (A.39)$$

閉じた弦では

$$\begin{aligned} H &= \int_0^{2\pi} d\sigma\mathcal{H} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma\sum\left(L_n e^{-in(t-\sigma)} + \tilde{L}_n e^{-in(t+\sigma)}\right) \\ &= L_0 + \tilde{L}_0 \end{aligned} \quad (A.40)$$

となることがわかる。

次に、量子論的な Virasoro 代数の計算であるが、まず、計算したいのは交換関係 $[L_m, L_n]$ である。しかしながらこの計算には和に発散が現れるという困難がある [2]。この困難を避けるのには「共形場の理論」(Conformal Field Theory) で使われる技術が有効であるが、この論文ではそれについては省略する（[18] 参考)。

B Spinors in Various Dimensions

ボゾン的な弦の理論を超対称化させることを考える際にまず、どの様な次元で、どんな種類のSpinorsが存在するか見ていく。最初に計量 (Metric) を次の様に定義する。

$$
\begin{aligned}
\eta_s^{\mu\nu} &\equiv diag(\underbrace{-,-,-,\cdots,-}_{t},\underbrace{+,+,+,\cdots,+}_{s}) \qquad \text{(B.1)} \\
t &= \text{時間的な次元の数} \\
s &= \text{空間的な次元の数} \\
D &\equiv t+s = \text{時空の次元} \\
\sigma &\equiv t-s = \text{空間的な記号}
\end{aligned}
$$

実際に使われる計量は $\eta_s^{\mu\nu}$ を使って

$$
\eta^{\mu\nu} = \epsilon_\eta \eta_s^{\mu\nu} \begin{cases} \epsilon_\eta = +1 & s\text{-favored} \\ \epsilon_\eta = -1 & t\text{-favored} \end{cases} \qquad \text{(B.2)}
$$

と表わされる。
Spinor とはローレンツ群 $SO(t,s)$ の規約表現によって変換され、一定の変換則を示すものである。まず、$SO(t,s)$ の代数の表現について述べる。

1 .$SO(t,s)$ 代数の表現の定義

ローレンツ変換

$$
\begin{aligned}
x'^\mu &= \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \ \ or \ \ x' = \Lambda x \\
\text{ここで } \Lambda^\mu &\in SO(t,s), \ \ \Lambda = e^X \text{である。}
\end{aligned}
$$

Λはη を不変に保つ。すなわち

$$
\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \leftrightarrow (\eta X)^T = -(\eta X) \qquad \text{(B.3)}
$$

である。(B.3) から ηX は半対称であることがわかる。今、ηX を便宜上、次の様に書くことにする。

$$
\begin{aligned}
\eta X &= -\frac{i}{2}\epsilon_L \xi_{\alpha\beta} L^{\alpha\beta}, \ \ (\epsilon_L = \pm 1) \qquad \text{(B.4)} \\
(L^{\alpha\beta})_{\mu\nu} &= -(L^{\alpha\beta})_{\nu\mu}
\end{aligned}
$$

更に $(L^{\alpha\beta})_{\mu\nu}$ は

$$
\begin{aligned}
(L^{\alpha\beta})_{\mu\nu} &= i(M^{\alpha\beta})_{\mu\nu} \\
(M^{\alpha\beta})_{\mu\nu} &= \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\mu \equiv \delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

と書け、それらの交換関係は次式で表わされる。

$$
\left[L^{\alpha\beta}, L^{\alpha'\beta'}\right] = i\left(\eta^{\beta\alpha'}L^{\alpha\beta'} - \eta^{\alpha\alpha'}L^{\beta\beta'} - \eta^{\beta\beta'}L^{\alpha\alpha'} + \eta^{\alpha\beta'}L^{\beta\alpha'}\right) \qquad \text{(B.5)}
$$

よってベクトル x^μ の $SO(t,s)$ に対する無限小変換は

$$\begin{aligned} \delta x'^\mu &= -\frac{i}{2}\epsilon_L \xi_{\alpha\beta}(L^{\alpha\beta})^\mu_\nu x^\nu \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_L \xi_{\alpha\beta}\left(\eta^{\mu\alpha}x^\beta - \eta^{\mu\beta}x^\alpha\right) \end{aligned} \tag{B.6}$$

と表わされる。

2. クリフォード代数

次式で表わされるクリフォード代数を満たす行列が Γ 行列であり、後で示す様にローレンツ群 $SO(t,s)$ の規約表現はこの Γ 行列を使って表わされる。

$$\begin{aligned} \{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} &= 2\epsilon_{c\ell}\eta^{\mu\nu}, \ \ \epsilon_{c\ell} = \pm 1 \\ &\equiv 2\tilde{\epsilon}\eta^{\mu\nu}, \ \ \tilde{\epsilon} \equiv \epsilon_{cl}\epsilon_\eta \end{aligned} \tag{B.7}$$

また、次の様な Γ を定義する。

$$\begin{cases} \Gamma^{(t)} \equiv \Gamma^\mu & \mu : \text{時間的な添え字} \\ \Gamma^{(s)} \equiv \Gamma^\mu & \mu : \text{空間的な添え字} \end{cases} \tag{B.8}$$

(B.7) から

$$\Gamma^{(t)^2} = -\tilde{\epsilon}, \ \ \Gamma^{(s)^2} = \tilde{\epsilon} \tag{B.9}$$

Γ^μ をユニタリー行列にとると

$$\Gamma^{\mu\dagger}\Gamma^\mu = 1$$

次のエルミート性が導かれる。

$$\begin{aligned} \Gamma^{(t)\dagger} &= -\tilde{\epsilon}\Gamma^{(t)} \\ \Gamma^{(s)\dagger} &= \tilde{\epsilon}\Gamma^{(s)} \end{aligned} \tag{B.10}$$

3.Spinor 表現

前述の様に Spinor とはローレンツ群 $SO(t,s)$ の規約表現によって変換されるものであったので、その変換について次に述べる。まず次式の様なテンソルを用意する。

$$\Sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\epsilon_{c\ell}\Gamma^{\alpha\beta}$$

$$\text{但し、}\Gamma^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left[\Gamma^{\alpha},\Gamma^{\beta}\right] \quad \text{である。}$$

よって $\Sigma^{\alpha\beta}$ は次式の代数を満たす。

$$\left[\Sigma^{\alpha\beta}\ ,\ \Sigma^{\alpha'\beta'}\right] = i(\eta^{\beta\alpha'}\Sigma^{\alpha\beta'} - \cdots)$$

また、$\Sigma^{\alpha\beta}$ のエルミート性は次式で示される。

$$\left(\Sigma^{\alpha\beta}\right)^{\dagger} = \frac{i}{4}\epsilon_{c\ell} = \begin{cases} \Sigma^{\alpha\beta} & \text{for} \quad \alpha,\beta = tt \text{ or } ss \\ -\sum^{\alpha\beta} & \text{for} \quad \alpha,\beta = ts \text{ or } st \end{cases} \tag{B.11}$$

最後の式からわかる様に $\Sigma^{\alpha\beta}$ は $\alpha,\beta = ts, st$ の場合にはエルミートではない。
この $\Sigma^{\alpha\beta}$(すなわち Γ 行列) を使って、Spinor は次式の様に変換されるものとして定義される。

$$\psi' = S\psi = e^{X_s}\psi \tag{B.12}$$

$$X_s = -\frac{i}{2}\epsilon_L\xi_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta} = \frac{\epsilon_{c\ell}\epsilon_L}{8}\xi_{\alpha\beta}\left[\Gamma^{\alpha}\ ,\ \Gamma^{\beta}\right]$$

4. Dirac Conjugate , 行列 A と不変性

$\Sigma^{\alpha\beta}$ はエルミート性を必ずしも満たさないので、$\psi^{\dagger}$ は ψ の逆数的には変換されない。すなわち

$$(\psi^{\dagger})' = \psi^{\dagger}e^{X_s{}^{\dagger}} = \psi\exp\left(-\frac{\epsilon_{c\ell}\epsilon_L}{8}\xi_{\alpha\beta}\left[\Gamma^{\alpha\dagger}\ ,\ \Gamma^{\beta\dagger}\right]\right) \neq \psi^{\dagger}e^{-X_s}$$

である。そこで次の様な性質を持つ行列 A を仮定する。

$$A^{-1}\Gamma^{\alpha\dagger}A = \epsilon_A\Gamma^{\alpha}, \ \ \epsilon_A = \pm 1 \tag{B.13}$$

この行列 A を使って $\bar{\psi}$ を定義する。

$$\bar{\psi}' \equiv \psi'^{\dagger}A = \psi^{\dagger}\underbrace{AA^{-1}}_{1}e^{X_s{}^{\dagger}}A$$

$$= \psi^{\dagger}A\exp\left(-\frac{\epsilon_{c\ell}\epsilon_L}{8}\xi_{\alpha\beta}\left[\Gamma^{\alpha}\ ,\ \Gamma^{\beta}\right]\right) = \bar{\psi}e^{-X_s}$$

$$\bar{\psi} \equiv \psi^{\dagger}A \tag{B.14}$$

この $\bar{\psi}$ は Dirac Conjugate と呼ばれ、それは ψ の逆数的に変換する。また $(\bar{\psi}\psi)$ は $SO(t,s)$ の変換の下で不変である。次に A のあらわな形を見てみる。式 (B.10) を思い出してみると、

$$\Gamma^{(t)\dagger} = -\tilde{\epsilon}\Gamma^{(t)}, \ \ \Gamma^{(s)\dagger} = \tilde{\epsilon}\Gamma^{(s)}$$

であった。A の変換で $\Gamma^{(t)}$ と $\Gamma^{(s)}$ の符号を同じにするように A を選ぶと次の形になる。

$$A \equiv \Gamma^0\Gamma^1, \cdots, \Gamma^{t-1} \tag{B.15}$$

例えば Minkowski($t = 1 \rightarrow A = \Gamma^0$) の場合を見てみると、$A$ の変換で Γ^t と Γ^s はそれぞれ次の様に変換される。

$$\begin{aligned} A^{-1}\Gamma^{\alpha\dagger}A &= \Gamma^{0^{-1}}\Gamma^{\alpha\dagger}\Gamma^0 \ \text{なので、} \\ \Gamma^{0^{-1}}\Gamma^{t\dagger}\Gamma^0 &= -\tilde{\epsilon}\Gamma^{0^{-1}}\Gamma^t\Gamma^0 = -\tilde{\epsilon}\Gamma^t\Gamma^{0^{-1}}\Gamma^0 = -\tilde{\epsilon}\Gamma^t \\ \Gamma^{0^{-1}}\Gamma^{s\dagger}\Gamma^0 &= +\tilde{\epsilon}\Gamma^{0^{-1}}\Gamma^s\Gamma^0 = -\tilde{\epsilon}\Gamma^s\Gamma^{0^{-1}}\Gamma^0 = -\tilde{\epsilon}\Gamma^s \end{aligned}$$

よってこの場合、$\Gamma^{(t)}$ と $\Gamma^{(s)}$ は同符号で変換される。

Γ の並び換えに対して符号に注意すると、A について次の様な性質を持つことがわかる。

$$\begin{aligned} A^\dagger A &= 1 \\ A^{-1} &= A^\dagger = (-\epsilon)^t\Gamma^{t-1}\Gamma^{t-2}\cdots\Gamma^0 \\ &= (-\tilde{\epsilon})^t(-1)^{\frac{1}{2}t(t-1)}A = (-\tilde{\epsilon})^t(-1)^{[\frac{t}{2}]}A \\ \left[\frac{t}{2}\right] &\equiv \frac{t}{2}\text{の整数部分を表わす。} \end{aligned}$$

よって A の変換性は次式の様になることがわかる。

$$A^{-1}\Gamma^{\mu\dagger}A \left(= A\Gamma^{\mu\dagger}A^{-1}\right) = \underbrace{\tilde{\epsilon}(-1)^t}_{\epsilon_A}\Gamma^\mu \tag{B.16}$$

5. Charge Conjugate と行列 B

$\pm\Gamma^{\mu *}$ は Γ^μ と同じクリフォード代数に従うことがわかっている。

$$[\Gamma^\mu\ ,\ \Gamma^\nu] = 2\tilde{\epsilon}\eta_s^{\mu\nu} \rightarrow [\Gamma^{\mu *}\ ,\ \Gamma^{\nu *}] = 2\tilde{\epsilon}\eta_s^{\mu\nu}$$

次の様な性質を持つ行列 B を仮定する。

$$B\Gamma^{\mu *}B^{-1} = \epsilon_B\Gamma^\mu,\ \ \epsilon_B = \pm 1 \tag{B.17}$$

行列 B は Charge Conjugate を考える際に有効である。Dirac 方程式を思い出してみると、

$$\begin{aligned} (a_D\Gamma^\mu D_\mu - m)\,\psi &= 0 \qquad \text{(B.18)} \\ \text{但し、}D_\mu &= \partial_\mu + ieA_\mu \end{aligned}$$

であった。ここで a_D は位相因子であり、それは以下の手続きで決めることができる。ψ が Klein-Gordon 方程式も満たしていることを思い出すと、それは

$$\{\underbrace{{D_0}^2 + {D_1}^2 + \cdots + {D_{t-1}}^2}_{D^2_{(t)}} - \underbrace{\left({D_t}^2 + \cdots + {D_{D-1}}^2\right)}_{D^2_{(s)}} + m^2\}\psi = 0 \tag{B.19}$$

と書ける。(B.9) 式から

$$(\Gamma^\mu D_\mu)^2 = -\tilde{\epsilon}\left(D_{(t)}^2 - D_{(s)}^2\right)$$

であるので、Dirac 方程式 (B.18) の左から $(a_D\Gamma^\mu D_\mu + m)$ をかけると

$$(a_D\Gamma^\mu D_\mu + m)(a_D\Gamma^\mu D_\mu - m)\psi = \left\{a_D^2(-\tilde{\epsilon})\left(D_{(t)}^2 - D_{(s)}^2\right)\right\}\psi$$

という形に変形できる。この式と (B.19) を比べると、位相因子 a_D に対して次の条件式が得られる。

$$a_D^2\tilde{\epsilon} = 1 \tag{B.20}$$

$$\text{よって } a_D = \begin{cases} i & \text{for } \tilde{\epsilon} = -1 \\ 1 & \text{for } \tilde{\epsilon} = 1 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} s\text{-favored} & (\Gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0 \\ t\text{-favored} & (i\Gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0 \end{cases}$$

であることがわかる。次に Dirac 方程式 (B.18) の複素共役をとり、左から $\epsilon_B a_D^2 B$ をかけると

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon_B a_D^2 B\left(a_D^*\Gamma^{\mu *}D_\mu^* - m\right)B^{-1}B\psi^* \\ &= \left(a_D\Gamma^\mu D_\mu^* - m\epsilon_B a_D^2\right)B\psi^* \end{aligned}$$

になる。ここで

$$\epsilon_B^2 = 1,\ \ B^{-1}B = 1,\ \ a_D^2 a_D^* = a_D$$

と式 (B.17) を使った。よって $B\psi^*$ は Dirac 方程式の複素共役の方程式を満たすことがわかった。
この $B\psi^*$ を

$$\psi^c \equiv B\psi$$

と定義し、ψ の Charge conjugate という。
質量がある場合 $(m \neq 0)$ には $\epsilon_B a_D^2 = 1$ である必要があり、(B.20) からこの時、ϵ_B は

$$\epsilon_B\tilde{\epsilon}\,(\equiv \eta) = 1$$

を満たすことがわかる。
ψ^c は ψ と全く同じ様に変換する。
<u>証明</u>

$$\begin{aligned} \psi'^* &= e^{X_s^*}\psi^* \\ \psi^{c\prime *} &= B\psi'^* = Be^{X_s^*}B^{-1}B\psi^* \\ &= \exp\left(BX_s^*B^{-1}\right)\psi^c = e^{X_s}\psi^c \\ \text{よって } \psi^{c\prime *} &= e^{X_s}\psi^c \end{aligned} \tag{B.21}$$

ここで

$$BX_s^*B^{-1} = \frac{\epsilon_{c\ell}\epsilon_L}{8}\xi_{\alpha\beta}B\left[\Gamma^{\alpha *}\ ,\ \Gamma^{\beta *}\right]B^{-1} = X_s$$

を使った。
行列の重要な性質が２つある。
(1). B がユニタリーであること。
<u>証明</u>

$$\begin{aligned} \epsilon_B \Gamma^\mu &= B\Gamma^{\mu *}B^{-1} \\ \rightarrow \epsilon_B \Gamma^{\mu \dagger} &= B^{-1\dagger}\Gamma^{\mu\dagger}B^\dagger \end{aligned}$$

この２式と $\Gamma^{\mu\dagger}\Gamma^\mu = 1$, ${\epsilon_B}^2 = 1$ を使うと次の式が導かれ、

$$1 = \Gamma^{\mu\dagger}\Gamma^\mu = B^{-1\dagger}\Gamma^{\mu\dagger}B^\dagger B\Gamma^{\mu *}B^{-1}$$

この式に左から $B^\dagger$、右から $B\Gamma^{\mu T}$ をかけ、$\Gamma^{\mu *}\Gamma^{\mu T} = 1$ を使うと

$$\begin{aligned} B^\dagger B\Gamma^{\mu T} &= \Gamma^{\mu T}B^\dagger B \\ \rightarrow \left[B^\dagger B\ ,\ \Gamma^{\mu T}\right] = 0 & \end{aligned} \tag{B.22}$$

となり、$B^\dagger B$ がどんな $\Gamma^{\mu T}$ とも交換することから

$$B^\dagger B = \lambda\, 1 \quad \lambda = \mathrm{const}$$

が導かれる (Schur's Lemma)。λ は任意の定数なのでそれを 1 に選ぶと、

$$B^\dagger B = 1$$

である。
(2). $B^* B = \epsilon$, $(\epsilon = \pm)$ であること。
<u>証明</u>
(B.17) の左から ϵ_B をかけると

$$\Gamma^\mu = \epsilon_B B\Gamma^{\mu *}B^{-1}$$

になり、それを使って計算を進める。

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu *} &= \epsilon_B B^* \Gamma^\mu B^{*-1} \\ &= \epsilon_B B^* \left(\epsilon_B B\Gamma^{\mu *}B^{-1}\right) B^{*-1} \\ &= B^* B\Gamma^{\mu *}\left(B^* B\right)^{-1} \\ \rightarrow [B^* B\ ,\ \Gamma^{\mu *}] &= 0 \\ \rightarrow B^* B &= \epsilon 1 \end{aligned} \tag{B.23}$$

この式と $B^\dagger B = 1$ から

$$B = \epsilon B^T,\ B^T = \epsilon B \rightarrow B = \epsilon^2 B$$

になり、次式が導かれる。

$$\epsilon = \pm 1$$

6. Charge Cnjugation と行列 C、その性質

ψ^c と $\bar{\psi}$ を結び付ける行列 C を考える。

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger A, \ \ \psi^c = B\psi^*$$

から C は

$$\begin{aligned} \psi^c &= C\bar{\psi}^T = \underbrace{CA^T}_{B}\psi^* \\ \to C &= \text{Charge Conjugation matix} = BA^{T^{-1}} = BA^* \end{aligned} \tag{B.24}$$

(B.16)、(B.17) から行列 A と B の変換性は

$$\begin{cases} A: \ \ \Gamma^{\mu\dagger} \to \Gamma^\mu \quad A\Gamma^{\mu\dagger}A^{-1} = \tilde{\epsilon}(-1)^t\Gamma^\mu \\ B: \ \ \Gamma^{\mu *} \to \Gamma^\mu \quad B\Gamma^{\mu *}B^{-1} = \epsilon_B\Gamma^\mu \end{cases} \tag{B.25}$$

であったので、そこから 行列 C の変換性は次式になる。

$$\begin{aligned} C: \ \Gamma^{\mu T} \to C\Gamma^{\mu T}C^{-1} &= \epsilon_C\Gamma^\mu \\ \text{但し、}\epsilon_C = \epsilon_B\tilde{\epsilon}(-1)^t & \end{aligned} \tag{B.26}$$

なぜなら

$$\begin{aligned} C\Gamma^{\mu T}C^{-1} &= B(A^T)^{-1}\Gamma^{\mu T}A^TB^{-1} = B\left\{(A^T)^{-1*}\Gamma^{\mu\dagger}A^\dagger\right\}^*B^{-1} \\ &= B\left\{A\Gamma^{\mu\dagger}A^{-1}\right\}^*B^{-1} = \tilde{\epsilon}(-1)^tB\Gamma^{\mu *}B^{-1} \\ &= \epsilon_B\tilde{\epsilon}(-1)^t\Gamma^\mu\tilde{\epsilon}(-1)^t\Gamma^\mu \end{aligned}$$

だからである。また行列 A と B がユニタリーなので C もユニタリーである。

$$C^\dagger C = 1$$

その他の行列 C の性質として C とその転置行列 C^T が比例関係であることが以下の様に示される。

$$\begin{aligned} C^T &= A^{-1}\underbrace{B^T}_{=\epsilon B} = \epsilon(-\tilde{\epsilon})^t(-1)^{[\frac{1}{2}]}AB \\ C &= C(A^T)^{-1}A^T = CA^*A^T = C\Gamma^{0*}\Gamma^{1*}\cdots\Gamma^{t-1*}A^T \\ &= CB^{-1}B\Gamma^{0*}B^{-1}B\Gamma^{1*}B^{-1}B\cdots B^{-1}B\Gamma^{t-1*}B^{-1}BA^T = C\epsilon_B^tB^{-1}ABA^T \\ &= \epsilon_B^tAB \\ &\to \ C^T = \epsilon_{ct}C, \ \ \epsilon_{ct} \equiv \epsilon(-\underbrace{\epsilon_B\tilde{\epsilon}}_{\eta})^t(-1)^{[\frac{1}{2}]} \end{aligned} \tag{B.27}$$

7. 実 Spinor と Γ^μ 行列の Majorana 表現

ψ が実であるということは以下の事を意味する。

$$\psi = \psi^C$$

ψ^C は次の性質

$$\left(\psi^C\right)^C = \psi^C$$

を持たせたい。この性質は実数の複素共役を２度かけたものがもとの実数にもどる性質と類似している。そのためにどの様な条件が必要か見てみると、

$$\left(\psi^C\right)^C = B(B\psi^*)^* = \underbrace{BB^*}_{\epsilon}\psi$$

$\epsilon = 1$ の時、上記右辺は ψ に戻ることがわかる。よって実 Spinor は

$$\epsilon = +1$$

の時に存在することがわかる。このとき行列 B は $B = 1$ である。この B のことを行列 Γ^μ の Majorana 表現という。実 Spinor は $\eta = \epsilon_B\tilde{\epsilon}$ を使ってさらに詳しく次の様に分類される。

$$\begin{cases} \text{Majorana} & \epsilon = 1 \quad \eta = 1 \\ \text{Pseudo-Majorana} & \epsilon = 1 \quad \eta = -1, \quad \eta \equiv \epsilon_B\tilde{\epsilon} \end{cases} \tag{B.28}$$

8. $\Gamma^{(n)}C$ の対称性と ϵ の決定

$\Gamma^{(n)}$ を次式で定義する。

$$\Gamma^{(n)} \equiv \Gamma^{\mu_1\cdots\mu_n} = \Gamma^{[\mu_1}\Gamma^{\mu_2}\ldots\Gamma^{\mu_n]} \tag{B.29}$$

μ_i が全て異なる時、

$$\Gamma^{(n)} = \Gamma^{\mu_1\cdots\mu_n} = \Gamma^{\mu_1}\Gamma^{\mu_2}\ldots\Gamma^{\mu_n}$$

と規格化する。例えば $n = 4$(4 次元) の場合は

<u>例 4</u>

$$\begin{array}{lll} \Gamma^{(0)} & 1 & 1 \\ \Gamma^{(1)} & \Gamma^{\mu_1} & 4 \\ \Gamma^{(2)} & \Gamma^{[\mu_1}\Gamma^{\mu_2]} & 6 \ ({}_4C_2 = 6) \\ \Gamma^{(3)} & \Gamma^{[\mu_1}\Gamma^{\mu_2}\Gamma^{\mu_3]} & 4 \ ({}_4C_3 = 4) \\ \Gamma^{(4)} & \Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3\Gamma^4 & 1 \end{array} \tag{B.30}$$

となる。この場合、計 16 個の Γ があることがわかる。但し $(\mu_1, \mu_2, \mu_3 = 1, ..., 4)$ である。
$\Gamma^{(n)}C$ は対称にも反対称にもなり得るので、それは後で見るように重要な役割を持つ。$\Gamma^{(n)}C$ の性質を見るために、まず $\Gamma^{(n)}C$ の転置を計算する。

$$\begin{aligned}
\left(\Gamma^{(n)}C\right)^T &= C^T\left(\Gamma^{[\mu_1}\Gamma^{\mu_2}\cdots\Gamma^{\mu_n]}\right)^T \\
&= C^T\Gamma^{T[\mu_n}\Gamma^{T\mu_{n-1}}\cdots\Gamma^{T\mu_1]} \\
&= C^T\left\{(-1)^t\epsilon_B\tilde{\epsilon}\right\}^n C^{-1}\Gamma^{[\mu_n}\Gamma^{\mu_{n-1}}\cdots\Gamma^{\mu_1]}C \\
&= \epsilon_{ct}\epsilon(n)\Gamma^{(n)}C \\
\text{但し、}\epsilon(n) &= \eta^n(-1)^{[1/2]+nt}, \ \ \eta \equiv \epsilon_B\tilde{\epsilon}
\end{aligned} \tag{B.31}$$

ここで

$$\begin{aligned}
C\Gamma^T C^{-1} &= \epsilon_C\Gamma^\mu, \ \ \epsilon_C = (-1)^t\epsilon_B\tilde{\epsilon} \\
C^T &= \epsilon_{ct}C, \ \ \epsilon_{ct} = (-1)^{[t/2]}(-\epsilon_B\tilde{\epsilon})^t\epsilon \\
\Gamma^{[\mu_n}\Gamma^{\mu_{n-1}}\cdots\Gamma^{\mu_1]} &= (-1)^{[n/2]}\Gamma^{[\mu_1}\Gamma^{\mu_2}\cdots\Gamma^{\mu_n]}
\end{aligned}$$

を使った。また $C^{-1}\Gamma^{(n)}$ も、上記と同じ対称性の性質を持つことが容易に示される（ここでは省略する)。
まず、D が偶数の場合の ϵ を決定する。ϵ を決定するためには、$\Gamma^{(n)}C$ の反対称な行列の数 $(\equiv N_A)$ を数える必要がある。

(1). D が偶数の場合、$\Gamma^{(n)}(\Gamma^{(0)} \equiv 1)$ は $2^{(D/2)} \times 2^{(D/2)}$ の行列を基底にして、形成される。もし C が特異な数でないならば、$\Gamma^{(n)}C$ も同様な基底で形成される。よって N_A は $2^{(D/2)}$ 次元行列の反対称行列の数に一致する。その数は

$$N_A = \frac{1}{2}2^{D/2}\left(2^{(D/2)} - 1\right) \tag{B.32}$$

になる。例えば $D = 4$ の場合、16 個の Γ 行列のうち、反対称行列の数は次の 6 つであることがわかる。(Appendix C 参照)

$$\begin{gathered}
\Gamma^1, \ \Gamma^3, \ \Gamma^{[1}\Gamma^{3]}, \ \Gamma^{[0}\Gamma^{2]} \\
\Gamma^{[1}\Gamma^2\Gamma^{3]}, \ \Gamma^{[0}\Gamma^1\Gamma^{3]}
\end{gathered}$$

(2). また N_A は ${}_DC_n = \binom{D}{n}$ を使って、次式の様に書くこともできる。

$$\begin{aligned}
N_A &= \sum_{n=0}^{D}\frac{1}{2}\left(1 - \epsilon_{ct}\epsilon(n)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{D}\binom{D}{n} - \frac{1}{2}\epsilon_{ct}\sum_{n=0}^{D}\epsilon(n)\binom{D}{n} \\
&= \frac{1}{2}2^D \cdot 2^D - \frac{1}{2}\epsilon_{ct}\sum_{n=0}^{D}\epsilon(n)\binom{D}{n}
\end{aligned} \tag{B.33}$$

(B.33) の和を計算するためにまず、$\epsilon(n)$ を次の様に変形する。

$$\begin{aligned}
\epsilon(n) &= \eta^n(-1)^{\left[\frac{1}{2}\right]+nt} \\
&= \eta^n(-1)^{n(n-1)/2}(-1)^{nt} \\
&= \eta^n(-1)^{n(n-1)/2}(-1)^{nt} \\
&= \sqrt{2}Re\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(i\eta(-1)^t\right)^n
\end{aligned}$$

ここで

$$(-1)^{n(n-1)/2} = \sqrt{2} Re\, e^{i\frac{\pi}{4}(2n-1)}$$

を使った。従って

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{D} \epsilon(n) \binom{D}{n} &= \sqrt{2} Re\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(1 + i\eta(-1)^t\right)^D \\ &= \sqrt{2} \cos\frac{\pi}{4} \left(\eta(-1)^t D - 1\right) \end{aligned}$$

以上の式と

$$\epsilon_{ct} = \epsilon\,(-\eta^n)^t\,(-1)^{\left[\frac{t}{2}\right]}$$

を使って (B.32) と (B.33) を比べると、以下の様に ϵ を書くことができる。

$$\epsilon = \sqrt{2}(-\eta)^t(-1)^{t(t-1)/2} \cos\frac{\pi}{4}\left((-\eta)(-1)^{t+1}D - 1\right)$$

更に次式の恒等式

$$\begin{aligned} \rho^t &= e^{i\frac{\pi}{2}(\rho+3)t},\ \rho \equiv \pm 1 \\ \rightarrow \rho^t(-1)^{t(t-1)/2} &= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}\,(2\rho t - 1) \end{aligned}$$

を使うと、ϵ は以下の式になる。

$$\begin{aligned} \epsilon &= 2\cos\frac{\pi}{4}\,(2\eta t + 1)\cos\frac{\pi}{4}\left(\eta(-1)^t D - 1\right) \\ \rightarrow \epsilon &= \cos\frac{\pi}{4}\sigma + \eta\sin\frac{\pi}{4}\sigma \\ \text{但し、}\sigma &= s - t = D - 2t = \text{偶数} \end{aligned} \tag{B.34}$$

- $\eta = 1$ の場合

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & \sigma = 0, 2 \pmod 8 \\ -1 & \sigma = 4, 6 \pmod 8 \end{cases} \tag{B.35}$$

よって $\sigma = 0, 2 \pmod 8$ のとき、実 Spinor(Γ の Majorana 表現) が存在する。
例えば

$$\begin{array}{lll} \text{Euclidean} & t = 0 & D = 2, 8, 10, \ldots \\ \text{Minkowski} & t = 1 & D = 2, 4, 10, 12, \ldots \\ \text{2-time} & t = 2 & D = 4, 6, 12, 14, \ldots \end{array} \tag{B.36}$$

- $\eta = -1$ の場合

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & \sigma = 0, 6 \pmod 8 \\ -1 & \sigma = 2, 4 \pmod 8 \end{cases} \tag{B.37}$$

よって $\sigma = 0, 6 \pmod 8$ のとき、実 Spinor(Γ の Pseudo-Majorana 表現) が存在する。
例えば

$$\begin{array}{lll} \text{Euclidean} & t=0 & D=6,8,14,... \\ \text{Minkowski} & t=1 & D=2,8,10,... \\ \text{2-time} & t=2 & D=2,4,10,12,... \end{array} \tag{B.38}$$

9. $\bar{\Gamma}$ の定義と Chirality Projection($D=$ 偶数の場合)

次の様な Γ^{D+1} を定義する。

$$\begin{aligned} \Gamma^{D+1} &\equiv \Gamma^0\Gamma^1\cdots\Gamma^{D-1} \\ \to \{\Gamma^{D+1}, \Gamma^\mu\} &= 0, \quad \mu = 0,1,...,D-1 \end{aligned}$$

Γ^{D+1} は次の性質を持つことがわかる。

$$\left(\Gamma^{D+1}\right)^2 = (-1)^{\sigma/2} = \begin{cases} 1 & \sigma = 0 \pmod 8 \\ -1 & \sigma = 2 \pmod 8 \end{cases}$$

また、$\bar{\Gamma}$ を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} &\equiv a_{\bar{\Gamma}}\Gamma^{D+1} \\ \bar{\Gamma}^2 &= 1 \text{ の性質を持つために、} \\ a_{\bar{\Gamma}}^2 &= (-1)^{\sigma/2}\text{が必要である。} \end{aligned}$$

この性質をもつ $\bar{\Gamma}$ は次の式で書くことが可能である。

$$\bar{\Gamma} = \tilde{\epsilon} e^{-i\pi\sigma/4}\Gamma^{D+1} \tag{B.39}$$

$\bar{\Gamma}$ と Γ^{D+1} は次の 4 つの性質を持つ。

(1) $\left(\Gamma^{D+1}\right)^\dagger = \left(\Gamma^{D+1}\right)^{-1} = (-1)^{\sigma/2}\Gamma^{D+1}$

(2) $B\Gamma^{D+1*}B^{-1} = \Gamma^{D+1}$

$A\Gamma^{D+1\dagger}A^{-1} = (-1)^{D/2}\Gamma^{D+1}$

$C\Gamma^{D+1T}C^{-1} = (-1)^{D/2}\Gamma^{D+1}$

(3) $\bar{\Gamma}^\dagger = \bar{\Gamma}^{-1} = \bar{\Gamma}$

(4) $B\bar{\Gamma}^* B^{-1} = (-1)^{\sigma/2}\bar{\Gamma}$

$A\bar{\Gamma}^\dagger A^{-1} = (-1)^{\sigma/2}(-1)^{D/2}\bar{\Gamma}$

$C\bar{\Gamma}^T C^{-1} = (-1)^{D/2}\bar{\Gamma}$

また、$P_\pm$(Chiral Projection) と $\psi_\pm$(Chiral Spinors) を次式で定義する。

$$P_\pm \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \bar{\Gamma}) \tag{B.40}$$

$$\psi_\pm \equiv P_\pm \psi \tag{B.41}$$

$\psi_\pm$ は次の性質を持つ

$$\begin{cases} \bar{\Gamma}\psi_\pm = \pm\psi_\pm \\ P_\pm\psi_\pm = \pm\psi_\pm \\ P_\pm\psi_\mp = 0 \end{cases}$$

10. 奇数次元における実 Spinor

まず、偶数次元 D の空間次元 s に 1 を足した次元 D' を考える。

$$D' = D + 1 = s' + t, \quad s' = s + 1$$

それに加えて、次式の様な Γ^D を定義する。

$$\Gamma^D \equiv a\Gamma^{D+1}$$

Γ^D に以下の性質

$$\left(\Gamma^D\right)^2 = 1, \quad \Gamma^{D\dagger}\Gamma^D = 1$$

を持たせると a が

$$a^2 = \tilde{\epsilon}(-1)^{\sigma/2} = \epsilon_B\eta(-1)^{\sigma/2} \tag{B.42}$$

になり、また Γ^D は A, B, C の変換の下で他の Γ^μ と同様な変換をすることを要請すると以下の様に η が決定する。

$$\begin{cases} A\Gamma^{D\dagger}A^{-1} = \tilde{\epsilon}(-1)^t\Gamma^D & \to a^* = \tilde{\epsilon}(-1)^t(-1)^{D/2}a = \epsilon_B\eta(-1)^{\sigma/2}a \\ B\Gamma^{D*}B^{-1} = \epsilon_B\Gamma^D & \to a^* = \epsilon_B \\ & \to \eta = (-1)^{\sigma/2} \end{cases} \tag{B.43}$$

$|a| = 1$ と (B.42) から $\tilde{\epsilon}$ と Γ^D と σ の関係が以下の様に示される。

$$\tilde{\epsilon} = 1, \ \Gamma^D = \begin{cases} \Gamma^{D+1} & \sigma = 0 \pmod 4 \\ i\Gamma^{D+1} & \sigma = 2 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\tilde{\epsilon} = -1, \ \Gamma^D = \begin{cases} i\Gamma^{D+1} & \sigma = 0 \pmod 4 \\ \Gamma^{D+1} & \sigma = 2 \pmod 4 \end{cases}$$

また、ϵ は次式で決定される。

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= \cos\frac{\pi}{4}\sigma + (-1)^{\sigma/2}\sin\frac{\pi}{4}\sigma \\
\to \epsilon &= \begin{cases} +1 & \sigma = 0, 6 \pmod 8 \\ -1 & \sigma = 2, 4 \pmod 8 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{B.44}
$$

以上の議論では空間次元 s に 1 を足した次元 D' を考えてきたが、時間次元 t に 1 を足した次元を考えた場合、$(\Gamma^D)^2 = -1$ になるが、結果的に本質的な違いはない。

11. 実 Spinor 以外の分類

実 Spinor は $\epsilon = -1$ の場合には存在しない。しかしもし、2つの Spinor ψ^i, $(i = 1, 2)$ があり、ψ^i が $SU(2)$ 実条件

$$
\psi_i = \epsilon_{ij} B \psi_j{}^*, \quad \epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ SU(2) \text{ 不変}
$$

を満たす場合、次式が導かれ、

$$
\begin{aligned}
\psi_i &= \epsilon_{ij} B \psi_j{}^* = \epsilon_{ij} B \left(\epsilon_{jk} B^* \psi_k\right) \\
&= -BB^* \psi_i \\
\to BB^* &= \epsilon = -1
\end{aligned}
$$

ϵ と η の符号によって以下の様に分類される。

$$
\begin{array}{lll}
\text{SU(2)-Majorana} & \epsilon = -1 & \eta = 1 \\
\text{SU(2)-Pseudo-Majorana} & \epsilon = -1 & \eta = -1
\end{array}
\tag{B.45}
$$

12. Chiral Projection との関係 ($D =$ 偶数の場合)

行列 B と $\bar{\Gamma}$ の次の性質

$$
B\bar{\Gamma}^* B^{-1} = (-1)^{\sigma/2}\bar{\Gamma}
$$

を思い出すと、行列 B と $\bar{\Gamma}$ は $(-1)^{\sigma/2} = 1$ の時、すなわち

$$
\sigma = 0 \pmod 4
$$

の時、交換することがわかる。この場合には Majorana 条件や Pseudo-Majorana 条件に加えて Weyl 条件を課すことができる。

Spinorの種類と次元のまとめ

$$\begin{cases} \text{Majorana} & M \quad \epsilon=1 \quad \eta=1 \quad \sigma=0,1,2 \\ \text{Pseudo-Majorana} & \tilde{M} \quad \epsilon=1 \quad \eta=-1 \quad \sigma=6,7,8 \quad (\text{mod } 8) \end{cases} \tag{B.46}$$

$$\begin{cases} \text{SU(2)-Majorana} & M_2 \quad \epsilon=-1 \quad \eta=1 \quad \sigma=4,5,6 \\ \text{SU(2)-Pseudo-Majorana} & \tilde{M}_2 \quad \epsilon=-1 \quad \eta=-1 \quad \sigma=2,3,4 \end{cases} \tag{B.47}$$

Weyl条件は偶数次元だったら、

$$\sigma=0,4 \quad (\text{mod } 8)$$

でいつでも課せる。まとめると

D	$t=0$(Euclidean)	$t=1$(Minkowski)	$t=2$
12	$W,\ M_2,\ \tilde{M}_2$	$M,\ \tilde{M}_2,$	$W,\ M,\ \tilde{M}$
11	$\tilde{M}_2$	M	$\tilde{M}$
10	$M,\ \tilde{M}_2$	$W,\ M,\ \tilde{M}$	$M_2,\ \tilde{M}$
9	M	$\tilde{M}$	M_2
8	$W,\ M,\ \tilde{M}$	$M,\ \tilde{M}_2$	$W,\ M_2\ \tilde{M}_2$
7	$\tilde{M}$	M_2	$\tilde{M}_2$
6	$M_2,\ \tilde{M}$	$W,\ M_2,\ \tilde{M}_2$	$M\ \tilde{M}_2$
5	M_2	$\tilde{M}_2$	M
4	$W,\ M_2,\ \tilde{M}_2$	$M,\ \tilde{M}_2$	$W,\ M,\ \tilde{M}$
3	$\tilde{M}_2$	M	$\tilde{M}$
2	$M,\ \tilde{M}_2$	$W,\ M,\ \tilde{M}$	$M_2,\ \tilde{M}$

(B.48)

C Notations

- D=2 の場合 Γ の行列 ρ_α を次式で書く。

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{C.1}$$

- D=3 の場合 Γ の行列（パウリ行列）σ_i を次式で書く。

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

- D=4 の場合 Γ の行列を次式で書く。

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \Gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{C.3}$$

Howe's Notation([10] 参照)

- 座標の添え字を次の様に定義する。 $Z^M \equiv (x^m, \theta^\mu)$

M = (m, μ) 曲った空間座標の添え字
A = (a, α) 平らな空間座標の添え字
2 次元面上のベクトル添え字（ボゾン的な添え字）; $m, a = 0, 1$
Spinor の添え字（フェルミオン的な添え字）; $\mu, \alpha = 1, 2$

- 計量 g^{mn}, η^{ab} と vierbein e^a_m

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned} g_{mn} &= \eta_{ab} e^a_m e^b_n \\ \eta^{ab} &= g^{mn} e^a_m e^b_n \\ e &= \det e^a_m \end{aligned}$$

ボゾン的な添え字 (m, a) は計量 g^{mn}, η^{ab} で上げ下げする。

$$X^a = \eta^{ab} X_b,\ X^m = g^{mn} X_n \tag{C.5}$$

- 反対称テンソル ϵ_{ab}, $\epsilon_{\alpha\beta}$

ボゾン的な ϵ_{ab} テンソルの性質

$$\begin{aligned} \epsilon_{ab} = -\epsilon_{ba},\ \epsilon_{ab} &= -\epsilon^{ab} \\ \epsilon_{00} = \epsilon_{11} = 0,\ \epsilon_{01} = -\epsilon_{10} &= +1 \\ \epsilon_{ab}\epsilon^{bc} &= \delta^c_a \end{aligned} \tag{C.6}$$

フェルミオン的な $\epsilon_{\alpha\beta}$ テンソルの性質

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha},\ \epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta} \\ \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0,\ \epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = +1 \\ \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\gamma\beta} = \delta_{\alpha}^{\gamma} \end{aligned} \tag{C.7}$$

Spinor の添え字 (μ, α) はこの $\epsilon_{\alpha\beta}$ テンソルで次式の様に上げ下げする。

$$\psi^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta},\ \psi_{\alpha} = \psi^{\beta}\epsilon_{\beta\alpha} \tag{C.8}$$

• 2 次元 Γ 行列

Howe の Notation では Γ 行列 γ を次式で定義する。

$$(\gamma^0)_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ (\gamma^1)_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.9}$$

([2] の Γ 行列 ρ とこの γ は $\rho = -i\gamma$ という関係がある。)

この γ 行列が満たすクリフォード代数は

$$\{\rho^a, \rho^b\} = 2\eta^{ab} \tag{C.10}$$

となる。([2] のクリフォード代数は $\{\rho^{\alpha}, \rho^{\beta}\} = -2\eta^{\alpha\beta}$ であった。)

また γ_5 と $\bar{\psi}$ (ψ ; 実 Majorana-Spinor) は次の様に書かれる。

$$(\gamma_5)_{\alpha}^{\beta} \equiv (\gamma^0)_{\alpha}^{\gamma}(\gamma^1)_{\gamma}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{C.11}$$

$$\bar{\psi}_1\Gamma\psi_2 = \psi_1^{\alpha}\Gamma_{\alpha}^{\beta}\psi_{2,\beta} \tag{C.12}$$

ここで Γ は γ の任意の積である。

• 計算上使った公式

1. γ と ψ or θ(Majorana-Spinor) に関するもの

2 次元 Fierz 関係式

$$\theta^{\mu}\theta^{\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}(\bar{\theta}\theta) \tag{C.13}$$

γ 同士の関係式

$$\begin{cases} \gamma^a\gamma^b = \eta^{ab} - \epsilon^{ab}\gamma_5 \ \left(= 2\eta^{ab} - \gamma^b\gamma^a\right) \\ \gamma^m\gamma^n = g^{mn} - \frac{1}{e}\epsilon^{mn}\gamma_5 \\ \gamma^0(\gamma^a)^T\gamma^0 = \gamma^0,\ (\gamma^a)^{\dagger} = (\gamma^a)^T \\ \gamma_c\gamma_5 = \epsilon_{ca}\gamma^a \\ \gamma_5\gamma_c = -\epsilon_{ca}\gamma^a \end{cases} \tag{C.14}$$

Majorana-Spinor の性質

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi_1}\psi_2 &= \bar{\psi_2}\psi_1 \\
\bar{\psi_1}\gamma^a\psi_2 &= -\bar{\psi_2}\gamma^a\psi_1 \\
\bar{\psi_1}\gamma_5\psi_2 &= -\bar{\psi_2}\gamma_5\psi_1 \\
\bar{\psi_1}\gamma^a\gamma^b\psi_2 &= \bar{\psi_2}\gamma^b\gamma^a\psi_1 \\
\bar{\psi_1}\gamma^a\gamma_5\psi_2 &= \bar{\psi_2}\gamma_5\gamma^a\psi_1 \\
\overline{\gamma_5\psi} &= -\bar{\psi}\gamma_5 \\
\overline{\gamma^a\psi} &= -\bar{\psi}\gamma^a
\end{aligned}
\tag{C.15}
$$

Fierz 関係式や γ 同士の関係式などを使って次の関係式

$$
\begin{aligned}
(\bar{\theta}\psi_1)(\bar{\theta}\psi_2) &= -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\psi_2}\psi_1 \\
\epsilon_{ab}\epsilon^{mn}(\bar{\theta}\gamma^a\chi_n)(\bar{\theta}\gamma^b\chi_m) &= -(\bar{\theta}\theta)\epsilon^{mn}\bar{\chi}_m\gamma_5\chi_n
\end{aligned}
\tag{C.16}
$$

が導かれる。

<u>(C.16) の証明</u>

$$
\begin{aligned}
(\bar{\theta}\psi_1)(\bar{\theta}\psi_2) &= (\theta^\alpha\psi_{1\alpha})(\theta^\beta\psi_{2\beta}) \\
&= -\theta^\alpha\theta^\beta\psi_{1\alpha}\psi_{2\beta} \rightarrow^{Fierz} \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)\epsilon^{\alpha\beta}\psi_{1\alpha}\psi_{2\beta} \\
&= -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\psi_2}\psi_1 \\
\epsilon_{ab}\epsilon^{mn}(\bar{\theta}\gamma^a\chi_n)(\bar{\theta}\gamma^b\chi_m) &= \epsilon_{ab}\epsilon^{mn}(-\frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\gamma^b\bar{\chi}_m\gamma^a\chi_n) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\epsilon^{mn}\bar{\theta}\theta\bar{\chi_m}\gamma^b\gamma^a\chi_n \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\epsilon^{mn}\bar{\theta}\theta\bar{\chi_m}(\eta^{ba}-\epsilon^{ba}\gamma_5)\chi_n \\
&= -\frac{1}{2}\underbrace{\epsilon_{ab}\epsilon^{ba}}_{\delta^a_a=2}\epsilon^{mn}\bar{\theta}\theta\bar{\chi_m}\gamma_5\chi_n \\
&= -(\bar{\theta}\theta)\epsilon^{mn}\bar{\chi}_m\gamma_5\chi_n
\end{aligned}
$$

<u>2. vierbeine^a_m に関するもの</u>

$$
\begin{cases}
\epsilon_{ab}e^a_n = e\epsilon_{nm}e^m_b \\
\epsilon^{\ell m} = e\epsilon^{db}e^\ell_d e^m_b \\
\epsilon_{ab}\epsilon^{mn}e^a_n = ee^m_b
\end{cases}
\tag{C.17}
$$

D The Calculation of Chapter 4

ここでは4章で述べた式のいくつかを証明する。

まず最初に $\bar{\chi}\psi = \bar{\psi}\chi$ の証明であるが、その前の準備として ρ^0 を反対称テンソル ϵ を使って以下の様に書き直す。

$$\begin{aligned} {\rho^0}_{AB} &= -i\epsilon_{AB} \\ \epsilon_{AB} &= -\epsilon_{BA}, \;\; \epsilon_{AB} = \epsilon^{AB} \end{aligned} \tag{D.1}$$

この (D.1) を使って $\bar{\chi}\psi = \bar{\psi}\chi$ は以下のように示される。

$$\begin{aligned} \bar{\chi}\psi &= \rho^0_{AB}\chi_A\psi_B = -i\epsilon_{AB}\chi_A\psi_B \\ &= +i\epsilon_{AB}\psi_B\chi_A = -i\epsilon_{BA}\psi_B\chi_A \\ &= \rho^0_{BA}\psi_B\chi_A = \bar{\psi}\chi \end{aligned}$$

次に (4.3) の超対称変換の下で作用 (4.2) が不変であることを示す。超対称変換を思い出してみると以下の式であった。

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \bar{\epsilon}\psi^\mu \\ \delta\psi^\mu &= -i\rho^\alpha\partial_\alpha X^\mu\epsilon \end{aligned}$$

またこの2番目の変換から $\bar{\psi}^\mu$ の変換

$$\delta\bar{\psi}^\mu = i\bar{\epsilon}\rho^\alpha\partial_\alpha X^\mu \tag{D.2}$$

も導かれる。

<u>(D.2) の証明</u>

$$\begin{aligned} \delta\bar{\psi}^\mu_A &= -i\delta{\psi^\mu}_B\epsilon_{BA} \\ &= -i(-i)(\rho^\alpha\partial_\alpha X^\mu\epsilon)_B\epsilon_{BA} = -i(-i)(\rho^\alpha\partial_\alpha X^\mu)_{BC}\epsilon_C\epsilon_{BA} \\ &= -i(-i)\epsilon_C(\rho^\alpha)^T_{CB}(\partial_\alpha X^\mu)\epsilon_{BA} = -i(-i)\epsilon_C(\rho^0\rho^0\rho^{\alpha T}\rho^0\rho^0)_{CB}(\partial_\alpha X^\mu)\epsilon_{BA} \\ &= +i(-i)\epsilon_C\rho^0_{CD}\rho^\alpha_{DE}\rho^0_{EB}(\partial_\alpha X^\mu)\epsilon_{BA} = i(-i)^2\bar{\epsilon}_D\rho^\alpha_{DE}\epsilon_{EB}(\partial_\alpha X^\mu)\epsilon_{BA} \\ &= +i\bar{\epsilon}_D\rho^\alpha_{DA}(\partial_\alpha X^\mu) = i(\bar{\epsilon}\rho^\alpha\partial_\alpha X^\mu)_A \\ \text{但し、}(\rho^0)^2 &= 1,\; \rho^0\rho^{\alpha T}\rho^0 = -\rho^\alpha,\;\; \epsilon_{AB}\epsilon_{CB} = \delta_{AC},\;\; \text{を使った。} \end{aligned} \tag{D.3}$$

この変換の下での作用 (4.2) の変換を詳しく見ていくと、

$$\begin{aligned} \delta S = -\frac{1}{2\pi}\int\Big\{d^2\xi\;\; &\partial_\alpha\delta X^\mu\partial^\alpha X_\mu + \partial_\alpha X^\mu\partial^\alpha\delta X_\mu \\ &-i\delta\bar{\psi}^\mu\rho^\alpha\partial_\alpha\psi_\mu - i\bar{\psi}^\mu\rho^\alpha\partial_\alpha\delta\psi_\mu\} \end{aligned} \tag{D.4}$$

第1項目と第2項目は $\bar{\epsilon}\partial_\alpha\psi\partial^\alpha X_\mu$ なので、合わせて

$$\text{第1項目} + \text{第2項目} = 2\bar{\epsilon}\partial_\alpha\psi\partial^\alpha X_\mu \tag{D.5}$$

である。この項を次式の様に変形する。

$$2\bar{\epsilon}\partial_\alpha\psi\partial^\alpha X_\mu = 2\{\partial_\alpha(\bar{\epsilon}\psi\partial^\alpha X_\mu) - \bar{\epsilon}\psi\partial_\alpha\partial^\alpha X_\mu\}$$

この第一項は (4.2) の表面項に相当し、積分すると消える。第2項目は X^μ の運動方程式 (Klein-Gordon 方程式) $\partial^\alpha\partial_\alpha X_\mu = 0$ を使うことにより消える。
次に第3項目と4項目について計算していく。第3項目は

$$-i(\delta\bar{\psi}^\mu)\rho^\alpha\partial_\alpha\psi_\mu = +(\bar{\epsilon}\rho^\beta\partial_\beta X^\mu)\rho^\alpha\partial_\alpha\psi_\mu$$

この式は ψ^μ の運動方程式（Dirac 方程式）$\rho^\alpha\partial_\alpha\psi_\mu = 0$ により消える。第4項目は

$$\begin{aligned}
-i\bar{\psi}^\mu_B\rho^\alpha_{BC}\partial_\alpha\delta\psi_{\mu C} &= -\bar{\psi}^\mu_B\rho^\alpha_{BC}\partial_\alpha\left(\rho^\beta_{CD}\partial_\beta X_\mu\epsilon_D\right) \\
&= -\partial_\alpha\left\{\bar{\psi}^\mu_B\rho^\alpha_{BC}\rho^\beta_{CD}\partial_\beta X_\mu\epsilon_D\right\} + \left(\partial_\alpha\bar{\psi}^\mu_B\right)\rho^\alpha_{BC}\rho^\beta_{CD}\partial_\beta X_\mu\epsilon_D \\
&= \partial_\alpha\bar{\psi}^\mu_B(\rho^\alpha\rho^\beta)_{BD}\partial_\beta X_\mu\epsilon_D = \bar{\epsilon}(\rho^\beta\rho^\alpha)\partial_\alpha\psi^\mu\partial_\beta X_\mu \\
&= \text{第3項目} = 0 \\
\text{但し、}\bar{\psi}\rho^\alpha\rho^\beta\epsilon &= \bar{\epsilon}\rho^\beta\rho^\alpha\psi \text{ を使った。}
\end{aligned} \tag{D.6}$$

よって第3項目と4項目も消え、作用 (4.2) は (4.3) の超対称変換の下で不変であることがわかる。

また、この超対称変換 δ が満たす交換関係を証明する。まず、X^μ と、δ が満たす交換関係 (4.4) の証明は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
[\delta_1,\delta_2]\,X^\mu &= \delta_1(\bar{\epsilon}_2\psi^\mu) - \delta_2(\bar{\epsilon}_1\psi^\mu) \\
&= \bar{\epsilon}_2(-i\rho^\alpha\partial_\alpha X^\mu\epsilon_1) - \bar{\epsilon}_1(-i\rho^\alpha\partial_\alpha X^\mu\epsilon_2) = -i\bar{\epsilon}_2\rho^\alpha\epsilon_1\partial_\alpha X^\mu + i\bar{\epsilon}_1\rho^\alpha\epsilon_2\partial_\alpha X^\mu \\
&= 2i\bar{\epsilon}_1\rho^\alpha\epsilon_2\partial_\alpha X^\mu = a^\alpha\partial_\alpha X^\mu \\
\text{但し、}\bar{\epsilon}_1\rho^\alpha\epsilon_2 &= -\bar{\epsilon}_2\rho^\alpha\epsilon_1\text{を使い、}a^\alpha \equiv 2i\bar{\epsilon}_1\rho^\alpha\epsilon_2\text{である。}
\end{aligned}$$

同様にして ψ^μ との交換関係 (4.4) の証明は

$$\begin{aligned}
[\delta_1,\delta_2]\,\psi^\mu &= \delta_1(-i\rho^\alpha\partial_\alpha X^\mu\bar{\epsilon}_2) - \delta_2(-i\rho^\alpha\partial_\alpha X^\mu\bar{\epsilon}_1) \\
&= -i\rho^\alpha\bar{\epsilon}_1\partial_\alpha\psi^\mu\epsilon_2 + i\rho^\alpha\bar{\epsilon}_2\partial_\alpha\psi^\mu\epsilon_1 \\
&= 2i\bar{\epsilon}_1\rho^\alpha\epsilon_2\partial_\alpha X^\mu = a^\alpha\partial_\alpha\psi
\end{aligned} \tag{D.7}$$

となり、X^μ にかけた場合と同様な交換関係を満たすことがわかる。
ここで使った公式 $\bar{\epsilon}_1\rho^\alpha\epsilon_2 = -\bar{\epsilon}_2\rho^\alpha\epsilon_1$、$\bar{\psi}\rho^\alpha\rho^\beta\epsilon = \bar{\epsilon}\rho^\beta\rho^\alpha\psi$ を証明しておく。

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon}_1\rho^\alpha\epsilon_2 &= \bar{\epsilon}_{1A}\rho^\alpha_{AB}\epsilon_{2B} \\
&= \epsilon_{1C}\rho^0_{CA}\epsilon_{2B}(\rho^\alpha)^T_{BA} \\
&= \epsilon_{1C}\rho^0_{CA}\epsilon_{2B}(\rho^0\rho^0\rho^{\alpha T}\rho^0\rho^0)_{BA} = -\epsilon_{1C}\rho^0_{CA}\epsilon_{2B}\rho^0_{BE}\rho^\alpha_{EF}\rho^0_{FA} \\
&= +\bar{\epsilon}_{2E}\rho^\alpha_{EF}\epsilon_{1C}(-i)^2\delta_{CF} = -\bar{\epsilon}_2\rho^\alpha\epsilon_1 \\
\bar{\psi}\rho^\alpha\rho^\beta\epsilon &= \bar{\psi}_A(\rho^\alpha\rho^\beta)_{AB}\epsilon_B \\
&= \bar{\psi}_A\epsilon_B(\rho^\alpha\rho^\beta)^T_{BA} = \bar{\psi}_A\epsilon_B(\rho^{\beta T}\rho^{\alpha T})_{BA} \\
&= \bar{\psi}_A\epsilon_B(\rho^0\rho^0\rho^{\beta T}\rho^0\rho^0\rho^{\alpha T}\rho^0\rho^0)_{BA} \\
&= +\psi_E\rho^0_{EA}\epsilon_B\rho^0_{BC}(\rho^\beta\rho^\alpha)_{CD}\rho^0_{DA} = -\bar{\epsilon}_C(\rho^\beta\rho^\alpha)_{CD}\psi_E(-i)^2\delta_{DE} \\
&= \bar{\epsilon}\rho^\beta\rho^\alpha\psi
\end{aligned}$$

次に Scalar Superfield Y^A を用いた理論のいくつかの式の証明を以下で示す。

(4.8) の証明

$$\delta\theta^A\,\psi = \left[\bar{\epsilon}Q\,,\theta^A\right]\psi = \left(\bar{\epsilon}Q\theta^A - \theta^A\bar{\epsilon}Q\right)\psi$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\bar{\epsilon}Q\theta^A\right)\psi = \left(\bar{\epsilon}_B Q_B\theta^A\right)\psi \\
&= \bar{\epsilon}_B\frac{\partial\theta^A}{\partial\bar{\theta}^B}\psi \\
&= \epsilon_C\rho^0_{CB}\frac{\partial\theta^A}{\partial(\theta^D\rho^{0DB})}\psi = (-i)\epsilon_C\epsilon_{CB}\frac{\partial\theta^A}{-i\partial(\theta^D\epsilon^{DB})}\psi \\
&= \epsilon_C\epsilon_{CB}\epsilon_{DB}\frac{\partial\theta^A}{\partial\theta^D}\psi = \epsilon_C\delta_{CD}\delta_{AD}\psi \\
&= \epsilon_A\,\psi
\end{aligned}$$

(4.9) の証明

$$\begin{aligned}
\delta\xi^\alpha\,\psi &= [\bar{\epsilon}Q\,,\xi^\alpha]\,\psi = (\bar{\epsilon}Q\xi^\alpha)\,\psi \\
&= \bar{\epsilon}_B Q_B\xi^\alpha\psi = \left(i\bar{\epsilon}_B(\rho^\beta\theta)_B\partial_\beta\xi^\alpha\right)\psi \\
&= i\bar{\epsilon}_B(\rho^\beta\theta)_B\delta_{\alpha\beta}\,\psi = \bar{\epsilon}\rho^\alpha\theta\,\psi
\end{aligned}$$

(4.11) の証明

$$\begin{aligned}
[\bar{\epsilon}_1 Q\,,\bar{\epsilon}_2 Q]\,f &= (\bar{\epsilon}_{1A}Q_A\bar{\epsilon}_{2B}Q_B)\,f - (\bar{\epsilon}_{2B}Q_B\bar{\epsilon}_{1A}Q_A)\,f \\
&= -\bar{\epsilon}_{1A}\bar{\epsilon}_{2B}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^A} + i(\rho^\alpha\theta)_A\partial_\alpha\right\}\left\{\frac{\partial f}{\partial\bar{\theta}^B} + i(\rho^\beta\theta)_B\partial_\beta f\right\} \\
&\quad +\bar{\epsilon}_{2B}\bar{\epsilon}_{1A}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^B} + i(\rho^\alpha\theta)_B\partial_\alpha\right\}\left\{\frac{\partial f}{\partial\bar{\theta}^A} + i(\rho^\beta\theta)_A\partial_\beta f\right\} \\
&= -\bar{\epsilon}_{1A}\bar{\epsilon}_{2B}\{\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{\theta}^A\partial\bar{\theta}^B}}_{(1)} + i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^A}(\rho^\beta\theta)_B\partial_\beta f - \underbrace{i(\rho^\beta\theta)_B\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^A}\partial_\beta f}_{(2)} \\
&\quad + \underbrace{i(\rho^\alpha\theta)_A\partial_\alpha\frac{\partial f}{\partial\bar{\theta}^B}}_{(3)} + \underbrace{i(\rho^\alpha\theta)_A i(\rho^\beta\theta)_B\partial_\alpha\partial_\beta f}_{(4)}\} \\
&- \bar{\epsilon}_{1A}\bar{\epsilon}_{2B}\{\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{\theta}^B\partial\bar{\theta}^A}}_{(1)} + i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^B}(\rho^\beta\theta)_A\partial_\beta f - \underbrace{i(\rho^\beta\theta)_A\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^B}\partial_\beta f}_{(3)} \\
&\quad + \underbrace{i(\rho^\alpha\theta)_B\partial_\alpha\frac{\partial f}{\partial\bar{\theta}^A}}_{(2)} + \underbrace{i(\rho^\alpha\theta)_B i(\rho^\beta\theta)_A\partial_\alpha\partial_\beta f}_{(4)}\}
\end{aligned}$$

同じ番号同士 (1), ..(4) が打ち消し合って

$$= -\bar{\epsilon}_{1A}\bar{\epsilon}_{2B}\left\{i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^A}(\rho^\beta\theta)_B\partial_\beta f + i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^B}(\rho^\beta\theta)_A\partial_\beta f\right\}$$

一項目 $- \bar{\epsilon}_{1A}\bar{\epsilon}_{2B}i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^A}(\rho^\beta\theta)_B\partial_\beta f$

$$\begin{aligned}
&= -i\epsilon_{1K}\rho^0_{KA}\bar{\epsilon}_{2B}\frac{\partial}{\partial\theta^E\rho^{0EA}}\rho^\beta_{BD}\theta_D\partial_\beta f \\
&= -i\epsilon_{1K}\epsilon_{KA}\bar{\epsilon}_{2B}\epsilon_{EA}\delta_{ED}\rho^\beta_{BD}\partial_\beta f \\
&= +i\bar{\epsilon}_{2B}\rho^\beta_{BK}\epsilon_{1K}\partial_\beta f \\
&= -i\bar{\epsilon}_1\rho^\beta\epsilon_2\partial_\beta f
\end{aligned}$$

二項目も同様にして $- \bar{\epsilon}_{1A}\bar{\epsilon}_{2B}i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^B}(\rho^\beta\theta)_A\partial_\beta f = \cdots = -i\bar{\epsilon}_1\rho^\beta\epsilon_2\partial_\beta f$

よって $[\bar{\epsilon}_1 Q\,,\bar{\epsilon}_2 Q] = -2i\bar{\epsilon}_1\rho^\alpha\epsilon_2\partial_\alpha$

超対称変換同士の交換関係 (4.12) の証明

$$\begin{aligned}
[\delta_1\,,\delta_2]\,Y^\mu &= \delta_1(\delta_2 Y^\mu)-\delta_2(\delta_1 Y^\mu)=\delta_1(\bar\epsilon_2 QY^\mu)-\delta_2(\bar\epsilon_1 QY^\mu)\\
&= (\bar\epsilon_2 Q)(\bar\epsilon_1 QY^\mu)-(\bar\epsilon_1 Q)(\bar\epsilon_2 QY^\mu)\\
&= -[\bar\epsilon_1 Q\,,\bar\epsilon_2 Q]=2i\bar\epsilon_1\rho^\alpha\epsilon_2\partial_\alpha\\
&= a^\alpha\partial_\alpha Y^\mu
\end{aligned} \tag{D.8}$$

E　The Calculation of Deformations

この章ではポアソン括弧構造を持つ作用が 2 次元面上の面積を不変に保つ座標付け替え変換 ($Diff_2$) に対して不変な作用になっていることを証明し、また第 3 番目の作用の変形 (6.13) の計算をのせる。

最初に 6 章の最初に述べたポアソン括弧構造が $Diff_2$ の下で不変な構造になっていることを示す。座標付け替え変換は次式で表わされる。

$$x^a \to x'^a = x^a + \epsilon(x)^a$$

ここで $\epsilon(x)^a$ は位置に依存した微少パラメーターを表わし、$a=0,1$ は 2 次元面上のベクトル添え字を表わす。$Diff_2$ の不変性は変換後の座標 x'^a と元の座標 x^a のヤコビアンが 1 であるという条件

$$\frac{\partial(x'^0,x'^1)}{\partial(x^0,x^1)}=1$$

に等しい。この条件式から $\epsilon(x)^a$ に対する次の式が導かれる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x'^0,x'^1)}{\partial(x^0,x^1)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^1}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\frac{\partial\epsilon^0}{\partial x^0} & \frac{\partial\epsilon^0}{\partial x^1} \\ \frac{\partial\epsilon^1}{\partial x^0} & 1+\frac{\partial\epsilon^1}{\partial x^1}\end{vmatrix}\\
&= \cdots\cdots\\
&= 1+\frac{\partial\epsilon^0}{\partial x^0}+\frac{\partial\epsilon^1}{\partial x^1}
\end{aligned}$$

この式が 1 に等しくなるとき、$\epsilon(x)^a$は次式を満たす。

$$\frac{\partial\epsilon^0}{\partial x^0}+\frac{\partial\epsilon^1}{\partial x^1}=0\to\partial_a\epsilon^a=0 \tag{E.1}$$

一般に、ある式の座標付け替え変換不変性の要請が (E.1) で与えられる場合、その式は $Diff_2$ 不変である。

次にポアソン括弧構造が $Diff_2$ 不変であるか調べる。ポアソン括弧構造の座標付け替え変換は

$$\begin{aligned}
\{X^{\mathcal A}\,,X^{\mathcal B}\} &= \epsilon^{ab}\frac{\partial X^{\mathcal A}}{\partial x^a}\frac{\partial X^{\mathcal B}}{\partial x^b}\\
\to\{X^{\mathcal A}\,,X^{\mathcal B}\} &= \epsilon^{ab}\frac{\partial X^{\mathcal A}}{\partial x'^a}\frac{\partial X^{\mathcal B}}{\partial x'^b}\\
&= \frac{\partial X^{\mathcal A}}{\partial x^c}\frac{\partial X^{\mathcal B}}{\partial x^d}\underbrace{\epsilon^{ab}\frac{\partial x^c}{\partial x'^a}\frac{\partial x^d}{\partial x'^b}}_{(*)}
\end{aligned} \tag{E.2}$$

で表わされる。(E.2) 式の $(*)$ 部分が反対称テンソル ϵ^{cd} に等しくなるときに座標付け替え変換不変性が成り立つ。すなわち

$$\epsilon^{ab}\frac{\partial x^c}{\partial x'^a}\frac{\partial x^d}{\partial x'^b}=\epsilon^{cd} \tag{E.3}$$

のときに成り立つ。この式の両辺に ϵ_{cd} を掛けてみると

$$\begin{aligned}
\epsilon_{cd}\epsilon^{ab}\frac{\partial x^c}{\partial x'^a}\frac{\partial x^d}{\partial x'^b} &= \epsilon_{cd}\epsilon^{cd}\\
\text{右辺 } \epsilon_{cd}\epsilon^{cd}=-2 & \\
\text{左辺 } \epsilon_{cd}\epsilon^{ab}\frac{\partial x^c}{\partial x'^a}\frac{\partial x^d}{\partial x'^b} &= \epsilon_{cd}\left(\frac{\partial x^c}{\partial x'^0}\frac{\partial x^d}{\partial x'^1}-\frac{\partial x^c}{\partial x'^1}\frac{\partial x^d}{\partial x'^0}\right)\\
&= -2\left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^0}\frac{\partial x^1}{\partial x'^1}-\frac{\partial x^0}{\partial x'^1}\frac{\partial x^1}{\partial x'^0}\right)\\
&= -2\frac{\partial(x^0,x^1)}{\partial(x'^0,x'^1)}=-2(1-\partial_a\epsilon^a)
\end{aligned}$$

この式が右辺と等しくなるのは $\partial_a\epsilon^a=0$ が成り立つときであり、その時 (E.3) が成り立つ。よってポアソン括弧構造の座標付け替え変換不変性の要請が式 (E.1) で与えられるので、ポアソン括弧構造は $Diff_2$ 不変である。

Third Deformation

ここでは 6.3 章の第 3 番目に考えた作用 (6.9) の計算の詳細をのせる。しかしながら 5 章で示した様な詳しい式の変形（どの公式をどこで使ったか等）は一部省略した。作用 (6.9) は

$$\begin{aligned}
S_3 &= \int d^2\xi d^2\theta\{\frac{\Gamma}{E}\det h_{\alpha\beta}+\Delta E\}\\
h_{\alpha\beta} &\equiv D_\alpha Y^A D_\beta Y_A,\ \ E=\mathrm{sdet}E_M^A\ \ A、B=const
\end{aligned}$$

であった。まず最初に (6.9) の第一項目 $\frac{\Gamma}{E}\det h_{\alpha\beta}$ の計算をする。

• $\frac{\Gamma}{E}\det h_{\alpha\beta}$の計算

$\frac{\Gamma}{E}\det h_{\alpha\beta}$ の $E=\mathrm{sdet}E_M^A$ は (5.41) で計算したものなので、その結果を使うと

$$E=e(1+\frac{i}{2}\bar\theta\gamma^m\chi_m+\frac{1}{4e}\bar\theta\theta\left(\frac{1}{2}\epsilon^{mn}\bar\chi_m\gamma_5\chi_n+ieA\right))$$

であった。θ の 2 次までの項を計算したいので、θ の 1 次の項を $E(1)$、2 次の項を $E(2)$ とおくと (θ の 0 次の項は e なので敢えて置き換えない。)E^{-1} は

$$\begin{aligned}
E &= e\{1+\frac{1}{e}\underbrace{\frac{ie}{2}\bar\theta\gamma^m\chi_m}_{E(1)}+\frac{1}{e}\underbrace{\frac{1}{4}\bar\theta\theta\left(\frac{1}{2}\epsilon^{mn}\bar\chi_m\gamma_5\chi_n+ieA\right)}_{E(2)}\}\\
&= e\{1+\frac{E(1)}{e}+\frac{E(2)}{e}\}\\
\to E^{-1} &= \frac{1}{e}\{1-\frac{1}{e}(E(1)+E(2))+\frac{1}{e^2}(E(1)^2+E(1)E(2)+E(2)E(1)+E(2)^2)\}
\end{aligned}$$

θの2次までの項は

$$= \frac{1}{e}\{1-\underbrace{\frac{E(1)}{e}}_{\theta の1次}+\underbrace{\{-\frac{E(2)}{e}+\frac{E(1)^2}{e^2}\}}_{\theta の2次}\}$$

よって (6.9) の第一項目、$\frac{1}{E}\det h_{\alpha\beta}$ の θ の2次の項（4章で述べた理由により、(6.9) の θ の積分では θ の2次の項しか残らないため）は $\det h_{\alpha\beta}$ の θ の0次の項を $H(0)$、1次の項を $H(1)$、2次の項を $H(2)$ とおくと、次式の様に書くことができる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{E}\det h_{\alpha\beta}|_{\theta^2} &= \frac{1}{e}\{1-\frac{E(1)}{e}+(-\frac{E(2)}{e}+\frac{E(1)^2}{e^2})\}\{H(0)+H(1)+H(2)\}|_{\theta^2}\\ &= \frac{1}{e}\{H(2)-\frac{E(1)}{e}H(1)+(-\frac{E(2)}{e}+\frac{E(1)^2}{e^2})H(0)\}\end{aligned} \tag{E.4}$$

$\det h_{\alpha\beta}$ の $H(0)$、$H(1)$、$H(2)$ を計算する前に (E.4) の第三項目、$-\frac{E(2)}{e}+\frac{E(1)^2}{e^2}$ の計算をする。

$$\begin{aligned}-\frac{E(2)}{e}+\frac{E(1)^2}{e^2} &= -\frac{1}{4e}\bar{\theta}\theta\left(\frac{1}{2}\epsilon^{mn}\bar{\chi}_m\gamma_5\chi_n+ieA\right)-\frac{1}{4}\bar{\theta}\gamma^m\chi_m\bar{\theta}\gamma^n\chi_n\\ &= -\frac{1}{4e}\bar{\theta}\theta\left(\frac{1}{2}\epsilon^{mn}\bar{\chi}_m\gamma_5\chi_n+ieA\right)-\frac{1}{8}\bar{\theta}\theta\bar{\chi}_n\underbrace{\gamma^n\gamma^m}_{=g^{nm}-\frac{\epsilon^{nm}}{e}\gamma_5}\chi_m\\ &= -\frac{1}{8}\bar{\theta}\theta\{g^{nm}\bar{\chi}_n\chi_m+2iA\}\end{aligned} \tag{E.5}$$

次に $\det h_{\alpha\beta}$ を計算していく。 $\det h_{\alpha\beta}$ はフェルミオン的な行列式の定義 (5.26) から次式となる。

$$\begin{aligned}\det h_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha1\alpha2}\epsilon^{\beta1\beta2}h_{\alpha1\beta1}h_{\alpha2\beta2}\\ &= \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha1\alpha2}\epsilon^{\beta1\beta2}D_{\alpha1}Y^{\mathcal{A}}D_{\beta1}Y_{\mathcal{A}}D_{\alpha2}Y^{\mathcal{B}}D_{\beta2}Y_{\mathcal{B}}\\ &= -\frac{1}{2}[\,Y^{\mathcal{A}}\,,Y^{\mathcal{B}}\,][\,Y_{\mathcal{A}}\,,Y_{\mathcal{B}}\,]\end{aligned} \tag{E.6}$$

但し、$[A\,,B]\equiv\epsilon^{\alpha\beta}D_\alpha AD_\beta B$

まず、(E.6) の $[\,Y^{\mathcal{A}}\,,Y^{\mathcal{B}}\,]$ を計算する。この中で θ の2次までの項が必要なので、5章で計算した様に $D_\alpha Y^{\mathcal{A}}$ (5.53) の θ の0次、1次、2次の項をそれぞれ $D^{\mathcal{A}}_\alpha(0)$、$D^{\mathcal{A}}_\alpha(1)$、$D^{\mathcal{A}}_\alpha(2)$ とおく。すなわち (5.53) から

$$\begin{aligned}D^{\mathcal{A}}_\alpha(0) &= i\psi^{\mathcal{A}}_\alpha\\ D^{\mathcal{A}}_\alpha(1) &= -i(\bar{\theta}\gamma^m)_\alpha\partial_mX^{\mathcal{A}}+iB^{\mathcal{A}}\theta_\alpha-\frac{1}{2}(\bar{\theta}\gamma^m)_\alpha\bar{\chi}_m\psi^{\mathcal{A}}\\ D^{\mathcal{A}}_\alpha(2) &= \frac{1}{8}(\bar{\theta}\theta)\left\{-4(\overline{\partial_m\psi^{\mathcal{A}}}\gamma^m)_\alpha-2(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)_\alpha\partial_mX^{\mathcal{A}}+2(\overline{\chi}_m\gamma^m)_\alpha B^{\mathcal{A}}\right.\\ &\quad\left.-2(\gamma^m\gamma_5\psi^{\mathcal{A}})_\alpha\omega_m+A\psi^{\mathcal{A}}_\alpha+i(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)_\alpha\overline{\chi}_m\psi^{\mathcal{A}}\right\}\end{aligned} \tag{E.7}$$

である。そうすると $[\,Y^{\mathcal{A}}\,,Y^{\mathcal{B}}\,]$ の θ の2次までの項は次式になる。

$$\begin{aligned}[\,Y^{\mathcal{A}}\,,Y^{\mathcal{B}}\,] &= \epsilon^{\alpha\beta}D_\alpha Y^{\mathcal{A}}D_\beta Y^{\mathcal{B}}\\ &= -D^\beta Y^{\mathcal{A}}D_\beta Y^{\mathcal{B}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\{D^{\beta\mathcal{A}}(0)+D^{\beta\mathcal{A}}(1)+D^{\beta\mathcal{A}}(2)\}\{D^{\mathcal{B}}_{\beta}(0)+D^{\mathcal{B}}_{\beta}(1)+D^{\mathcal{B}}_{\beta}(2)\} \\ &= -\{\underbrace{D^{\beta\mathcal{A}}(0)(D^{\mathcal{B}}_{\beta}(0)+D^{\mathcal{B}}_{\beta}(1)+D^{\mathcal{B}}_{\beta}(2))}_{=D^{\beta\mathcal{A}}(0)D^{\mathcal{B}}_{\beta}Y^{\mathcal{A}}}+D^{\beta\mathcal{A}}(1)D^{\mathcal{B}}_{\beta}(0) \\ &\quad +D^{\beta\mathcal{A}}(1)D^{\mathcal{B}}_{\beta}(1)+D^{\beta\mathcal{A}}(2)D^{\mathcal{B}}_{\beta}(0)\} \end{aligned} \tag{E.8}$$

まず (E.8) の第一項目 $D^{\beta\mathcal{A}}(0)D^{\mathcal{B}}_{\beta}Y^{\mathcal{A}}$ を計算する。(E.7) から

$$\begin{aligned} D^{\beta\mathcal{A}}(0)D^{\mathcal{B}}_{\beta}Y^{\mathcal{A}} &= i\psi^{\beta\mathcal{A}}\Big\{i\psi^{\mathcal{B}}_{\beta}-i(\bar\theta\gamma^m)_{\beta}\partial_m X^{\mathcal{B}}+iB^{\mathcal{B}}\theta_{\beta}-\frac{1}{2}(\bar\theta\gamma^m)_{\beta}\bar\chi_m\psi^{\mathcal{B}} \\ &\quad +\frac{1}{8}(\bar\theta\theta)\Big\{-4(\overline{\partial_m\psi^{\mathcal{B}}}\gamma^m)_{\beta}-2(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)_{\beta}\partial_m X^{\mathcal{B}}+2(\overline{\chi}_m\gamma^m)_{\beta}B^{\mathcal{B}} \\ &\quad -2(\gamma^m\gamma_5\psi^{\mathcal{B}})_{\beta}\omega_m+A\psi^{\mathcal{B}}_{\beta}+i(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)_{\beta}\overline{\chi}_m\psi^{\mathcal{B}}\Big\}\Big\} \\ &= \cdots\cdots \\ &= -\bar\psi^{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B}}-\{B^{\mathcal{B}}\bar\psi^{\mathcal{A}}\theta-(\bar\theta\gamma^m\psi^{\mathcal{A}})(\partial_m X^{\mathcal{B}}-\frac{i}{2}\bar\chi_m\psi^{\mathcal{B}})\} \\ &\quad +\frac{i}{8}(\bar\theta\theta)\Big\{-4(\partial_m\bar\psi^{\mathcal{B}}\gamma^m\psi^{\mathcal{A}})-2(\bar\chi_n\gamma^m\gamma^n\psi^{\mathcal{A}})\partial_m X^{\mathcal{B}}+2(\bar\chi_m\gamma^m\psi^{\mathcal{A}})B^{\mathcal{B}} \\ &\quad -2(\bar\psi^{\mathcal{A}}\gamma^m\gamma_5\psi^{\mathcal{B}})\omega_m+A\bar\psi^{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B}}+i\bar\chi_n\gamma^m\gamma^n\psi^{\mathcal{A}}\bar\chi_m\psi^{\mathcal{B}}\Big\} \end{aligned} \tag{E.9}$$

次に (E.8) の第二項目と三項目 $D^{\beta\mathcal{A}}(1)\{D^{\mathcal{B}}_{\beta}(0)+D^{\mathcal{B}}_{\beta}(1)\}$ の計算する。(E.7) から

$$\begin{aligned} D^{\beta\mathcal{A}}(1)\{D^{\mathcal{B}}_{\beta}(0)+D^{\mathcal{B}}_{\beta}(1)\} &= \Big\{-i(\bar\theta\gamma^m)^{\beta}\partial_m X^{\mathcal{A}}+iB^{\mathcal{A}}\theta^{\beta}-\frac{1}{2}(\bar\theta\gamma^m)^{\beta}\bar\chi_m\psi^{\mathcal{A}}\Big\} \\ &\quad \times\Big\{i\psi_{\beta}{}^{\mathcal{B}}-i(\bar\theta\gamma^n)_{\beta}\partial_n X^{\mathcal{B}}+iB^{\mathcal{B}}\theta_{\beta}-\frac{1}{2}(\bar\theta\gamma^n)_{\beta}\bar\chi_n\psi^{\mathcal{B}}\Big\} \\ &= \cdots\cdots \\ &= B^{\mathcal{A}}(\bar\theta\psi^{\mathcal{B}})+(\bar\theta\gamma^m\psi^{\mathcal{B}})\{\partial_m X^{\mathcal{A}}-\frac{i}{2}\bar\chi_m\psi^{\mathcal{A}}\} \\ &\quad +\bar\theta\theta\{-B^{\mathcal{A}}B^{\mathcal{B}}+g^{mn}\partial_m X^{\mathcal{A}}\partial_n X^{\mathcal{B}}-\frac{i}{2}g^{mn}\partial_m X^{\mathcal{A}}\bar\chi_n\psi^{\mathcal{B}} \\ &\quad -\frac{i}{2}g^{mn}\bar\chi_m\psi^{\mathcal{A}}\partial_n X^{\mathcal{B}}-\frac{1}{4}g^{mn}\bar\chi_m\psi^{\mathcal{A}}\bar\chi_n\psi^{\mathcal{B}}\} \end{aligned} \tag{E.10}$$

同様にして (E.8) の第四項目 $D^{\beta\mathcal{A}}(2)D^{\mathcal{B}}_{\beta}(0)$ の計算をする。

$$\begin{aligned} D^{\beta\mathcal{A}}(2)D^{\mathcal{B}}_{\beta}(0) &= \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)\Big\{-4(\overline{\partial_m\psi^{\mathcal{A}}}\gamma^m)_{\beta}-2(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)_{\beta}\partial_m X^{\mathcal{A}}+2(\overline{\chi}_m\gamma^m)_{\beta}B^{\mathcal{A}} \\ &\quad -2(\gamma^m\gamma_5\psi^{\mathcal{A}})_{\beta}\omega_m+A\psi^{\mathcal{A}}_{\beta}+i(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n)_{\beta}\overline{\chi}_m\psi^{\mathcal{A}}\Big\}i\psi_{\beta}{}^{\mathcal{B}} \\ &= \frac{i}{8}(\bar\theta\theta)\Big\{-4(\partial_m\bar\psi^{\mathcal{A}}\gamma^m\psi^{\mathcal{B}})-2(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n\psi^{\mathcal{B}})\partial_m X^{\mathcal{A}}+2(\overline{\chi}_m\gamma^m\psi^{\mathcal{B}})B^{\mathcal{A}} \\ &\quad -2\psi^{\mathcal{A}}\gamma_5\gamma^m\psi^{\mathcal{B}}\omega_m+A\bar\psi^{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B}}+i(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n\psi^{\mathcal{B}})\overline{\chi}_m\psi^{\mathcal{A}}\Big\} \end{aligned} \tag{E.11}$$

(E.9) から (E.11) の式を使って (E.8) の $[\,Y^{\mathcal{A}}, Y^{\mathcal{B}}\,]$ を求めると次式になる。

$$\begin{aligned} -[\,Y^{\mathcal{A}}, Y^{\mathcal{B}}\,] &= -\bar\psi^{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B}}-\{B^{\mathcal{B}}\bar\psi^{\mathcal{A}}\theta-(\bar\theta\gamma^m\psi^{\mathcal{A}})(\partial_m X^{\mathcal{B}}-\frac{i}{2}\bar\chi_m\psi^{\mathcal{B}})\} \\ &\quad -\{B^{\mathcal{A}}\bar\psi^{\mathcal{B}}\theta-(\bar\theta\gamma^m\psi^{\mathcal{B}})(\partial_m X^{\mathcal{A}}-\frac{i}{2}\bar\chi_m\psi^{\mathcal{A}})\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(\bar\theta\theta)\Big\{-\frac{i}{2}(\partial_m\bar\psi^{\mathcal B}\gamma^m\psi^{\mathcal A})-\frac{i}{4}(\bar\chi_n\gamma^m\gamma^n\psi^{\mathcal A})\partial_m X^{\mathcal B}\\
&+\frac{i}{4}(\bar\chi_m\gamma^m\psi^{\mathcal A})B^{\mathcal B}\underbrace{-\frac{i}{4}(\bar\psi^{\mathcal A}\gamma^m\gamma_5\psi^{\mathcal B})\omega_m}_{(*)}+\frac{i}{8}A\bar\psi^{\mathcal A}\psi^{\mathcal B}\\
&-\frac{1}{8}\bar\chi_n\gamma^m\gamma^n\psi^{\mathcal A}\bar\chi_m\psi^{\mathcal B}-B^{\mathcal A}B^{\mathcal B}+g^{mn}\partial_m X^{\mathcal A}\partial_n X^{\mathcal B}\\
&-\frac{i}{2}g^{mn}\partial_m X^{\mathcal A}\bar\chi_n\psi^{\mathcal B}-\frac{i}{2}g^{mn}\bar\chi_m\psi^{\mathcal A}\partial_n X^{\mathcal B}-\frac{1}{4}g^{mn}\bar\chi_m\psi^{\mathcal A}\bar\chi_n\psi^{\mathcal B}\\
&-\frac{i}{2}(\partial_m\bar\psi^{\mathcal A}\gamma^m\psi^{\mathcal B})-\frac{i}{4}(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n\psi^{\mathcal B})\partial_m X^{\mathcal A}+\frac{i}{4}(\overline{\chi}_m\gamma^m\psi^{\mathcal B})B^{\mathcal A}\\
&\underbrace{-\frac{i}{4}\psi^{\mathcal A}\gamma_5\gamma^m\psi^{\mathcal B}\omega_m}_{(*)}+\frac{i}{8}A\bar\psi^{\mathcal A}\psi^{\mathcal B}-\frac{1}{8}(\overline{\chi_n}\gamma^m\gamma^n\psi^{\mathcal B})\overline{\chi}_m\psi^{\mathcal A}\Big\} \qquad \text{(E.12)}
\end{aligned}
$$

$(*)$ の項は打ち消し合う。この式 (E.12) を見やすくするため、次の様な $Y^{\mathcal{AB}}$ を定義する。

$$
\begin{aligned}
Y^{\mathcal{AB}}\equiv{}&\frac{1}{2}\bar\psi^{\mathcal A}\psi^{\mathcal B}+\{B^{\mathcal B}\bar\psi^{\mathcal A}\theta-(\bar\theta\gamma^m\psi^{\mathcal A})(\partial_m X^{\mathcal B}-\frac{i}{2}\bar\chi_m\psi^{\mathcal B})\}\\
&+(\bar\theta\theta)\Big\{\frac{i}{2}(\partial_m\bar\psi^{\mathcal B}\gamma^m\psi^{\mathcal A})+\frac{i}{4}(\bar\chi_n\gamma^m\gamma^n\psi^{\mathcal A})\partial_m X^{\mathcal B}-\frac{i}{4}(\bar\chi_m\gamma^m\psi^{\mathcal A})B^{\mathcal B}\\
&-\frac{i}{8}A\bar\psi^{\mathcal A}\psi^{\mathcal B}+\frac{1}{8}\bar\chi_n\gamma^m\gamma^n\psi^{\mathcal A}\bar\chi_m\psi^{\mathcal B}+\frac{1}{2}B^{\mathcal A}B^{\mathcal B}-\frac{1}{2}g^{mn}\partial_m X^{\mathcal A}\partial_n X^{\mathcal B}\\
&+\frac{i}{2}g^{mn}\partial_m X^{\mathcal A}\bar\chi_n\psi^{\mathcal B}+\frac{1}{8}g^{mn}\bar\chi_m\psi^{\mathcal A}\bar\chi_n\psi^{\mathcal B}\Big\}
\end{aligned}
$$

そうすると $[\,Y^{\mathcal A},Y^{\mathcal B}\,]$ は $Y^{\mathcal{AB}}$ を使って次式の様な簡単な形で書かれる。

$$
[\,Y^{\mathcal A},Y^{\mathcal B}\,]=Y^{\mathcal{AB}}+Y^{\mathcal{BA}}\equiv Y^{(\mathcal{AB})} \qquad \text{(E.13)}
$$

よって求めたい $\det h_{\alpha\beta}$(E.6) は $Y^{(\mathcal{AB})}$ を使って

$$
\begin{aligned}
\det h_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}[\,Y^{\mathcal A},Y^{\mathcal B}\,][\,Y_{\mathcal A},Y_{\mathcal B}\,]\\
&= -\frac{1}{2}Y^{(\mathcal{AB})}Y_{(\mathcal{AB})}
\end{aligned}
$$

と書くことが出来る。以前の計算と同様にして $Y^{(\mathcal{AB})}$ の θ の 0 次、1 次、2 次の項をそれぞれ $Y^{(\mathcal{AB})}(0)$、$Y^{(\mathcal{AB})}(1)$、$Y^{(\mathcal{AB})}(2)$ とおく。そうすると $\det h_{\alpha\beta}$ の θ の 2 次までの項は次式となる。

$$
\begin{aligned}
\det h_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}Y^{(\mathcal{AB})}Y_{(\mathcal{AB})}\\
&= -\frac{1}{2}\{Y^{(\mathcal{AB})}(0)+Y^{(\mathcal{AB})}(1)+Y^{(\mathcal{AB})}(2)\}\{Y_{(\mathcal{AB})}(0)+Y_{(\mathcal{AB})}(1)+Y_{(\mathcal{AB})}(2)\}\\
&= -\frac{1}{2}\{Y^{(\mathcal{AB})}(0)Y_{(\mathcal{AB})}+Y^{(\mathcal{AB})}(1)(Y_{(\mathcal{AB})}(0)+Y_{(\mathcal{AB})}(1))+Y^{(\mathcal{AB})}(2)Y_{(\mathcal{AB})}(0)\}
\end{aligned}
$$

よって (E.4) で使った $\det h_{\alpha\beta}$ の θ の 0 次、1 次、2 次の項 ; $H(0)$、$H(1)$、$H(2)$ はそれぞれ次の様に書くことが出来る。

$$
H(0) = -\frac{1}{2}Y^{(\mathcal{AB})}(0)Y_{(\mathcal{AB})}(0)
$$

$$\begin{aligned}
H(1) &= -\frac{1}{2}\{Y^{(\mathcal{AB})}(0)Y_{(\mathcal{AB})}(1)+Y^{(\mathcal{AB})}(1)Y_{(\mathcal{AB})}(0)\} = -Y^{(\mathcal{AB})}(0)Y_{(\mathcal{AB})}(1)\\
H(2) &= -\frac{1}{2}\{Y^{(\mathcal{AB})}(0)Y_{(\mathcal{AB})}(2)+Y^{(\mathcal{AB})}(1)Y_{(\mathcal{AB})}(1)+Y^{(\mathcal{AB})}(2)Y_{(\mathcal{AB})}(0)\}\\
&= -\frac{1}{2}Y^{(\mathcal{AB})}(1)Y_{(\mathcal{AB})}(1)-Y^{(\mathcal{AB})}(0)Y_{(\mathcal{AB})}(2)
\end{aligned} \tag{E.14}$$

$\det h_{\alpha\beta}$ は (E.4) の計算を成し遂げれば得られるが、そのためには $H(0)$、$H(1)$、$H(2)$ を求めなければならない。まず $H(0)$ を求める。

$$\begin{aligned}
H(0) &= -\frac{1}{2}Y^{(\mathcal{AB})}(0)Y_{(\mathcal{AB})}(0)\\
&= -\frac{1}{2}\{\frac{1}{2}2\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B}}\frac{1}{2}2\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\psi_{\mathcal{B}}\}\\
&= \frac{1}{4}(\bar{\psi}\psi)^2
\end{aligned} \tag{E.15}$$

次に $H(1)$ を計算する。(E.14) から

$$\begin{aligned}
H(1) &= -Y^{(\mathcal{AB})}(0)Y_{(\mathcal{AB})}(1)\\
&= -\frac{1}{2}\bar{\psi}^{(\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B})}\{B_{(\mathcal{B}}\bar{\psi}_{\mathcal{A})}\theta-(\bar{\theta}\gamma^m\psi_{(\mathcal{A})}(\partial_m X_{\mathcal{B})}-\frac{i}{2}\bar{\chi}_m\psi_{\mathcal{B})})\}\\
&= -\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B}}\{B_{\mathcal{B}}\bar{\psi}_{\mathcal{A}}+B_{\mathcal{A}}\bar{\psi}_{\mathcal{B}}\}\\
&\quad +\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B}}\{\bar{\theta}\gamma^m\psi_{\mathcal{A}}\partial_m X_{\mathcal{B}}+\bar{\theta}\gamma^m\psi_{\mathcal{B}}\partial_m X_{\mathcal{A}}\}\\
&\quad -\frac{i}{2}\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B}}\{\bar{\theta}\gamma^m\psi_{\mathcal{A}}\bar{\chi}_m\psi_{\mathcal{B}}+\bar{\theta}\gamma^m\psi_{\mathcal{B}}\bar{\chi}_m\psi_{\mathcal{A}}\}\\
&= \cdots\cdots\\
&= (\bar{\psi}\psi)\bar{\theta}\psi^{\mathcal{B}}B_{\mathcal{B}}-(\bar{\psi}\psi)\bar{\theta}\gamma^m\psi^{\mathcal{B}}\partial_m X_{\mathcal{B}}-\frac{i}{4}(\bar{\psi}\psi)^2\bar{\theta}\gamma^m\psi
\end{aligned} \tag{E.16}$$

最後に $H(2)$ を計算する。(E.14) から $H(2)$ は $Y^{(\mathcal{AB})}(1)Y_{(\mathcal{AB})}(1)$ と $Y^{(\mathcal{AB})}(0)Y_{(\mathcal{AB})}(2)$ から成るが、まず $Y^{(\mathcal{AB})}(1)Y_{(\mathcal{AB})}(1)$ を計算する。

$$\begin{aligned}
Y^{(\mathcal{AB})}(1)Y_{(\mathcal{AB})}(1) &= \{B^{(\mathcal{B}}\bar{\psi}^{\mathcal{A})}\theta-(\bar{\theta}\gamma^m\psi^{(\mathcal{A})}(\partial_m X^{\mathcal{B})}-\frac{i}{2}\bar{\chi}_m\psi^{\mathcal{B})})\}\\
&\quad \times\{B_{(\mathcal{B}}\bar{\psi}_{\mathcal{A})}\theta-(\bar{\theta}\gamma^m\psi_{(\mathcal{A})}(\partial_m X_{\mathcal{B})}-\frac{i}{2}\bar{\chi}_m\psi_{\mathcal{B})})\}\\
&= \cdots\cdots\\
&= (\bar{\theta}\theta)[-\bar{\psi}\psi B^2-\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B}}B^{\mathcal{A}}B_{\mathcal{B}}-2\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\gamma^n\psi^{\mathcal{B}}\partial_n X_{\mathcal{B}}B^{\mathcal{A}}\\
&\quad +\frac{i}{2}B^{\mathcal{A}}\bar{\psi}\psi\bar{\chi}_m\gamma^m\psi_{\mathcal{A}}+g^{nm}\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B}}\partial_n X_{\mathcal{B}}\partial_m X^{\mathcal{A}}\\
&\quad -\frac{1}{e}\epsilon^{nm}\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\gamma_5\psi^{\mathcal{B}}\partial_n X_{\mathcal{B}}\partial_m X^{\mathcal{A}}\\
&\quad +(\bar{\psi}\psi)\{g^{nm}\partial_n X_{\mathcal{B}}\partial_m X^{\mathcal{B}}-\frac{i}{2}g^{nm}\partial_n X^{\mathcal{B}}\bar{\chi}_m\psi_{\mathcal{B}}+\frac{i}{2e}\epsilon^{mn}\bar{\chi}_m\gamma_5\psi_{\mathcal{A}}\partial_n X^{\mathcal{A}}\}\\
&\quad -\frac{1}{16}(\bar{\psi}\psi)^2\{g^{nm}\bar{\chi}_n\chi_m-\frac{\epsilon^{nm}}{e}\bar{\chi}_n\gamma_5\chi_m\}]
\end{aligned} \tag{E.17}$$

次に $H(2)$ の $Y^{(\mathcal{AB})}(0)Y_{(\mathcal{AB})}(2)$ を計算する。

$$Y^{(\mathcal{AB})}(0)Y_{(\mathcal{AB})}(2) = \frac{1}{2}\bar{\psi}^{(\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B})}(\bar{\theta}\theta)\left\{\frac{i}{2}(\partial_m\bar{\psi}_{(\mathcal{B}}\gamma^m\psi_{\mathcal{A})})+\frac{i}{4}(\bar{\chi}_n\gamma^m\gamma^n\psi_{(\mathcal{A})}\partial_m X_{\mathcal{B})}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{i}{4}(\bar{\chi}_m\gamma^m\psi_{(\mathcal{A}})B_{\mathcal{B})}-\frac{i}{8}A\bar{\psi}_{(\mathcal{A}}\psi_{\mathcal{B})}+\frac{1}{8}\bar{\chi}_n\gamma^m\gamma^n\psi_{(\mathcal{A}}\bar{\chi}_m\psi_{\mathcal{B})}+\frac{1}{2}B_{(\mathcal{A}}B_{\mathcal{B})}\\
&-\frac{1}{2}g^{mn}\partial_m X_{(\mathcal{A}}\partial_n X_{\mathcal{B})}+\frac{i}{2}g^{mn}\partial_m X_{(\mathcal{A}}\bar{\chi}_n\psi_{\mathcal{B})}+\frac{1}{8}g^{mn}\bar{\chi}_m\psi_{(\mathcal{A}}\bar{\chi}_n\psi_{\mathcal{B})}\Big\}\\
=\ &\cdots\cdots\\
=\ &(\bar{\theta}\theta)[-\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B}}B_{\mathcal{A}}B_{\mathcal{B}}-g^{mn}\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B}}\partial_m X_{\mathcal{A}}\partial_n X_{\mathcal{B}}\\
&+(\bar{\psi}\psi)\{-\frac{i}{2}\partial_m\bar{\psi}_{\mathcal{B}}\gamma^m\psi^{\mathcal{B}}-\frac{3i}{4}g^{mn}\partial_n X_{\mathcal{B}}\bar{\chi}_m\psi^{\mathcal{B}}\\
&+\frac{i}{4e}\epsilon^{mn}\bar{\chi}_n\gamma_5\psi^{\mathcal{B}}\partial_m X_{\mathcal{B}}+\frac{i}{4}B_{\mathcal{B}}\bar{\chi}_m\gamma^m\psi^{\mathcal{B}}\}\\
&+(\bar{\psi}\psi)^2\{\frac{1}{8}g^{mn}\bar{\chi}_n\chi_m+\frac{i}{8}A-\frac{1}{16e}\epsilon^{mn}\bar{\chi}_n\gamma_5\chi_m\}]
\end{aligned}
\tag{E.18}
$$

よって $H(2)$ は (E.17) と (E.18) から次式の形にまとまる。

$$
\begin{aligned}
H(2)\ =\ &-Y^{(\mathcal{AB})}(0)Y_{(\mathcal{AB})}(2)-\frac{1}{2}Y^{(\mathcal{AB})}(1)Y_{(\mathcal{AB})}(1)\\
=\ &(\bar{\theta}\theta)[-\frac{1}{2}\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B}}B_{\mathcal{A}}B_{\mathcal{B}}-\frac{i}{2}B_{\mathcal{B}}(\bar{\psi}\psi)\bar{\chi}_m\gamma^m\psi^{\mathcal{B}}+\frac{1}{2}(\bar{\psi}\psi)B^2\\
&+\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\gamma^n\psi^{\mathcal{B}}\partial_n X_{\mathcal{B}}B^{\mathcal{A}}+\frac{1}{2}g^{nm}\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B}}\partial_n X_{\mathcal{B}}\partial_m X^{\mathcal{A}}+\frac{1}{2e}\epsilon^{nm}\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\gamma_5\psi^{\mathcal{B}}\partial_n X_{\mathcal{B}}\partial_m X^{\mathcal{A}}\\
&+(\bar{\psi}\psi)\{\frac{i}{2}\partial_m\bar{\psi}_{\mathcal{B}}\gamma^m\psi^{\mathcal{B}}+ig^{mn}\partial_n X_{\mathcal{B}}\bar{\chi}_m\psi^{\mathcal{B}}-\frac{1}{2}g^{nm}\partial_n X_{\mathcal{B}}\partial_m X^{\mathcal{B}}\}\\
&+(\bar{\psi}\psi)^2\{-\frac{5}{32}g^{nm}\bar{\chi}_n\chi_m-\frac{i}{8}A-\frac{1}{32e}\epsilon^{nm}\bar{\chi}_n\gamma_5\chi_m\}]
\end{aligned}
\tag{E.19}
$$

以上で $H(0)$、$H(1)$、$H(2)$ が求まったので (E.4) の $\frac{1}{E}\det h_{\alpha\beta}$ の θ の２次の項が計算出来る。(E.16)、(E.17)、(E.19) により $\frac{1}{E}\det h_{\alpha\beta}$ の θ の２次の項を求めると次式になる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{E}\det h_{\alpha\beta}|_{\theta^2}=\frac{1}{e}\{H(2)-\frac{E(1)}{e}H(1)+(-\frac{E(2)}{e}+\frac{E(1)^2}{e^2})H(0)\}\\
&=(\bar{\theta}\theta)\frac{1}{e}\{-\frac{1}{2}B_{\mathcal{A}}B^{\mathcal{B}}\bar{\psi}_{\mathcal{B}}\psi^{\mathcal{A}}+\frac{1}{2}B^2\bar{\psi}\psi-\frac{3i}{4}B^{\mathcal{A}}\bar{\psi}\psi\bar{\chi}_m\gamma^m\psi_{\mathcal{A}}+B^{\mathcal{A}}\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\gamma^n\psi^{\mathcal{B}}\partial_n X_{\mathcal{B}}\\
&\qquad+(\bar{\psi}\psi)^2(-\frac{3i}{16}A-\frac{1}{4}g^{nm}\bar{\chi}_n\chi^m-\frac{1}{32e}\epsilon^{nm}\bar{\chi_m}\gamma^5\chi_n)\\
&+\bar{\psi}\psi(-\frac{i}{2}\bar{\psi}^{\mathcal{B}}\gamma^m\partial_m\psi_{\mathcal{B}}-\frac{1}{2}g^{nm}\partial_n X_{\mathcal{A}}\partial_m X^{\mathcal{A}}+\frac{5i}{4}g^{mn}\bar{\chi}_n\psi^{\mathcal{A}}\partial_m X_{\mathcal{A}}-\frac{i}{4e}\epsilon^{m\ell}\partial_m X_{\mathcal{A}}\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\gamma^5\chi_\ell)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B}}g^{mn}\partial_m X_{\mathcal{A}}\partial_n X_{\mathcal{B}}-\frac{1}{2e}\{X_{\mathcal{A}},X^{\mathcal{B}}\}\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\gamma_5\psi^{\mathcal{B}}\}
\end{aligned}
\tag{E.20}
$$

よって作用の被積分関数 $(\frac{\Gamma}{E}\det h_{\alpha\beta}+\Delta E)$ が求まる。それを θ で積分することによって求めたかった作用 $S_3(6.13)$ が得られる。

$$
\begin{aligned}
S_3=\int d^2x[&\frac{\Gamma}{e}\{B_{\mathcal{A}}B^{\mathcal{B}}\bar{\psi}_{\mathcal{B}}\psi^{\mathcal{A}}-B^2\bar{\psi}\psi+\frac{3i}{2}B^{\mathcal{A}}\bar{\psi}\psi\bar{\chi}_m\gamma^m\psi_{\mathcal{A}}-2B^{\mathcal{A}}\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\gamma^n\psi^{\mathcal{B}}\partial_n X_{\mathcal{B}}\\
&\qquad+(\bar{\psi}\psi)^2(\frac{3i}{8}A+\frac{1}{2}g^{nm}\bar{\chi}_n\chi^m+\frac{1}{16e}\epsilon^{nm}\bar{\chi_m}\gamma^5\chi_n)\\
&+\bar{\psi}\psi(i\bar{\psi}^{\mathcal{B}}\gamma^m\partial_m\psi_{\mathcal{B}}+g^{nm}\partial_n X_{\mathcal{A}}\partial_m X^{\mathcal{A}}-\frac{5i}{2}g^{mn}\bar{\chi}_n\psi^{\mathcal{A}}\partial_m X_{\mathcal{A}}+\frac{i}{2e}\epsilon^{ml}\partial_m X_{\mathcal{A}}\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\gamma^5\chi_l)\\
&\qquad-\bar{\psi}^{\mathcal{A}}\psi^{\mathcal{B}}g^{mn}\partial_m X_{\mathcal{A}}\partial_n X_{\mathcal{B}}+\frac{1}{e}\{X_{\mathcal{A}},X^{\mathcal{B}}\}\bar{\psi}_{\mathcal{A}}\gamma_5\psi^{\mathcal{B}}\}\\
&\qquad-\frac{\Delta}{2}(\frac{1}{2}\epsilon^{mn}\bar{\chi_m}\gamma_5\chi_n+ieA)]
\end{aligned}
$$

References

[1] A.Schild, "Classical null Strings." Phys.Rev.**D16** (1977) 1722

[2] M.B.Green, J.H.Schwarz and E.Witten, "Superstring theory Ⅰ, Ⅱ." Cambridge University Press (1987).

[3] 大栗 博司 "弦の理論の複素解析的構造." 別冊数理科学 「超弦理論ー四つの力の統一へ向けてー」 1990年4月（サイエンス社） p95-107

[4] T.Yoneya, "Schild Action and Uncertainty Principle in String Theory." Prog.Theor.Phys.**97** (1997) 949, hep-th/9703078

[5] Y.Nambu, "Generalized Hamiltonian Dynamics." Phys.Rev.**D7** (1980) 2405

[6] Y.Nambu, "Hamilton-Jacobi Formalism For Strings." Phys.Lett.**B92** (1980) 327

[7] A.Sugamoto, "Theory of Membranes." Nucl.Phys.**B215** (1983) 381

[8] A.Sugamoto, "Old-Fashioned Dualities Revisited." hep-th/9611051

[9] T.Eguchi, "New Approach to the Quantized String Theory." Phys.Rev.Lett.**44**(1980) 126

[10] P.S.Howe, "Super Weyl transformations in two dimensions." J.Phys.**A12**,(1978)393

[11] P.S.Howe, "Superspace and the spinning string." Phys. Lett.**B70**(1977) 453

[12] R.Kuriki, S.Ogushi, A.Sugamoto, "Deformation of Schild String." hep-th/9811029

[13] N.Ishibashi, H.Kawai, Y.Kitazawa, A.Tsuchiya, "A Large-N Reduced Model as Superstring." Nucl.Phys.**B498**(1997)467 ,hep-th/9612115

[14] J.Polchinski, "Dirichlet-Branes And Ramond-Ramond Charges." Phys.Rev. Lett.**75**(1995) 4724, hep-th/9510017

[15] J.Polchinski, "TASI Lecture on D-branes." hep-th/9611050

[16] T.Banks, W.Fischler, S.H.Shenker and L.Susskind, "M-theory As A Matrix Model:A Conjecture." Phys.Rev.**D55**(1997)5112, hep-th/9610043

[17] E.Witten, "Bound States of Strings And p-Branes." Nucl.Phys.**B460** (1996)335, hep-th/9510135

[18] Y.Kazama, "Strings and Beyond (お茶大集中講義 Lecture Note)." (1998,1997)

[19] A.M.Polyakov, "Quantum Geometry of Bosonic Strings." Phys.Lett.**B103** (1981) 207

[20] A.M.Polyakov, "Quantum Geometry of Fermionic Strings." Phys.Lett.**B103** (1981) 211

[21] J.Wess, B.Zumino , "Supergauge Transformation in Four dimensions." Nucl.Phys.**70** (1974) 39; "Supergauge Invariant Extension of Quantum Electrodynamics." Nucl.Phys.**78** (1974) 1

[22] J.Wess, J.Bagger, "Supersymmetry and Supergravity." Princeton University Press(1982)

[23] ミチオ カク 著（太田 信義 訳）「超弦理論」シュプリンガー・フェアラーク東京（株）,(1989)

[24] M.E.Peskin,D.V.Schroeder,"An Introduction to Quantum Field Theory."Addison-Wesley Publishing Company(1995).

[25] 九後 汰一郎「ゲージ場の量子論 I II」培風館株式会社,(1989)

[26] 藤井 保憲 「超重力理論入門」マグロウヒルブック株式会社,(1987)

[27] P.van Nieuwenhuizen ,"Supergravity."Phys.Rep.**68**(1981)189

[28] Y.Matsumura, N.Sakai and T.Sakai, "Mass Spectra of Supersymmetric Yang-Mills Theories in $1+1$ Dimensions." Phys.Rev.**D52** (1995) 2446,hep-th/9504150

[29] P.A.M.Dirac,"The Theory of Magnetic Poles." Phys.Rev.**74**(1948)817

[30] H.Aoki, S.Iso, H.Kawai and Y.Kitazawa,"Space-Time Structures from II B Matrix Model." Prog.Theor.Phys.**99**(1998) 713,hep-th/9802085

[31] K.Becker, M.Becker,"A Two-Loop Test of M(atrix) Theory."Nucl.Phys.**B506**(1997)48, hep-th/9705091

[32] Y.Okawa,T.Yoneya,"Equations of Motion and Galilei Invariance in D-Particles Dynamics."Nucl.Phys.**B541**(1999)163, hep-th/9808188; Y.Okawa,T.Yoneya,"Multi-Body Interactions of D-Particles in Supergravity and Matrix Model."Nucl.Phys.**B538**(1999)67, hep-th/9806108

[33] H.Kajiura, A.Kato and S.Ogushi, "Comments on Large N Matrix Model." hep-th/9903233