Natural Science Report, Ochanomizu University, Vol. 5, No. 2, 1955 175
お茶の水女子大学 自然科学報告 第5巻 第2号

Sur les Points Singuliers des Équations Différentielles Ordinaires du Premier Ordre. IV

Tizuko Katō (加藤千鶴子)

Institut de Mathématiques, Faculté des Sciences,
Université Ochanomizu, Tokyo

Dans le troisième mémoire[1] nous avons considéré l'équation differentielle

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{yQ(x,y)} \tag{1}$$

sous les conditions suivantes:

i) $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont des polynomes de y sans facteur commun, leurs coefficients étant des fonctions régulières de x pour $|x|<\Delta$. $P_0(y)=P(0,y)$, $Q_0(y)=Q(0,y)$ sont supposés différents de zéro pour $y=0$.

ii) L'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt}=\frac{P_0(y)}{y\,Q_0(y)} \tag{2}$$

admet une solution $\varphi(t,\tau_0)$ avec une période réelle ω pour $0\leqq\Im t<\tau$ et holomorphe sauf les points $t=\tau_0-m\omega$ ($\Im\tau_0=0$, $\omega>0$, $m=0, 1,\ldots$) où elle s'annule. Elle n'y annule pas $Q_0(y)$.

iii) Il existe une solution de (1) telle que $y(\tau_0-m\omega)=0$ ($m=0, 1,\ldots$).

Dans ce mémoire, nous voulons supprimer la condition iii).

Désignons d'abord par Γ la courbe que $\varphi(t,\tau_0)$ décrit pour $\tau_0-\omega\leqq t\leqq\tau_0$ et par Γ' le domaine formé des points distants de Γ moins de δ. Si l'on prend des nombres δ et Δ_1 positifs assez petits $P(e^t,y)$ ne s'annulle pas pour $y\in\Gamma'$, $|e^t|<\Delta_1$. Nous considérons les équations différentielles

$$\frac{dt}{dy}=\frac{yQ(e^t,y)}{P(e^t,y)} \tag{3}$$

$$\frac{dt}{dy}=\frac{yQ_0(y)}{P_0(y)}. \tag{4}$$

Soit $f(t_0)$ la valeur que prend la solution de (3), satisfaisant à la condition initiale: $t=t_0$ pour $y=0$, quand elle revient à $y=0$ en décrivant la courbe Γ dans le sens direct. La solution de (4), qui prend en $y=0$ la valeur t_0, est

$$\int_0^y\frac{yQ_0(y)}{P_0(y)}dy+t_0=\phi(y)+t_0.$$

Si l'on pose

1) T. Katō, Sur les points singuliers des équations différentielles du premier ordre. III. (Natural Science Report, Ochanomizu Univ. Vol. 5, No. 1 (1954)).

$$t=\phi(y)+t_0+z\,,$$

z satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dz}{dy}=\frac{yQ(e^t,y)}{P(e^t,y)}-\frac{yQ_0(y)}{P_0(y)} \tag{5}$$

où $t=\phi(y)+t_0+z$. La solution de (5) est une fonction holomorphe de e^{t_0} contenant le terme e^{t_0} comme facteure. Donc on obtient

$$f(t)=t-\omega+f_1(e^t)$$

où $f_1(e^t)$ est une fonction régulière pour $|e^t|<\Delta_2$.

Considérons l'équation fonctionnelle en

$$\chi(f(t))=\chi(t)-\omega\,.$$

Si l'on pose

$$e^{\chi(\log x)}=\psi(x)\,,$$

on obtient l'équation fonctionnelle de Schröder

$$\psi(e^{f(t)})=e^{-\omega}\psi(e^t)\,. \tag{6}$$

Puisque $e^{-\omega}\neq 1$, l'équation (6) admet une solution régulière de e^t

$$\psi(e^t)=\sum_{j=0}^{\infty} r_j\, e^{jt}$$

oú $r_0=0$, $r_1=1$. L'équation fonctionnelle en $\chi(t)$ admet donc une solution de la forme

$$\chi(t)=t+\sum_{j=k}^{\infty} q_j\, e^{jt} \qquad (k\geqq 1)$$

où $\sum_{j=k}^{\infty} q_j\, e^{jt}$ est une série entière de e^t ayant un rayon de convergence non nul.

Si l'on prend $\chi(t)=s$, pour la variable indépendente, l'équation différentielle (1) se transforme en

$$\frac{dy}{ds}=\frac{F(e^s,y)}{yG(e^s,y)}\,, \tag{7}$$

où $F(e^s,y)$ et $G(e^s,y)$ sont des polynoms de y sans facteur commun, leurs coefficients étant des fonctions régulières de e^s pour $|e^s|<\Delta_3$, et l'on a de plus $F(0,y)=P(0,y)$ et $G(0,y)=Q(0,y)$. Il existe une solution de (7) telle que $y(s_0-m\omega)=0$ $(m=0,\ 1,\dots)$ où $\chi(t_0)=s_0$. Si donc s_0 est réel, négatif et assez grand en module, cette solution est développable en une série uniformément convergente

$$y(t)=\varphi(s,s_0)\Big(1+\sum_{j=1}^{\infty} p_j\,(s,s_0)e^{js}\Big) \tag{8}$$

pour $s\in D=\{s\,;\ \Re s\leqq s_0\,,\ 0\leqq \Im s<\theta\}$ $(s=\chi(t),\ s_0=\chi(t_0))$.

Par conséquent, on obtient la conclusion suivante:

Si l'équation différentielle (1) *satisfait aux conditions mentionnées ci-dessus* i), ii) *et si* $\chi(t_0)=s_0$ *est réel et assez grand en module, la solution de* (1) *est développable en la série* (8) *pour* $t\in\mathfrak{S}=\{t;\ \Re\chi(t)\leq s_0,\ 0\leqq\Im\chi(t)<\theta\}$.

En terminant ce mémoire, je remercie Professeur Masuo Hukuhara de la bienveillance sincère en me donnant de deverses suggestions profitables.

(*Received December, 25, 1954*)