2006年度公開研究会「数学Ｉ」

日時　平成18年11月18日（土）10：00～10：50　11：05～11：55

対象生徒　附属高校　1年　蘭組　38名

授業者　沖山義光

単元名　数学Ｉ　図形の計量

指導計画

- 鋭角の三角比　9時間
- 三角比の拡張　6時間
- 三角形への応用　9時間
- 図形の計量　9時間（本時は4，5限目）

本授業のテーマ　錐体の体積を区分求積法の考えで求める。

テーマ設定の理由

本校では、指導要領に従って、標準的なカリキュラムを組み、教科書を中心にそれに授業者の見解を入れ、数学の理解や興味を喚起する工夫を行っている。単元「図形と計量」においてもそれは同様である。新指導要領になり中学から立体の表面積や体積を求める内容が移行されてきた。高校では中学や小学校の指導と違って公式を単に覚えて求積計算をすることよりも、公式の成り立つ理由を指導することに重点をおきたいと考えている。本校での教科書（東京書籍）を見ると、球の体積は水の入った円柱の容器に半径が同じ球を入れると、水位が半径の4/3だけ上がるというお話しから球の体積を導いている。これでは実際に実験するにしても4/3という数値になることは納得できないではないだろうか。また、最後のページには広場と称して、カバリエリの定理を前提に円錐の体積と関連付けて説明を試みている。また、円の表面積についてはすべての頂点が球面上にある多面体をつくり各頂点と球の中心Oを線分で結びいくつもの細長い角錐に分割し、多面体の各面を小さくすれば角錐の底面積の和は球の表面積に等しいとみて球の表面積を導いている。これからわかることは球の体積、表面積はいずれも錐体の体積が（底面積×高さ÷3）であることを前提としているということである。それでは錐体の体積は小中学校ではどのようにして教えているのか。おそらく、容器に水を入れるなど実験的な方法が多いと思われる。これでは意識のある生徒には疑問が残るのでは無いだろうか。そこで、このようなことに疑問を持ってもらい一歩発展した方法で錐体の体積を求めてみようという試みである。

本授業のねらい

●これまでの授業で教科書の球の表面積、体積の公式を導くには錐体の体積が求まらないとできないことを確認、授業の動機付けとする。

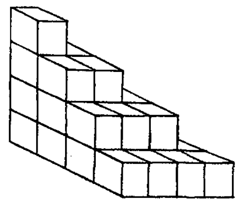
●自然数の和、平方数の和の公式を知る。平方数の和について立体模型を作成し生徒自身で導く。

●区分求積法のアイデアを用いて錐体の体積を求める。

生徒の実態

生徒はそれぞれ自分なりの姿勢で問題を解いたり考える態度はできている。ただ、計算力がなかったり、深く考えることが苦手な生徒もあり上記のようなことに興味を持つかどうか。最近の生徒はこのようなことに興味を持つことの機会も多くなくなったせいか反応はあまりいいとはいえない。自分の考えを素直に表現するには自分に自信が無いとできないことであり、少しでも自信をつけることを目指し、生徒の興味・関心を引き出したい。

授業の流れ



1．グループ（6人×6Gs　2人×1G）ごとに、用意したスタイロフォームを切って図のような立体を1人1個作成する。3グループは5段型、3グループは4段型、1グループは3段型をそれぞれ作成する。

2．教科書の球の表面積、体積の公式を導くには錐体の体積が求まらないとできないことを知り今日の授業の目標を知らせる。

3．できた立体を6個組み合わせて1つの直方体を完成する。各グループで試みる。3段型の2人はこちらであらかじめ用意した4個を加えて試みる。

4．これから平方の和の公式を帰納的に導く。自然数の和 $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ についてはガウスのやった方法を教える。

5．区分求積法のアイデアを説明し、円錐の体積をn分割してその和 S_n の式を求める。

6．n分割の和 $S_n=\frac{\pi}{n}\left\{\left(\frac{a}{n}\right)^2+\left(\frac{2a}{n}\right)^2+\left(\frac{3a}{n}\right)^2+\cdots\left(\frac{na}{n}\right)^2\right\}$ を導いた平方の和の公式を使ってまとめる。

7．$S_n=\frac{\pi a^2}{n^3}\times\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$ を $S_n=\pi a^2\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}$ と変形し $n\to\infty$ のとき $\frac{1}{n}\to 0$ になることをつかって極限値 $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi a^2}{3}$ を導く。

8．角錐の体積や一般の錐体の体積も同様にできることを知らせる。

9．区分求積法を用いて、球の体積を求めることもできることを知らせ、時間があればやってみる。

10. また、2次関数のグラフ $y=x^2$、x 軸と直線 $x=1$ で囲まれる面積も区分求積法で求められることを知らせ課題とする。

準備するもの

- スタイロフォーム（発泡スチロールの角棒、東急ハンズ）
- 発泡スチロール用セメダイン
- スチロールカッター
- 定規等

指導上の留意点

- 立体模型の作業をはじめにしたのは、このような作業ははじめてであり不慣れなこともあり早めに作成したいことと糊が乾くのに時間がかかること。また今日何をするのか作業することで活動を活発にしたいことである。うまくできない生徒にはあらかじめ用意したものを補助する。2人組のものは残り4個はこちらで用意しておく。
- 6個組み合わせて1つの直方体を作るところで、グループによるお互いの交流をねらいとする。
- 自然数の和は特に必要ないが平方数の和を知る前段として知らせる。
- 式の計算は複雑なので細かく丁寧に導いていく。また極限値 $n\to\infty$ のとき $\frac{1}{n}\to 0$ も議論しながら直観で理解させる。

授業を終えて

数学の授業をよりよいものにしていくのはどうしたらよいか。それには、興味や関心をもたせ数学を自分で学習していくという意欲を作ることが重要であると思っています。そのような観点で日々の授業の中でどのような工夫をしているかをまとめると、①数学史や数学用語の由来などを知らせる。②数学の実用性、社会性を話題にする。③数学の体系などを教養としての知識と考えて教える。④数学の他の分野との関係を意識して指導する。⑤小、中学での既習事項との関連を知らせる。⑥一般的な知識への欲求、美的、合理的、批判的精神を喚起する。⑦数学の厳密性、普遍性を意識して指導する。⑧生徒に問題つくりをさせる。⑨作業や実験を通した指導をする。⑩わかりやすい授業や難しいが面白い内容を工夫し達成感を与える。⑪数学的な考え方の良さを強調する。などとなります。これらのことを日々の授業の中で常に考えて工夫を積み重ねています。今回の授業は、本校の理数1日体験授業で中学生向けに実施した授業です。指導要領の改訂で中学校の指導内容であった立体の表面積、体積を高校生らしくできるのに丁度時宜を得、数学Ⅰ「図形と計量」から立体の体積について「何故、錐体の体積は（底面積）×（高さ）÷3」をテーマにして、⑥、⑦、⑨、⑩を考慮した授業を目指しました。テーマとして興味を持ってくださった方が意外と多く30名近くの参加者がいたことはよかったことでした。また、参加

者からも多くの方から好評をいただき、各先生方から材料の値段、どこで購入できるかなどご自分の学校に帰って自分の授業で使ってみたいというお声を聞けたことは公開研究会としての１つの役割を果たせました。 以下は協議会ででた主な感想・意見です。

１．円錐を先にするか。角錐を先にするか。

２．グループの中でまだ組み立てができないうちに先へ進んだ。

３．直線の式を用いたがそれはいいのか。

４．面積のＳと分割のＳが混同して使われていた。

５．球の体積、２次関数の面積など課題にしたが、今後どのように指導していくのか。

６．グループ学習による作業が先生の一言でとてもスムースに進んでいくのに驚いた。

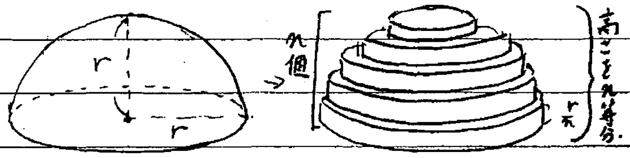
７．区分求積法が１年生で指導可能か興味があったが、指導できることがわかり納得した。

今後の指導として、球の体積、２次関数の面積について課題として提出をしてもらうことにした。38名中14名が提出し、ほとんどが理解できていた。（資料<生徒のレポート>）

Date　・　・　No.

発展課題

1. 球の体積を調べる.



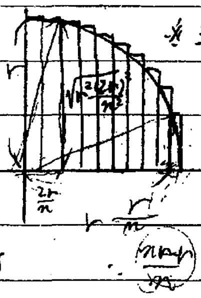
半球を図のようにnコの円柱に分ける.
円柱の高さは全てn分のrとする.

円柱の体積の総和

～円柱の半径～

※三平方を利用

ex)



$= r^2\pi \times \frac{r}{n} + \left\{r^2 - \left(\frac{r}{n}\right)^2\right\}\pi\cdot\frac{r}{n} + \left\{r^2 - \left(\frac{2r}{n}\right)^2\right\}\pi\cdot\frac{r}{n} \ldots\ldots$

くくり出す　$+ \left\{r^2 - \left(\frac{nr-2r}{n}\right)^2\right\}\pi\cdot\frac{r}{n} + \left\{r^2 - \left(\frac{nr-r}{n}\right)^2\right\}\pi\cdot\frac{r}{n}$

$= \frac{r}{n}\pi\left(\frac{n^2r^2}{n^2} + \frac{n^2r^2 - r^2}{n^2} + \frac{n^2r^2 - 4r^2}{n^2} \ldots\ldots + \frac{n^2r^2 - n^2r^2 + 4nr^2 - 4r^2}{n^2}\right.$

くくり出す.　$\left. + \frac{n^2r^2 - n^2r^2 + 2nr^2 - r^2}{n^2}\right)$

$= \frac{r}{n}\pi \times \frac{r^2}{n^2}\left\{n^2 + n^2 - 1^2 + n^2 - 2^2 \ldots + n^2 - (n-2)^2 + n^2 - (n-1)^2\right\}$

n^2がnコ

$= \frac{r^3}{n^3}\pi\left[n^3 - \left\{1^2 + 2^2 \ldots\ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2\right\}\right]$

※ $1^2 + 2^2 + \ldots (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{r^3}{n^3}\pi\left\{n^3 - \frac{(n-1)(2n-1)n}{6}\right\}$

$= \frac{r^3}{\cancel{n^3}}\pi \times \cancel{n^3} - \frac{r^3}{n^{\cancel{3}2}}\pi \times \frac{(n-1)(2n-1)\cancel{n}}{6}$

$= r^3\pi - \frac{r^3\pi(n-1)(2n-1)}{6n^2}$

$= r^3\pi - \frac{r^3}{6}\pi \times \frac{(n-1)}{n} \times \frac{(2n-1)}{n}$

$= r^3\pi - \frac{r^3}{6}\pi \times \left(\frac{n}{n} - \frac{1}{n}\right) \times \left(\frac{2n}{n} - \frac{1}{n}\right)$

$n = \infty$ のとき $\frac{1}{n} = 0$ なので

$= r^3\pi - \frac{r^3}{6}\pi \times (1-0) \times (2-0)$

$= r^3\pi - \frac{r^3}{\cancel{6}_3}\pi \cdot 1 \cdot \cancel{2}$

$= r^3\pi - \frac{r^3}{3}\pi$

$= \frac{3r^3\pi - r^3\pi}{3}$

$= \frac{2}{3}\pi r^3$

＝半球の体積

球の体積は半球の体積の2倍なので

球の体積 $= \frac{2}{3}\pi r^3 \times 2$

$= \frac{4}{3}\pi r^3$

よって、半径rの球の体積は $\frac{4}{3}\pi r^3$ となる.

質問

∞ について考えていて思ったのですが、

x を有限の実数としたら、

$\infty + x = \infty$　　$\infty \div x = \infty$

$\infty - x = \infty$　　$x - \infty = -\infty$

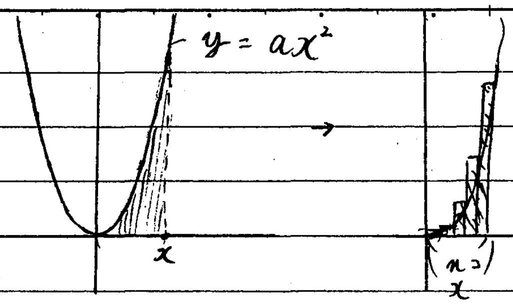
$\infty \times x = \infty$　　$x \div \infty = 0$

と、なるのでしょうか？

それともどうなるのでしょうか？

No.　　Date　・　・

2.
斜線部の面積を調べる.



斜線部を図のようにnコの長方形に分ける.
長方形の幅は全てn分のxとする.

長方形の面積の総和

$$= \frac{x}{n} \times a\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{x}{n} \times a\left(\frac{2x}{n}\right)^2 + \cdots\cdots + \frac{x}{n} \times a\left(\frac{nx-2x}{n}\right)^2 + \frac{x}{n} \times a\left(\frac{nx-x}{n}\right)^2$$

くくり出す

$$= \frac{ax}{n}\left(\frac{x^2}{n^2} + \frac{4x^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2x^2-4nx^2+4x^2}{n^2} + \frac{n^2x^2-2nx^2+x^2}{n^2}\right)$$

くくり出す

$$= \frac{ax}{n} \times \frac{x^2}{n^2}\left\{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-2)^2 + (n-1)^2\right\}$$

※ $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$= \frac{ax^3}{n^3} \times \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{ax^3}{6} \times \frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n} \times \frac{2n+3}{n}$$

$$= \frac{ax^3}{6} \times \left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right) \times \left(\frac{n}{n}+\frac{2}{n}\right) \times \left(\frac{2n}{n}+\frac{3}{n}\right)$$

$n = \infty$ のとき $\frac{1}{n}$、$\frac{2}{n}$、$\frac{3}{n} = 0$ なので

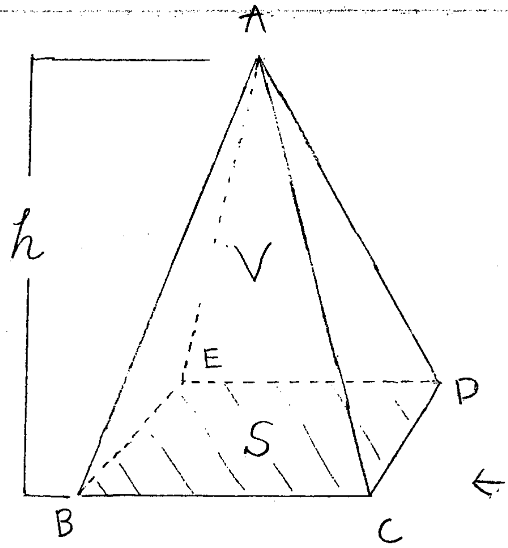
$$= \frac{ax^3}{6} \times (1+0) \times (1+0) \times (2+0)$$

$$= \frac{ax^3}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$$

$$= \frac{ax^3}{3}$$

= 斜線部の面積　　　即ち, 斜線部の面積 $= \dfrac{ax^3}{3}$

① 角錐の体積の公式の証明



四角錐 A－BCDE において、
高さを h,
底面積を S,
体積を V とする (図1)

←図1

高さ h を n 等分し、上から 1, 2, 3 … n 個に底面に平行な面で分割する。
四角錐を、その面を底面とし、高さ $\frac{h}{n}$ の直方体を n 個つみ重ねた形と考える。(図2)

このとき、k 番目の底面積を S_k とし、
直方体の体積を V_k とする。
S と S_k の比を表すと、

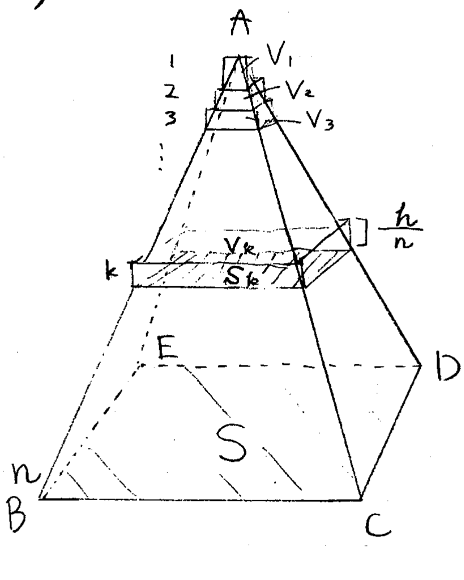
$$S : S_k = h^2 : \left(\frac{k}{n}h\right)^2$$

$$S_k = S \cdot \frac{k^2}{n^2}$$

また、高さは $\frac{h}{n}$ だから

$$V_k = S \cdot \frac{k^2}{n^2} \times \frac{h}{n} \quad — ①$$

図2 →



$V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_k + \cdots + V_{n-1} + V_n$ —②

①の k に 1, 2, 3 … $n-1$, n を代入して、②を n で表すと、

$$V = S\cdot\frac{1^2}{n^2}\cdot\frac{h}{n} + S\cdot\frac{2^2}{n^2}\cdot\frac{h}{n} + S\cdot\frac{3^2}{n^2}\cdot\frac{h}{n} + \cdots$$

$$+ S\cdot\frac{(n-1)^2}{n^2}\cdot\frac{h}{n} + S\cdot\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{h}{n}$$

$$= S\cdot\frac{h}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2\right)$$

$$= S\frac{h}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6}Sh\cdot\frac{1}{n^2}\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6}Sh\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}$$

ここで、$n = \infty$ とすると

$$\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$$

同様に

$$\frac{2n+1}{n} = \frac{2n}{n} + \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$$

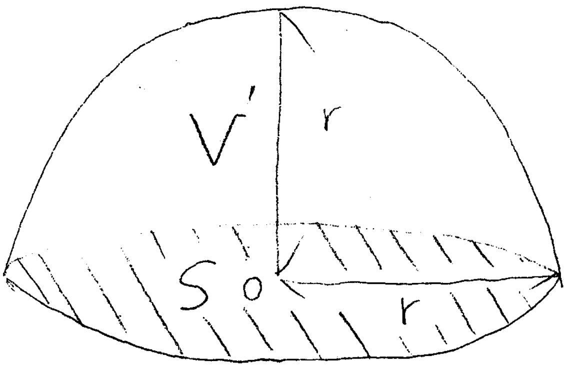
従って

$$\frac{1}{6}Sh\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}Sh$$

∴ 角錐の面積は、

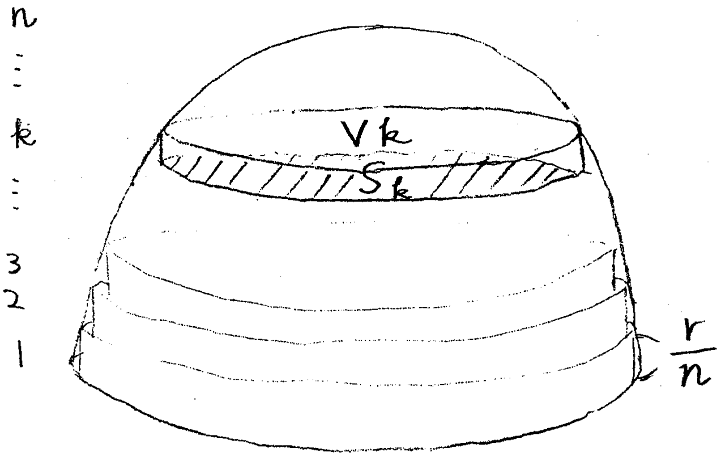
底面積 × 高さ × $\frac{1}{3}$ となる。

② 球の体積の公式の証明

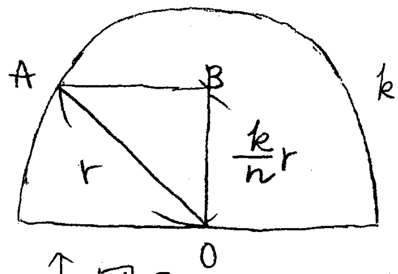


半径が r の半球を作り、底面積を S，体積を V' とする（図1）

← 図1



← 図2



↑ 図3

その半球を、下から 1、2，3… n 個に、底面に平行な面で分割し、分割した面を底面とする円柱を作る。

k 番目の円の面積を S_k とし、体積を V_k とする。（図2）

その半径 AB（図3）の2乗は、

ΔAOB の三平方の定理を使い、

$$(AB)^2 = (AO)^2 - (BO)^2 = r^2 - \left(\frac{k}{n}r\right)^2$$

したがって $S_k = \left\{r^2 - \left(\frac{k}{n}r\right)^2\right\}\pi$，

$$V_k = \left\{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right\} \cdot \frac{\pi r^3}{n}$$

$$V' = V_1 + V_2 + \cdots + V_k + \cdots + V_n$$

$$= \left\{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right\}\frac{\pi r^3}{n} + \left\{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2\right\}\frac{\pi r^3}{n} + \cdots$$

$$\cdots + \left\{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}\frac{\pi r^3}{n} + \cdots + \left\{1-\left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}\frac{\pi r^3}{n}$$

$$= \left\{n - \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots \frac{k^2}{n^2} + \cdots + \left(\frac{n^2}{n^2}\right)^2\right\}\frac{\pi r^3}{n}$$

$$= \left\{n - \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{6}\cancel{n}(n+1)(2n+1)\right\}\frac{\pi r^3}{\cancel{n}}$$

$$= \left\{1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot(n+1)(2n+1)\right\}\pi r^3$$

$$= \left(1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}\right)\pi r^3$$

$n = \infty$ なので

$$\frac{n+1}{n} = 1, \quad \frac{2n+1}{n} = 2$$

$$V' = \left(1 - \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\right)\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

V'は半球なので、球の体積Vは

$$2V' = \frac{2}{3}\pi r^3 \times 2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

A. 球の体積は $\frac{4}{3}\pi r^3$

二次関数の面積

No.

DATE

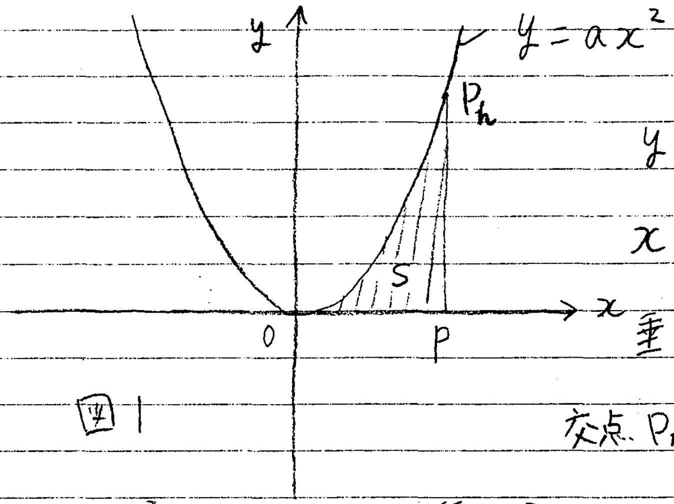


図1

$y=ax^2$のグラフをかく。

x軸上に点Pをとり、点Pを垂直に上に伸ばし、ax^2との交点P_nを作る。

線分P_nPと、放物線ax^2と、x軸に囲まれた面積Sを考える。

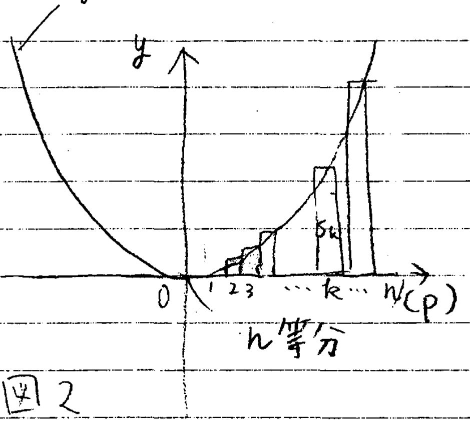


図2

0からPまでをn等分し、幅が$\frac{p}{n}$、高さがkの面積S_kを考えると (図2)

$$S_k=\frac{p}{n}\cdot a\cdot\left(\frac{k}{n}p\right)^2=a\frac{p^3k^2}{n^3}$$

ここで、kに1、2、…nを代入すると、

$$S=ap^3\cdot\frac{(1^2+2^2+\cdots n^2)}{n^3}$$

$$=\frac{ap^3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}$$

$$=\frac{1}{6}ap^3\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}=\frac{1}{6}ap^3\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}$$

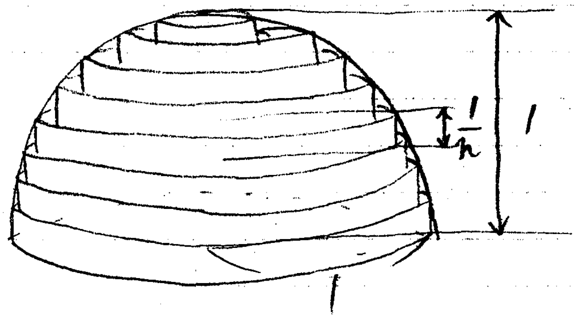
$n=\infty$とすると、$\frac{n+1}{n}=1$、$\frac{2n+1}{n}=2$

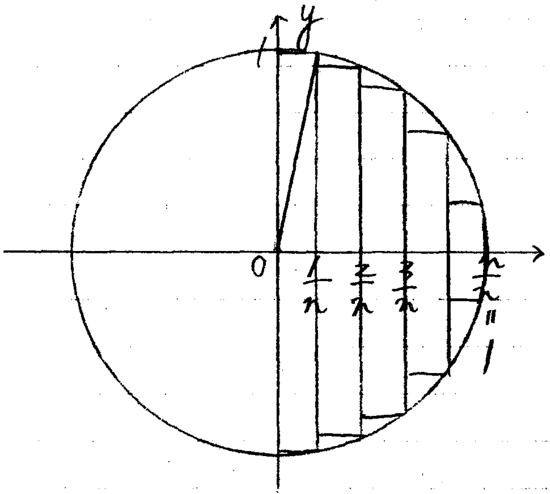
したがって $S=\frac{1}{6}ap^3\cdot1\cdot2=\frac{1}{3}ap^3$

6mm×35行

$$S=\frac{a}{3}p^3$$

① 球の体積





左下の図よりそれぞれの円柱の高さは
三平方の定理より

$$\sqrt{1^2-\frac{1^2}{n^2}},\ \sqrt{1^2-\frac{2^2}{n^2}},\ \sqrt{1^2-\frac{3^2}{n^2}},\ \cdots\cdots,\ \sqrt{1^2-\frac{n^2}{n^2}}$$

なので球の半分の体積は

$$\left(\sqrt{1^2-\frac{1^2}{n^2}}\right)^2\pi\times\frac{1}{n}+\left(\sqrt{1^2-\frac{2^2}{n^2}}\right)^2\pi\times\frac{1}{n}+\left(\sqrt{1^2-\frac{3^2}{n^2}}\right)^2\pi\times\frac{1}{n}+\cdots\cdots+\left(\sqrt{1^2-\frac{n^2}{n^2}}\right)^2\pi\times\frac{1}{n}$$

$$=\left(1-\frac{1^2}{n^2}\right)\frac{\pi}{n}+\left(1-\frac{2^2}{n^2}\right)\frac{\pi}{n}+\left(1-\frac{3^2}{n^2}\right)\frac{\pi}{n}\cdots\cdots+\left(1-\frac{n^2}{n^2}\right)\frac{\pi}{n}$$

$$=\frac{\pi}{n}\left(1\times n-\frac{1^2+2^2+3^2\cdots n^2}{n^2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{n}\left(n-\frac{\frac{1}{6}\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{n^{\cancel{2}}}\right)$$

$$=\frac{\pi}{n}\left(n-\frac{1}{6}\times(2n+1)\times\frac{(n+1)}{n}\right)$$

ここで $\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}\longrightarrow 1$ なので

$$=\pi-\frac{\pi(2n+1)}{6n}$$

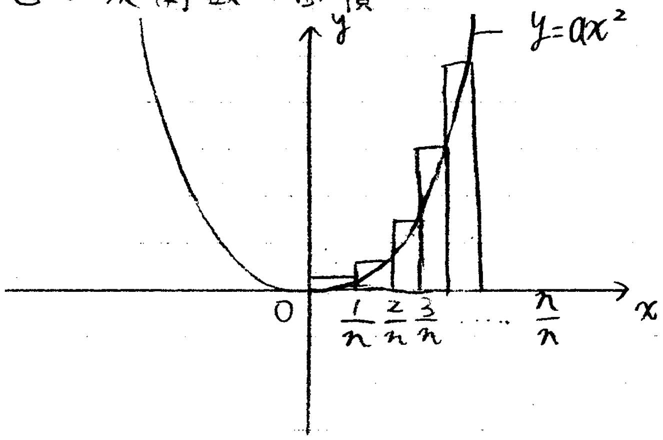
ここで $\frac{2n+1}{6n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}\longrightarrow\frac{1}{3}$ なので

$$=\pi-\frac{1}{3}\pi$$

$$=\frac{2}{3}\pi$$

よって球の体積は $\frac{2}{3}\pi\times 2=\frac{4}{3}\pi$ //
半径=r のとき、$\frac{4}{3}\pi r^2$ //

② 2次関数の面積



左図より、それぞれの長方形の高さは

$\frac{1^2}{n^2}a$, $\frac{2^2}{n^2}a$, $\frac{3^2}{n^2}a$, …… , $\frac{n^2}{n^2}a$

なので2次関数の面積は

$\frac{1}{n}\times\frac{1^2}{n^2}a+\frac{1}{n}\times\frac{2^2}{n^2}a+\frac{1}{n}\times\frac{3^2}{n^2}a+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\times\frac{n^2}{n^2}$

$=\frac{a}{n}\left(\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\frac{3^2}{n^2}+\cdots\frac{n^2}{n^2}\right)$

$=\frac{a}{\cancel{n}}\left(\frac{\frac{1}{6}\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{n^2}\right)$

ここで $\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}\longrightarrow 1$ なので

$=a\left(\frac{1}{6}\left(\frac{2n+1}{n}\right)\right)$

ここで $\frac{2n+1}{n}=2+\frac{1}{n}\longrightarrow 2$ なので

$=a\left(\frac{1}{\cancel{6}3}\times\cancel{2}\right)$

$=\frac{1}{3}a$ //

図1

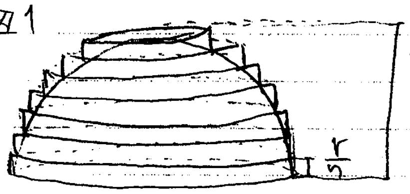


図2

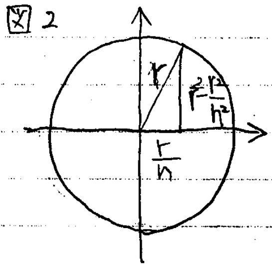
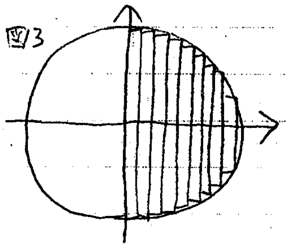


図3



半径の2乗 ——(i)

$r^2-\frac{r^2}{n^2}$

$$\left(r^2-\frac{r^2}{n^2},\ r^2-\frac{2r^2}{n^2},\ \cdots,\ r^2-\frac{(n-1)r^2}{n^2},\ r^2-\frac{nr^2}{n^2}\right)$$

$$S=\left(r^2-\frac{r^2}{n^2}\right)\pi\times\frac{r}{n}+\left(r^2-\frac{2r^2}{n^2}\right)\pi\times\frac{r}{n}+\cdots+\left(r^2-\frac{(n-1)r^2}{n^2}\right)\pi\times\frac{r}{n}+\left(r^2-\frac{nr^2}{n^2}\right)\pi\times\frac{r}{n} \quad \text{——(ii)}$$

$$=n\times\frac{r^3}{n}\pi-\frac{r^3}{n^3}\pi\cdot\frac{1}{6}n(2n+1)(n+1) \quad \text{——(iii)}$$

$$=r^3\pi-\frac{r^3}{6n^2}\pi(2n^2+3n+1) \quad \text{——(iv)}$$

$$=r^3\pi-\frac{r^3}{3}\pi-\frac{r^3}{2n}\pi-\frac{r^3}{6n^2}\pi \quad \text{——(v)}$$

$\frac{r^3}{2n}\pi$，$\frac{r^3}{6n^2}\pi$ は限りなくゼロに近い

$$=r^3\pi-\frac{r^3}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi r^3$$

∴球の体積＝$\frac{4}{3}\pi r^3$

① まず、半球を図1のように複数の円柱にわけて考える。半径はr、細かくわけた円柱の高さは それぞれ$\frac{r}{n}$である。＊円周率はπ。

② 図2から、1番直径よりの円柱の半径は$\sqrt{r^2-\frac{r^2}{n^2}}$である。(i)参照

③ (ii)のように式を立てる。(半径の2乗×円周率×高さ)

④ (ii)を展開する。＊ $r^2\pi\times\frac{r}{n}$ はnコあるの考えられるので $n\times\frac{r^3}{n}\pi$ $-\frac{r^2}{n}\pi\times\frac{r}{n}(1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2)$。

⑤ $(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2)=\frac{1}{6}n(2n+1)(n+1)$ より、(iii)が成りたつ。

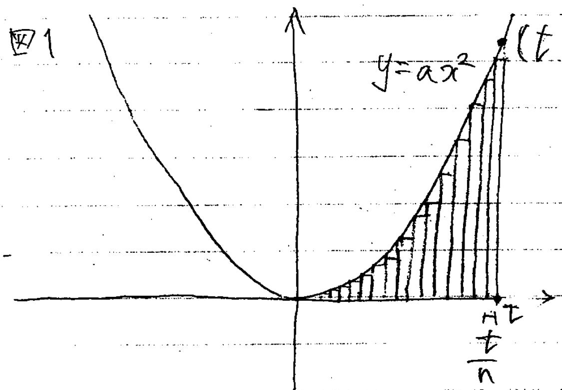
⑥ $(2n+1)(n+1)$を展開して、$(2n^2+3n+1)$。(iv)参照

⑦ (iv)を展開する。(v) $-\frac{r^3}{2n}\pi$，$-\frac{r^3}{6n^2}\pi$は、分母にnがあり、nは無限に大きいと考えるとこれらは限りなくゼロに近いと考えられるため、消去する。

⑧ $\frac{2}{3}\pi r^3$が半球の体積の公式であることがみちびける。

⑨ よって、$\frac{4}{3}\pi r^3$が球の体積である。

図1



高さ ——(i)

$\frac{t^2}{n^2}a$

$\left(\frac{t^2}{n^2}a,\ \frac{2^2t^2}{n^2}a,\ \frac{3^2t^2}{n^2}a,\ \cdots\cdots,\ \frac{(n-1)^2t^2}{n^2}a,\ \frac{n^2t^2}{n^2}a\right)$

$$S=\frac{t}{n}\cdot\frac{t^2}{n^2}a+\frac{t}{n}\cdot\frac{2^2t^2}{n^2}a+\frac{t}{n}\cdot\frac{3^2t^2}{n^2}a+\cdots\cdots+\frac{t}{n}\cdot\frac{(n-1)^2t^2}{n^2}a+\frac{t}{n}\cdot\frac{t^2}{n^2}a \quad \text{—(ii)}$$
$$=\frac{t^3}{n^3}a\left(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+(n-1)^2+n^2\right) \quad \text{—(iii)}$$
$$=\frac{t^3}{n^3}a\cdot\frac{1}{6}n(2n+1)(n+1) \quad \text{—(iv)}$$
$$=\frac{t^3}{6n^2}a(2n^2+3n+1) \quad \text{—(v)}$$
$$=\frac{t^3}{3}a+\frac{t^3}{2n}a+\frac{t^3}{6n^2}a \quad \text{—(vi)}$$
$$=\frac{t^3}{3}a$$

① 求める面積の中を図1のようにたくさんの底辺が等しい長方形にわける。
② 底辺は $\frac{x}{n}$，1番大きい高さは $\frac{x^2}{n^2}a$ である。参照(i)
③ (ii)のように式をたてる。(底辺×高さ)
④ 因数分解して，(iii)の式を立てる
⑤ $(1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2)=\frac{1}{6}n(2n+1)(n+1)$ より (iv)の式がたつ。
⑥ (v)，(vi)と展開する。$\frac{t^3}{2n}a$，$\frac{t^3}{6n^2}a$ は，分母にnがあるので nが無限に大きいと考えれば，これらは限りなくゼロに近いと考えられるため，消去する。
⑦ $\frac{t^3}{3}a$ が求める面積である。