

正方形の中に面積が最大の正多角形を作る

数学科 阿部 真由美

1. 授業の目的

世間で理数離れが叫ばれる中、本校でも「数学」に拒否反応を示す生徒は少なくない。個々の生徒の理解する速度にも差があり、通常の教科書を用いた授業ではじっくり考える時間を持つことができないでいた。数学の苦手意識をなくすには、練習問題を沢山こなし、とにかく問題に慣れさせる、という方法もあるが、数学が得意な生徒の中にも、「数学は好きではない」という生徒もいる。「慣れてできるようになる」だけではなく、「興味を持ってやってみたくなる」ような教材作り・授業作りが必要だと思っている。

今回、数学の持つ美しさ、考える楽しさを伝える教材として、折り紙を用いた授業を試みた。授業の進度としては、数学 I の教科書の内容がほぼ終了した時期であり、二次関数・二次方程式・三角比で学んだ内容を総合して図形の問題を考えることを目的とする。生徒のほぼ全員が、幼いころから折り紙に親しんできた経験があり、先に論理的に考えるのではなく、とりあえず手元にある折り紙を折ってみてから理由を考える、ということができ、授業に全員が参加できるところに、折り紙の良さがあると考え

2. 授業の流れ

最初に次の課題を全体に示した。

課題 折り紙で、面積がなるべく大きな正三角形、正五角形を正確に折ってみよう。

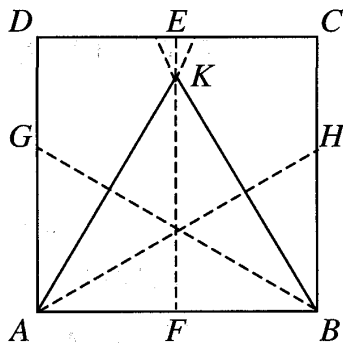
(向きも、工夫してみよう)

折り紙の正方形の1辺の長さを1としたとき、正三角形、正五角形の1辺の長さを求めてみよう。

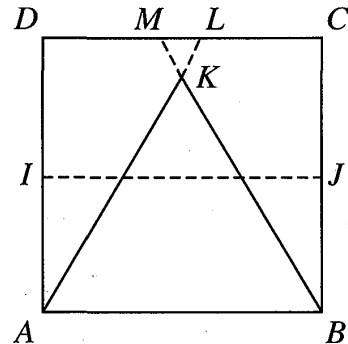
1時間目は折り紙で、面積がなるべく大きな正三角形を折る方法を考えた。

しばらく時間を与え、生徒に折り方を考えさせた。最初に生徒が考えたのは、[図1]のように、線分 EF で半分に折り、点 B が線分 EF 上に重なるように線分 AH を折り、 B が移った点を K として直線 AH を折る。反対側も同様にして、直線 BK を折る、というものだった。この方法で折ると、折り目が多くなってしまい、美しくないので、「なるべく折り目が少なくなるように折る方法」を考えても

らったところ、[図2]のような方法が最終的に出てきた。これは、線分IJで半分に折り、点Dが線分IJ上に重なるように線分ALを折り、点Cが線分IJ上に重なるように線分BMを折り、その交点がKというものである。



[図1]

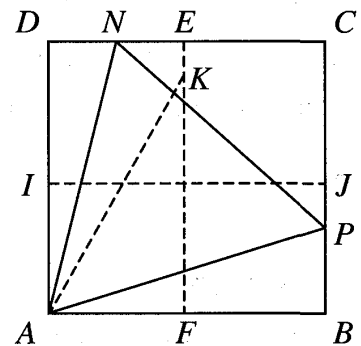


[図2]

次に、面積が最大の正三角形を考えるにあたって、向きや頂点の位置、角度などを先に考えさせた。[図3]のような向きで、 $\angle DAN$ が 15° であればよいことを全体で確認し、折り方を各自で考えてもらった。

これも、いろいろな方法で生徒は考えてくれたが、最初多くの生徒は、[図2]の方法を応用させ、直線AKの折り目を付け、 $\angle DAK$ の二等分線ANを折る方法を考えついた。さらに「折り目が少なくなるように折る方法」として、線分AKの折り目を付けずに折る方法を考えてくれた。

折り方を見つける作業では、近くの生徒同士で相談し試行錯誤しながら、ほとんどの生徒が自分の折り方を考えてくれた。何人かの生徒に、黒板で大きな折り紙で折ってもらったところ、もっと簡単な別解がある、と申し出してくれる生徒もいた。



[図3]

最後に、折り紙の1辺の長さを1として、[図3]で折った正三角形の1辺の長さを求めた。この問題に対しては、授業者が準備したいくつかの解法以外にも、多くの解き方が生徒から出てきた。その中から2とおりの方法をここに紹介する。

[解1] $DN=NK$ 、 $\triangle KNE$ は $\angle NKE=60^\circ$ の直角三角形だから $NK:NE=2:\sqrt{3}$ 、 $DN+NE=\frac{1}{2}$ である。これらを用いると $DN=2-\sqrt{3}$ が求まる。さらに、直角三角形ANDで三平方の定理を用いると、 $AN^2=8-4\sqrt{3}$ となり、 $AN=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ (2重根号をはずすことができる)

[解2] 直線AKと辺CDとの交点をQとする。線分ANは $\angle DAQ$ の二等分線だから $DN:NQ=AD:AQ=\sqrt{3}:2$ 、また、 $\triangle DAQ$ は $\angle AQD=60^\circ$ の直角三角形だから $DN+NQ=DQ=\frac{1}{\sqrt{3}}$ であ

る。これらを用いると $DN=2-\sqrt{3}$ が求まる。以下同様。

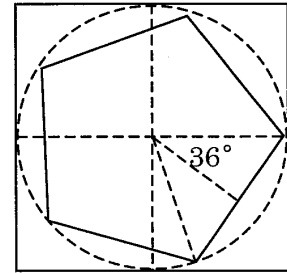
解1では、最後の2重根号がはずれることに、多くの生徒は気がつかなかったが、授業者に指摘されて思い出したらしく、その場で根号を外してくれた。

さらに、これらの値を用いて、 $\sin 15^\circ$ 、 $\cos 15^\circ$ 、 $\tan 15^\circ$ の値も求めさせた。

2時間目は、折り紙で正五角形を折る方法を考えた。正五角形に関しては、以前の授業で、正五角星の折り方、黄金比の値、 36° の三角比、などについて触れていたもので、最初にそれらを思い出してもらった。

まず、正五角星を折る方法から、[図4]のような正五角形を折り、1辺の長さを求めた。

1辺の長さを x とすると、 $x = \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$



[図4]

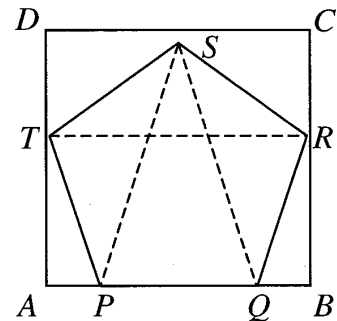
次に、[図4]よりは大きな正五角形となる、[図5]の折り方を考えた。この五角形は、生徒にとってはどこから取り組んだらよいのか分からないようだったので、少しずつヒントを与えながら折っていくこととなった。

この正五角形の1辺の長さは

$$PS : PQ = 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (\text{黄金比})$$

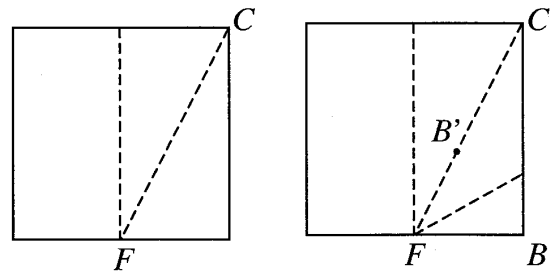
より、 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ という長さが折ればよい。

右の図で $FC = \frac{\sqrt{5}}{2}$ であり、 B が、線分 FC 上に重なるように折り、 B の移った点を B' とすると、 $FB' = FB = \frac{1}{2}$ であるから、 $CB' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ となり、正五角形の1辺の長さを作ることができた。あとは、この長さをうまく、[図5]の P 、 Q の位置に移動させて、残りの3点 R 、 T 、 S の位置も求めて(折って)行けばよい。最後のところが、



[図5]

折る時間が十分にとれなかったのが残念であるが、それでも、おおかたの生徒は [図5] の正五角形を折れていた。



3. 研究協議

16名の先生方がご参加下さった。短い時間であったが、本時の授業についてのご意見、通常の授業に

ついでに質問などをいただいた。

本時の研究授業の題材に関しては、多くの先生方が、「数学に折り紙を用いるというのは、書物などではよく目にするが、実際の授業を見学したのは初めて。紙を折る活動を通して生徒が自発的に考える状況が作り出せているのが分かった。活発に参加している生徒が多く、難しい課題にも自発的に動いていた。先生も生徒も楽しそうであった。」とのご感想をいただいた。また、前の授業との関連性があるのがよい、とのお言葉もいただいた。一方で、45分×2で展開する内容としては盛りだくさんであり、もっと内容を絞って生徒に考えさせる時間を作った方がよいのでは、というご意見もいただいた。授業者としても、「生徒に考えさせる授業」を目指したが、分からない生徒を救うことが十分にできなかったことは今後の課題である。

また、ご参加された先生方からは、生徒に考えさせる授業が必要だとは思っているが、受験で結果をださなくてはならないので、現実には受験勉強を意識した授業をせざるをえなく、生徒が考える時間をとれない、との意見も多く出された。本校数学科でも、いつもこのような研究授業をしているわけではなく、普段は時間が足りなくて駆け足で教科書を終わらせていき、授業する側が意識しなければ、なかなかこのような時間はとれないが、本校の生徒は、発表したり自分の考えを述べたりする機会が普段からあり、慣れていることは申し上げた。

4. 研究授業その後

研究授業、研究協議を通して、「生徒に考えさせる授業」の大切さを改めて実感した。また、本校の生徒は、そのための教材作りをしっかりとすれば、十二分に期待に応えてくれることも分かった。

冬休みに、折り紙で正多角形（なんでもよい）を折り、その性質について調べる課題を出したところ、授業の復習として正三角形、正五角形を折ってきた生徒もいたが、多くの生徒が別の折り方で正五角形を折ったり、正六角形、正八角形、正十二角形などについて折り方を考え、また、1辺の長さや面積、 22.5° 、 75° の三角比等についても求めてきた。中には、本で調べて、正方形に内接する最大の正五角形（授業で扱ったのは最大ではなかった）の折り方を折ってきた生徒もいる。その中の生徒の感想をいくつか抜粋すると、

- ・「折ってみる」という普段の数学の授業にはない動作や考え方が少し新鮮な感じがして、折り紙の授業はかなり難しいながらもおもしろい授業だったと思う。
- ・きちんと図形の性質を考えて、今までに習ったことを利用すれば数学的に正確なものを作れることが分かり、とてもおもしろいと思いました。
- ・2学期の授業ではあまり時間をかけて考えることができず、なぜそうなるのか、いまいよく分からないまま終わらせてしまっていたが、このレポートを通して折り紙の数学が少し分かるようになってきた。

今後もこのような教材を取り入れ、生徒に数学の楽しさを伝えていきたい。

資料 1 (当日配布資料、一部修正)

日時 2005年11月19日 (土) 第 2、3 時限

対象 1 年梅組 41名

本校の数学カリキュラム

1 年生	「数学 I」(必修 3 単位)「教養基礎「数学 I」」(必修 1 単位) 「数学 A」(必修 2 単位)
2 年生	「数学 II」(必修 3 単位)「教養基礎「数学 II」」(必修 1 単位) 「数学 B」(選択 2 単位、習熟度別クラス編成)
3 年生	「数学 A」「数学 B」「数学 III」「数学 C」(全て選択科目)

※ 必修科目は、すべてホームルームクラスによる授業。

数学 I のこれまでの学習内容

使用教科書 東京書籍「数学 I」

	学 習 内 容		備 考
4 月	数と式	式の計算 (整式、因数分解) 実数 (絶対値、平方根)	※ 教養基礎「数学 I」 で「虹の数学」の授業 (紀要第50号 特別教育 プログラム「虹の数学」 参照)
5 月	方程式と不等式	1 次不等式 2 次方程式 (解の公式、実数解の個数)	
6 月	2 次関数	関数、2 次関数とそのグラフ、 2 次関数の決定、2 次関数の最大最小	
7 月		2 次不等式 2 次不等式の応用	※ 教育実習生 による授業
9 月	図形と計量	鋭角の三角比 三角比の拡張、三角比の性質	
10 月		三角形への応用 (正弦定理、余弦定理、面積公式) 空間図形の計量、相似と計量 球の体積・表面積	
11 月	(数学 II) 三角関数	一般角、弧度法、 三角関数の性質	
	※ 本時 公開研究会		

本時の指導目標

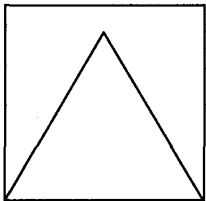
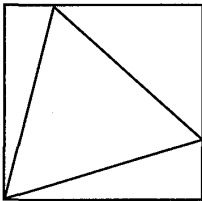
- ① 正三角形・正方形・正五角形の性質から、三角比の値や、図形の辺の長さ、角を求める方法を考えさせる。
- ② 単純な問題を、多面的にアプローチすることにより、総合的に考える力を身につけさせる。
- ③ 紙を折るという作業を、数学的に考えることを通して、図形の美しさを学ぶ。

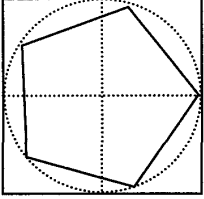
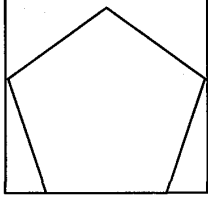
生徒観

一年梅組の生徒は、おとなしく、授業中も活発に発言、質問したりする方ではないが、課題には黙々と取り組むクラスである。

学力差がかなり大きく、数学に対して苦手意識を持つ生徒も少なくないが、意欲はあり、少々複雑な問題でも、かみ砕いて説明をすれば十分理解でき、クラスで一つの課題に取り組むことも可能である。

指導計画 (45分×2)

	学習活動	指導上の留意点
導入	本時の課題の確認 「正方形の折り紙の中に、最も大きな正三角形、正五角形を折る」 折り紙を配る	三角比、図形の性質など、今までに学んだ全ての基礎知識を用いて問題に取り組むことを説明。
展開	● 正三角形を折る (下の①②が予想される折り目) ①  ② 	ヒントを与えながら、折り方を考えさせる。 折れたら、全体で折り方を確認。
	正方形の1辺の長さを1としたとき、折った正三角形の1辺の長さを求め、比較する。	②の正三角形の1辺の長さの求め方は、いくつかの方法を生徒に考えさせ、発表させる。
	②の辺の比を用いて、 15° の三角比を求めてみる。	
休憩		

<p>展開</p>	<p>● 正五角形を折る（下の①②が予想される折り目） 上と同様に1辺の長さも求める。</p> <p>①</p> 	<p>①は「正五角星を折る」(資料)の折り方を応用させる。36°の三角比を用いると、1辺の長さが求められることに気付かせる。</p>
	<p>②</p>  <p>先に、図を書いて1辺の長さを計算で求め、その長さをどのように折るか、考える。</p>	<p>$\frac{\sqrt{5}}{2}$の長さの折り方を確認する。</p>
	<p>②の折り方の別解（「角の2等分線と辺の比」を利用した折り方）を解説する。</p>	
<p>まとめ</p>	<p>課題を考えるにあたって使った定理や性質などについてまとめる。</p>	

参考文献 「数学の微笑み」山下 純一（現代数学社）

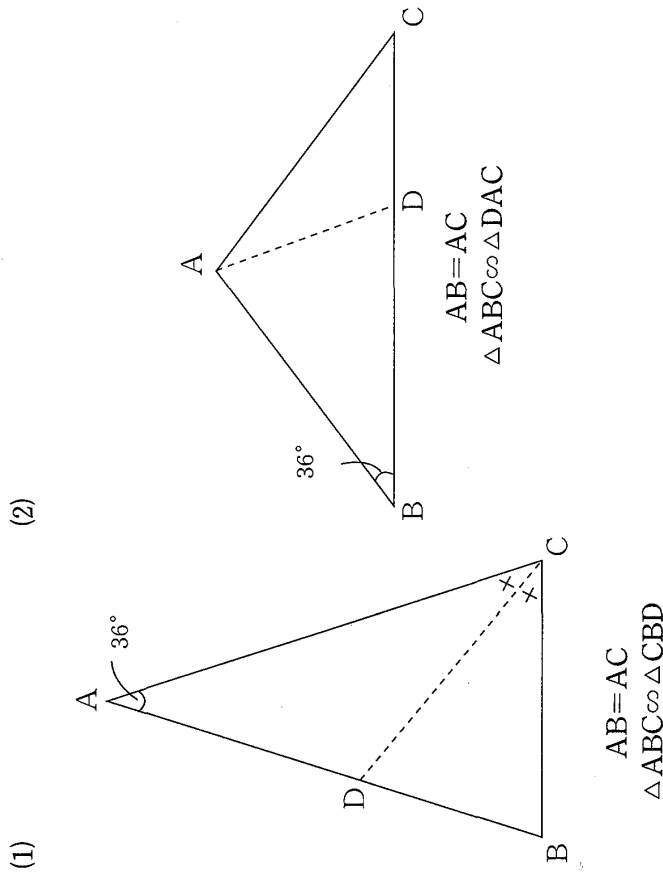
「黄金分割」Hans.Walser（日本評論社）

「Mathematics Teacher」Vol.88 No.1（NCTM）

数 I (おまけ①)

黄金三角形から求められる三角比

次のような黄金三角形を利用すると、 $18^\circ(72^\circ)$ 、 $36^\circ(54^\circ)$ の三角比を求めることができる。求めてみよう。(点Aから辺BCに垂線AHをおろし、直角三角形を利用して求める)



数 I (おまけ②)

正五角星を切り抜く ※ 折り紙・ハサミ

次の手順にしたがって、正五角星を切り抜いてみよう。
 切り抜いて形を確認したら、この折り方が正確であることを証明してみよう。

