

# 数学③コース「絵を縦・横・斜めに伸ばしたり、 回転したりする方法 [行列と一次変換]」

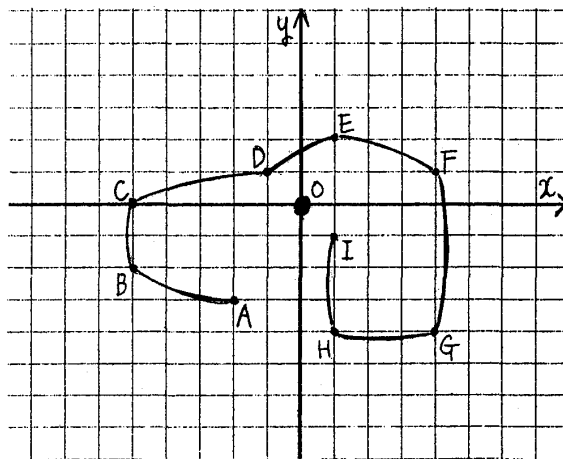
数学科 阿部 真由美

平面に描かれた絵を、ある規則に従って対称移動させたり、縦や横や斜めに拡大させたりして、その仕組みについて考えた。2×2行列を用いた一次変換である。参加者全員中学1年生だったので、「行列」、「一次変換」云々の難しい言葉は抜きにして、単純な計算をする中で、行列の4つの数の値、また、配置によって、どのような図形に変化するかを、実際に手を動かしながら考えてもらった。中学1年生の段階ではまだ、 $x$ 軸・ $y$ 軸・座標などの直交座標平面の概念、比例・反比例などの関数の特別な場合を習った程度であり、今回の内容をどこまで分かってくれたのか定かではない。計算は好きらしく、熱心に計算してくれて、できあがった絵(図?)も喜んでくれた。コンピュータにさせてしまえばすぐに結果を出してくれる性質のものを、今どき、全部手計算というのは時代遅れのような気がするが、自分で計算するからこそ、途中経過もわかり、しくみを理解できるという良さもある。敢えて参加者には、面倒な計算につきあってもらった。

## 1. 座標の確認

座標平面上に描かれた図上にある

点A~Iの座標を求める。



## 2. 点を移動させる方法

行列  $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  を用いて、点  $P(x, y)$  を点

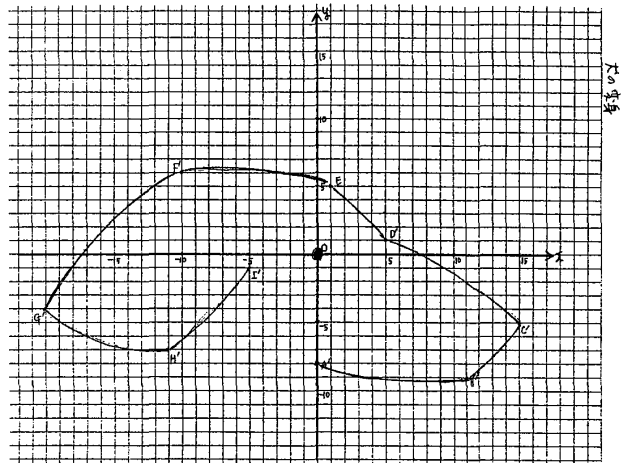
$P'(x', y')$  に移動させる方法

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x+2y \\ 1x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x+2y \\ x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

この方法を使って、1で求めた点A~Iを別の点A'~I'に移動させてみる。

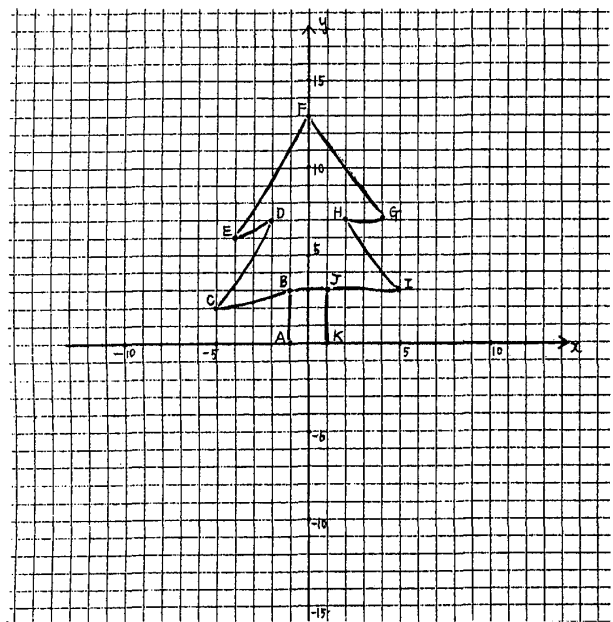
→この時点では、元の図と全く同じでないし、向きも変わっているが、形はとどめているのがわかる。

どのように変形したか正確にはまだよく分からない。



### 3. x軸対称の移動

ツリーの絵を、行列  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  を用いて移動する。

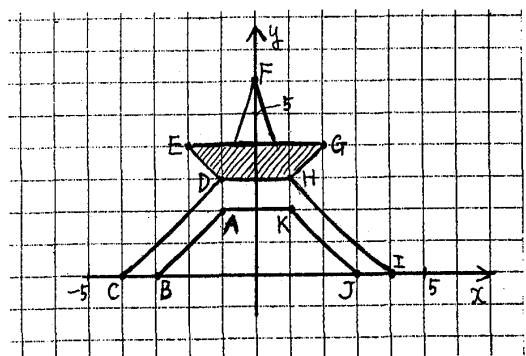


### 4. y軸方向の拡大

東京タワーの絵を高さが3倍のタワーに変形させるような行列を見つける。

→ 3の作業の経験から、(1, 1)成分を1, (1, 2)成分を0にすればよいことはすぐに分かってくれた。

答えは  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  とすればよい。



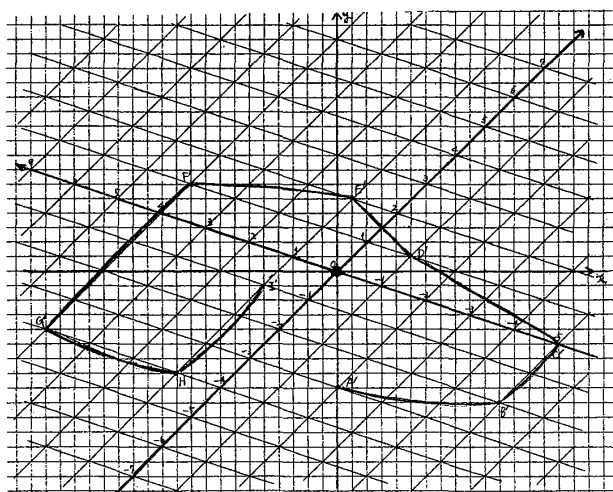
### 5. 2の変形のしくみ

2で用いた行列  $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  で考えると、x軸上の1目盛りを表す点  $E(1, 0)$ 、y軸上の1目盛りを表す点  $F(0, 1)$  はそれぞれ  $E'(-3, 1)$ 、 $F'(2, 2)$  に移動する。点  $O(0, 0)$  は  $O(0, 0)$  に移るから、直線  $OE'$ 、 $OF'$  を新しいx軸、y軸、線分  $OE'$ 、 $OF'$  を新しい1目盛りとして考えて、1で求めた点A

～Iの座標を、新しい $x$ 軸、 $y$ 軸で定める平面の上にとってみる。

できあがった図を2で描いた図と重ねてみると、ぴったり重なる。

→このことから、2の点の移動は、軸の向きや、一目盛りの大きさを変える操作であることが分かってくれたはずである。



NO. 5