特別教育プログラム「虹の数学」

ー試行一年目の実践報告ー

数学科　沖山義光、茶圓幸子、阿部真由美

1.　はじめに

国立大学法人お茶の水女子大学は「社会の諸分野における有為にして教養高き女子を育成」することを学則にうたっている。よりよき社会を作り、文化的創造を導くリーダー的な女性の育成をはかるためには、基礎・基本に根ざす幅広い教養教育が不可欠のものである。このことを実現していくために「高大連繋特別教育プログラムおよびその効果に関する研究プロジェクト」が発足した。この研究プロジェクトの成果は、このような有為な女性の育成、及び他大学や高校教育への提案を可能にするものである。この研究プロジェクトの概要は、お茶の水女子大学附属高等学校の１年次から３年次を対象としてお茶の水女子大学教員の参加、協力のもと、教養教育の基盤をつくる「基礎基本」力の育成を目的とした高大連携特別教育プログラムを実施すること。また３年次においては、附属高校の推薦を受けた進学希望者に対して、教養教育に加え志望分野の基礎力の養成のための特別教育プログラムを実施すること。さらに、進学希望者の中から本学進学者を選抜し、これらの学生の追跡調査などにより、本教育プログラムの教育効果についての評価・研究を行う。まとめると、以下の高大連携特別教育プログラムを実施する。

(i)「教養基礎」教育プログラム（附属高校　１－３年次対象）

(ii)「専門入門」教育プログラム（附属高校　３年次対象）

(iii) 附属高校生の大学の授業の聴講（附属高校　１－３年次対象）

(iv) 大学入学後の教育プログラム

「教養基礎」教育プログラムは広く深い教養による思考能力の育成を目的として、附属高校１－３年の生徒を対象に、国語、数学、英語の３教科について「教養基礎」教育プログラムを実施する。本教育プログラムは、大学、附属高校両教員の協力により策定され、高等学校の既存の教科教育と密接に連携し、相互作用しながら、大学教員により実施されるものである。われわれはこの教育プログラムの数学の部分を通称「虹の数学」と呼んでいる。上記、研究プロジェクトは平成17年度附属高校入学生から実施される。今回我々の発表はその準備として平成16年度の入学生に数学の「教養基礎数学Ｉ」科目を試みた経過と報告を中心に本研究プロジェクトの概要も含めて発表した。

2. 特別教育プログラム（虹の数学）の基本的な構想

1)「虹」を数学的な観点から見て高校のどういう数学と関連しそれがさらにどういう数学につながっていくか。

数学的な内容

関数の極小の考え、円の性質（接線と弦の関係)、焦線、直円錐、包絡線、ネフロイド、外サイクロイド、円錐曲線、円周角一定の円弧をその弦を軸として回転させて得られる曲面（円環面、トーラス)、エアリー積分が表す関数、区分求積法、テイラー展開、n! の拡張であるガンマ関数、無限遠点に不確定特異点をもつ微分方程式などストークス現象の発見、カプス虹とパーシー積分、トムのカタストロフの理論、特殊関数論

高校と大学の数学との関連

「図形と方程式」「いろいろな曲線」「微分積分」

「線形代数」「代数幾何学」「複素解析学」

2）カリキュラムの要点

(1) 1年生

数学Ｉ（4単位、1単位増)、数学A（2単位）とし、1単位増分（計30時間）を使い、指導要領の基準に従った内容に加え、以下の項目を実施する。この1単位分の内容を新たに「教養基礎数学Ｉ」して設定した。

① 中学校との連携をはかる。…2次方程式、2次関数、平面図形などの指導について、重なり、欠如、指導の一貫性を検討し授業計画を具体化する。(2時間)

② 数学IIの三角関数の一貫性を保った指導をする。(10時間)

③ 1単位増を①②の内容に加えて「虹」にまつわる数学的内容を取り込む。

1学期

・真島教授による講話(1)（2時間、学年合同)

・スネルの法則などの実験による理解授業（村井)

・人工虹をつくる(1)（ダンボールにスクリーンを貼り各自で作成)

2学期

・デカルト、ニュートンの考えを作図で理解する。

・虹角、2次曲線の理解

・人工虹をつくる(2)（トーラスが見えるように模造紙を貼りあわせる、グランドにでて夕陽の虹をつくる。)

・真島教授による講話(2)（2時間、学年合同)

3学期

・円周角の定理など平面図形の発展的な内容

・折り紙による包絡線、２次曲線、立体図形などの指導

④　週６単位のうち２単位を同時展開授業とし、③の指導を学年合同講義も実施できるようにする。

⑤　指導の順序は、①→③→②とする。

(2)　２年生

数学II（４単位)、数学B（選択２単位）とし、数学IIについては、指導要領の基準に従った内容に加え、数学Iに移行した「三角関数」の内容の代替として以下の項目を実施する。

これを「教養基礎数学II」とする。

［数学IIにおいて］（計30時間）

①　数学I・数学Aとの連携をはかり、基礎・基本を充実させる。(10時間)

②　１年時の情報科の授業で学習した数式処理ソフト*Mathematica*を活用し、包絡線やグラフの画像処理などのこれまでにないコンピュータ利用の数学教育を実践する。(３時間)

③　数学Cの内容から「式と曲線　ア．２次曲線　イ．媒介変数表示と極座標」を指導する。(10時間)

④　③および「虹の数学」に関連して、空間座標における平面の方程式・円錐曲線の方程式を扱い、*Mathematica*を用いた教材化を図る。(６時間)

⑤　積分の指導では、定積分$\int_0^1 x^2dx$の導入として「区分求積法」を扱う。(１時間)

(3)　３年生

①　数学Cの中で「円錐曲線」など、また微積分の中で「区分求積法、テイラー展開、積分、微分方程式」などを発展的に扱い理解を深める。

②　理数プロジェクトとの関連から大学の講義（横川助教授の「輪読」など）を受講し、総合的な時間の「卒業研究」の論文指導を行なう。

特別教育プログラム「虹の数学」は上記の基本構想に基づき、大学の教員の指導・助言をうけて次のようにまとまった。

〈数学〉

・虹に関する文化的、科学的な対話を通して数学的な興味・関心を持たせる。

・光学的な実験を通して虹の美しさや現象を身近に体験させ、数理的に探求する能力・態度を身につけさせる。

・虹を題材にして指導要領に準じた数学の基礎・基本の定着を図る。

・基礎・基本の定着の上に高等数学への連携を図る。

これをもとにしながら、高校で学ぶ数学がどのように他の分野で使われ役立っているかを生徒に明示するために、「虹」を主題材としたカリキュラムを構想し、試行している。今回は、「教養基礎数学I」１単位（計約30時間）を設定し、数学Iの学習指導要領に従った内容に加え、以下の項目を実施した。

ア　中学との連携

イ　数学Iの図形の計量、数学IIの三角関数を統合的に扱う

ウ 「虹」に関連した数学的内容を取り込む

・物理的観点から「光、色、虹：『虹の数学』に寄せて」(物理教諭　別紙１参照)　…１学期

光・水の波の屈折・光の分散・屈折の法則など、実験を主体に説明する

・講話（大学数学教授）　…１学期

人工虹パネルの作成、スライドなどを組み入れた講話

・数学的観点から（数学教諭）　…今回の発表

以下のものを週２時間、３週にわたり３クラスにそれぞれの教諭が交代で行う　…１学期

折り紙による包絡線（茶圓　別紙２参照）

円錐の切り口に現われる２次曲線（阿部　別紙３参照）

虹角発見の歴史（沖山　別紙４参照）

・円周角の定理など平面図形の発展的な内容を用い、虹角の作図を行う　…３学期

今回は、２－③の部分（太字部分）の実践報告を、内容を中心に行った。

3. 発表して

数学分科会は数学の内容的にかなりマニアックで専門的な発表が多く、学習指導要領などを超えているものが多いという印象を受けて。その中で本校の発表は指導要領はできるだけ遵守しその中でいかに数学教育を充実させていくかを模索したところがよかったと思う。参加者からもいくつかの質問・意見があり参考にでき有意義であった。

発表後２学期以降の試行として、

1）作図の重ね合わせ作業

円の中を通る光の道筋をスネルの法則にしたがって各生徒一人一人が分担して作図しそれを１つの円に重ねてみるという作業を行った。各クラス40人を５グループに分け１グループでそれぞれ入射位置の違う８本の光の道筋ができるのでそれを重ねてみたわけである。そのことによって、作図の仕方とともに入射する位置の変化によって放出する方向が一定の方向に進んでいたものが逆方向になることがわかれば虹角の意味が理解できることを目指した。グループによっては混乱し、変化の様子がうまくみえるものもあった。実際の作業を通してみて課題ができ、「虹の数学」の意図することも少しずつ生徒のわかってきたことは意義があった。

2）新しい教材の開発

真島教授の助言により、数学史の話題を関連付けて１度の三角関数の値を求めることや加法定理の証明にトレミーの定理を用いる方法などの指導法が開発できた。

3）*Mathematica*の準備

本校のコンピュータ室には大学の情報処理センターにアクセスすることにより、*Mathematica*が使用できるようになっている。しかし、その立ち上げにネットワークの不備があり、何台かしか立ち上がら

ないこと、*Mathematica*の入力にUnixが使われていることのためかフォントの不備が見つかった。ネットワークの方はハード面の補修で対応でき、フォントの問題では大学先生からの指導・助言をうけ、ヘルプ、エディタの活用や*Mathematica*のKernelに直接入力するなどの方策を立てることができた。来年度は平成16年度入学生（高校２年生）に１年次に作図した光の道筋を、*Mathematica*を用いてかくことを中心にさまざまな試みをしていくことになる。また、教官用の*Mathematica*を購入し来年度に向けての授業準備ができる体制を整えた。

４）指導の効果に関する数学調査

平成15年度入学生に１年前に実施した調査を平成16年度生の入学生にも実施した。また、この問題が基礎的でやさしかったため、これとは別に大学の先生からの指導で新しく２題の問題を作成し、これを平成15、16年度の入学生にほぼ同時期に実施した。平成15年度入学生は「虹の数学」を指導していないのでその比較検討による評価ができる。なお、この問題にはそれぞれ問題の領域を問うアンケートをつけそれによって「虹の数学」への意識調査も同時に行った。まだこれらの分析は詳しく行っていないが、これからの反省を踏まえてさらに改善を重ねていく必要がある。

以上３つを加え今年度の試行が終わった。来年度は本格実施の年度であり、平成17年度入学生への実施と新２年生への試行さらに３年生の実施計画の立案などまだまだ課題は山積みであるが１つ１つ着実に成果を上げていく必要がある。（文責沖山）

資料1

光・色・虹：『虹の数学』に寄せて　'04 7/5

村井(物理)

実験を中心にして、「虹」を理解するために必要な光の性質をいくつか調べていこう。光の性質の詳細は物理の授業で扱います。乞うご期待！

1. 白色光と単色光

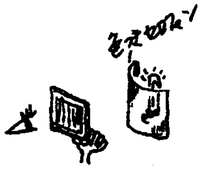
"色がついてないな" と見える光を白色光といいます。たとえば、太陽光・電球の光・蛍光灯の光などはほぼ白色光です。

【実験1】回折格子を通して、白熱フィラメントの輝き、蛍光灯の光を見てみよう。

白色光はいろいろな色を含む。虹、シャボン玉…ＣＤなどの色も、それ自身の色ではなく、白色光が "分解" して出てきた色なのです。

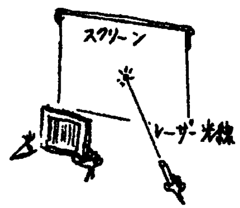
▶（画像1）白色光をプリズムで "分解" し、そこに現れた赤色の光を再びプリズムに通す！…もう "分解" されない！

プリズムや回折格子で "分解" されたいろいろな色の光は、それ以上別の色には分かれない。それで、そのような光を単色光といいます。白色光は、すべての単色光(赤～紫)を同じ強さで含む光です。そのような光を見ると私達は「白色」と感じるのです。



【実験2】白熱フィラメントに赤や青のセロファンをかぶせてみよう。光は赤や青色になる…では、回折格子で "分解" してみよう。

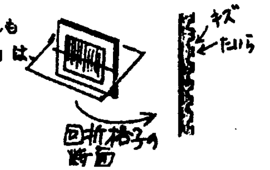
光を単色光に "分解" することを本当は分光するといいます。赤いセロファンからの光は単色光ではなかったでしょう。このように、日常見ている「色の付いた光」は大部分、単色光ではないです。青空、夕焼け空の色も、太陽光の中の一部分が強調されて現れているのです。青空からの光にも、赤色の単色光がちゃんと少し入っています。



【実験3】赤・緑レーザー光をそれぞれスクリーンに当て、それを回折格子で分光してみよう。

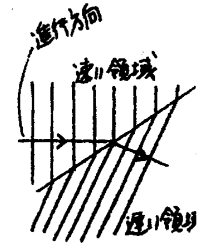
レーザー光は単色光です。他の色は含まれてません。赤レーザーと緑レーザーとで、見える位置が違ったでしょう。これは後で出てくる「光は波だ」「緑より赤のほうが波長が長い」ということで簡単に説明できるのですが…ちょっとここでは難しい。謎解きは物理の授業で。

▶（画像2）回折格子の構造。回折格子、プリズム、シャボン玉…どれも光を分光しますが、それぞれ分光の方法(原理)は異なっています。「虹」は、雨粒がプリズムに似たはたらきをして太陽光を分光しているのです。



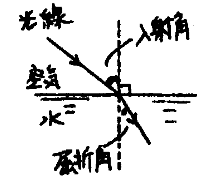
2. 光の屈折・水の波の屈折

空気から水やガラスに飛び込んだ光は屈折をします。なぜでしょうか？これは、光が「波」であることから理解できます。



【実験4】水槽の波を観察しよう。底に板を沈め、深さの違い(段差)をつくると、水の波は浅いところで遅くなる。そして…

深さが変化する境界線のところで、水の波は進行方向を変えます！水の波の屈折です！波の屈折は、波の進む速さの変化によって引き起こされるのです。波が、速い領域Ⅰから遅い領域Ⅱに入る場合、「入射角」＞「屈折角」となります。領域Ⅱでの速さが遅いほど、大きく屈折します（つまり、屈折角が小さくなります）。



【実験5】空気から水へ光を入射させよう。

光は、空気と水の境界のところで、はっきりと屈折します。光は水に飛び込みと空気中よりガクンと遅くなります。75％くらいの速さに落ちます。2割5分引きだヨ～！

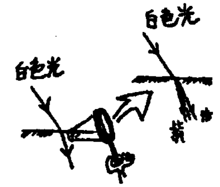
光は真空中で最高速度 $c = 3.00 \times 10^8$ m/s ＝ 30 万 km/s を出します。大まかに言って、物質の密度が高いほど、光の速度は遅くなります。

☆ **屈折の法則**：波の屈折(光の屈折)には、ちゃんとした法則があります。次ページの５．課題でその法則を導き出してください！

3. 光の分散

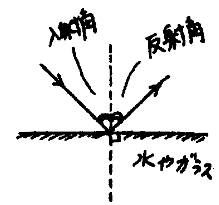
再び（画像1）を見てみましょう。プリズムを通った光は、屈折してますが、屈折の度合いが色(単色光)によって異なっているわけです…だからこそ白色光が分光されているのです。「光は波だ」とさっき言いました。波は、振動数とか波長といった性質で区別されますが、その違いは単色光の色の違いに対応しています。次の通りです。

単色光の色：	赤 ～ 青・紫	
振動数：	低 ～ 高	
波　長：	長 ～ 短	

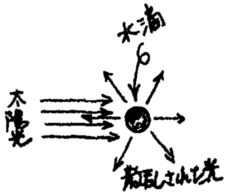


空気から水に飛び込んだ光は、振動数が高いほど(波長が短いほど)速さが遅くなるのです。この現象を光の分散といいます。このために、赤色単色光より青・紫単色光のほうが大きく屈折します。

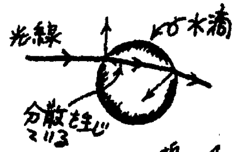
なお、反射の法則（「入射角」＝「反射角」）は振動数（波長）には関係なく成り立っています。これも理論的に証明できますヨ～ッ！



4．水滴に入射した光の散乱

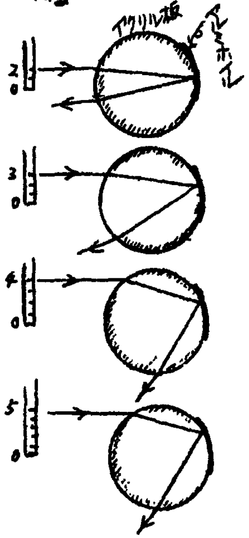


さあ、いよいよ虹の話しに近づいてきました！太陽光が水滴に当たると、光はいろいろなプロセスを経て結局は四方八方に散らばります。これを水滴による光の散乱といいます。でも、もし太陽光がどの方向にも同じ強さで散乱されるのなら、虹はできません。単に水滴が輝くだけです。ある特定の方向に強く散乱されるのです…ここが重要なポイント！



水滴に入射した光…初っぱなから水滴の表面で一部は反射しちゃいますが大部分は内部に入り、そのとき屈折を起こします。同時に分散も生じます。その後どうなるかというと、ほとんどの光は通り抜けて水滴の後方に出て行っちゃいます。なにしろ、水滴は透明ですから…。でも、光が水滴から外に出ようとするとき、エネルギーにしてたった数％程度の光が反射して、再び水滴の内部に戻ります。そこから虹の物語が始まるのです。

屈折・反射・分散――これが虹の原因。でも、奥が深～～～いヨッ！



［実験６］アクリル円盤に水滴役を演じてもらいましょう！通り抜ける光をなくすために、円盤の“後方”にアルミホイルを張っておきます。いろんな高さから入射した光が、それぞれどのように散乱されていくかに注目！

入射する光の向きは同じにして、高さを下の方から上げていくと、散乱光（この場合、円盤後方で反射して再び外に出てきた光）も、それに応じて動いていきます。散乱光の向きは結構大きく変化します。つまり、入射光はかなり広い範囲にばらまかれてしまうのです。

ただし…入射光の高さがずっと上の方にいくと、入射光の高さの変化に対する散乱光の動きには急にブレーキがかかり、ついには“Ｕターン”するじゃないですか！これは何を意味するのか？！実は、重大な意味をもっているのです。Ｕターンする辺りの散乱光は“ばらまかれ”ず、逆に非常に“濃縮”されるのです。他の向きへ向かう散乱光と比べ、極端に目立った光になります。実際問題として、その散乱光が全体の散乱光を代表していると考えてもよいのです。“代表となる散乱光”ってわけです。

太陽光の中の赤～青・紫単色光は、それぞれ屈折の度合いがほんの少し異なりますから（光の分散）、上で説明した“代表となる散乱光”の向きが色によってほんの少し異なります。それで虹が現れる…（私の話は一応ここまでにしておきます）。

5．課題　：「屈折の法則を導き出す」
提出期限：　'04　7月16日（金）、　提出場所：職員室前の「箱」

次の文および問(1)～(4)の誘導に沿って、屈折の法則を導きなさい。
図解（図を描いての説明）を用いてレポート用紙にまとめること。

水の波の屈折を思い出して！図１の波頭①が t[s]間で②に移動する。波頭とは、波の山と考えればよい。領域Ⅱは領域Ⅰより波の速度が遅いので、領域Ⅱに入った

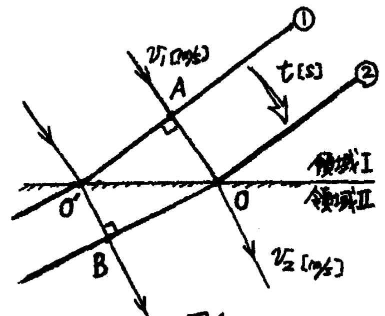


図１

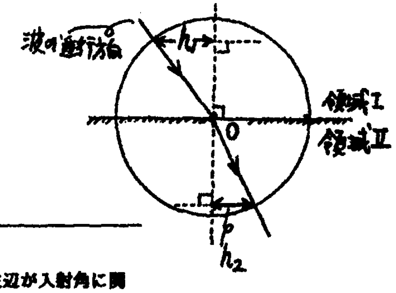
波頭は“遅れをとって”折れ曲がる。これは波の進行方向が変化した…つまり屈折したことを意味している（波は波頭の線に対して垂直に進む）。

領域Ⅰ、Ⅱでの波の速度をそれぞれ v_1[cm/s]、v_2[cm/s] とする（v は *velocity*＝速度 の頭文字）。

(1) ＡＯ とＢＯ′ の長さをそれぞれ求めよ。
(2) ∠ＡＯ′Ｏは入射角に等しいことを示せ。
(3) ∠ＢＯＯ′ は屈折角に等しいことを示せ。
(4) 図１で ＯＯ′＝R とする。図２は、図１のＯを中心に、半径 R の円を描いたもので、矢印付の線分は、波の進行方向を表している。

図中の h_1、h_2 に対して、次式が成り立つことを示せ。

$$n=\frac{h_1}{h_2}=\frac{v_1}{v_2}\quad\text{（各領域での速度の比。}n\text{ は定数）}$$



(4)の式は、入射角の大きさには関係なく成り立っている。これが波の屈折の法則である。

(4)の式の値 n を領域Ⅰに対する領域Ⅱの屈折率という。

―――（ここまでが課題の内容）―――

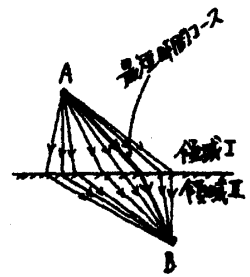
スネル（1580～1626）が、光の屈折に関して(4)の式の左辺が入射角に関係なく一定値になることを実験的に見出したので、この法則はスネルの法則と呼ばれている（ただし、スネルが最初ではないという事実が確認されている）。右辺はホイヘンス(1629～1695)が理論的に見出した。

実際に虹を調べるときには、「三角関数」という“道具”を利用し、上記の屈折の法則をもっとスマートに表現することになる。

光の屈折の度合いは、たとえば水の場合でも、上が空気なのか油なのかによって異なる。つまり、光の屈折率は物質の組み合わせによって決まってくる。

これでは話しがややこしい！

そこで、光の場合は、領域Ⅰが真空の場合の n の値を領域Ⅱ（物質）の屈折率という（絶対屈折率ともいう）。したがって、真空の屈折率は正真正銘の１――なぜなら、屈折率は速度の比。空気の屈折率は 1.0003 であり、ほとんど１、水の屈折率は約 1.3 である（光の振動数によって小数点２桁目が少し異なる：「3．光の分散」参照）。



屈折の法則は「フェルマーの原理」という光の進み方についての基本原理からも導けます。フェルマーの原理とは「光がＡ点からＢ点に進むときに選ぶ道筋は、時間が一番短くてすむ道筋」というものです。「面白い」と思った人は、是非この原理から屈折の法則を導いてみてください！できますヨ！分からないところは遠慮なく質問に来てください。

フェルマーの原理の現代的解釈…これがまた、とんでもなく面白いのですが、あまりに話しが長くなるので、物理の授業で説明することにします。

課題 ：「屈折の法則について」

提出期限： '04 9月3日(金)、 提出場所：職員室前の「箱」

☆前回のレポートを提出している人も、この課題に挑戦してください（実は、前回のほうが難しい）。

次の文および問(1)～(4)の誘導に沿って、「屈折の法則」を導き、さらに問(5)に答えなさい。
図解(図を描いての説明)を用いてレポート用紙にまとめること。

水の波の屈折を思い出そう！図1の波頭①が時間 t [s]の間に②に移動する。波頭とは、波の山と考えればよい。領域IIは領域Iより波の速度が遅いので、領域IIに入った波頭は“遅れをとって”折れ曲がる。これは波の進行方向が変化した･･･つまり屈折したことを意味している。波は波頭の線(①や②)に対して垂直に進む。

領域I、IIでの波の速度をそれぞれ v_1[cm/s]、v_2[cm/s]とする（v は *velocity* ＝速度　の頭文字）。
また、∠AO′O＝θ_1、∠BOO′＝θ_2、OO′＝L とする。

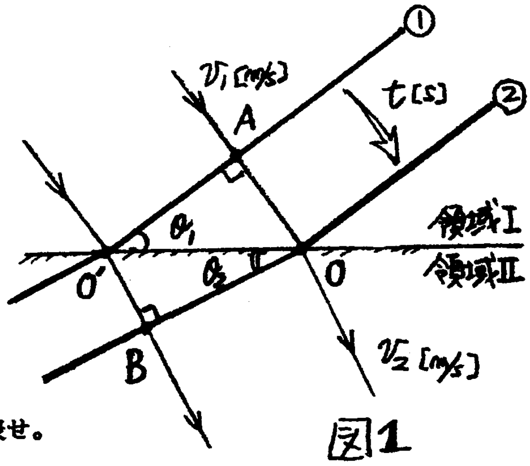


図1

(1) AO およびBO′ の長さを v_1、v_2、t を使って表せ。

(2) $\sin\theta_1$ および $\sin\theta_2$ の値を L、v_1、v_2、t を使って表せ。

(3) θ_1 と θ_2 はそれぞれ入射角と屈折角に等しいことを図解して示せ。

(4) 図2のように、入射角を θ_1、屈折角を θ_2 としたとき

$$n = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

を領域Iに対する領域IIの屈折率という。

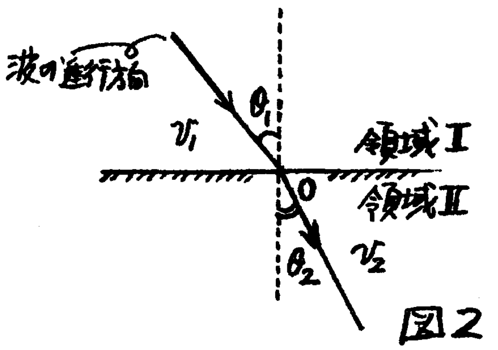


図2

上記の屈折率 n を v_1、v_2 で表し、屈折率 n が入射角の大きさには関係なく一定値であることを確認せよ（これが「屈折の法則」である）。

入射角 θ_1 を 30° から 60° にしたとき、もし屈折角 θ_2 が 20° から 40° になるというのなら（屈折角 θ_2 が入射角 θ_1 に比例）もっと分かりやすかったかもしれない。残念ながら(?)入射角 θ_1 と屈折角 θ_2 は直接比例するのではなく、$\sin\theta_1$ と $\sin\theta_2$ が比例するというのである！屈折率は比例定数。

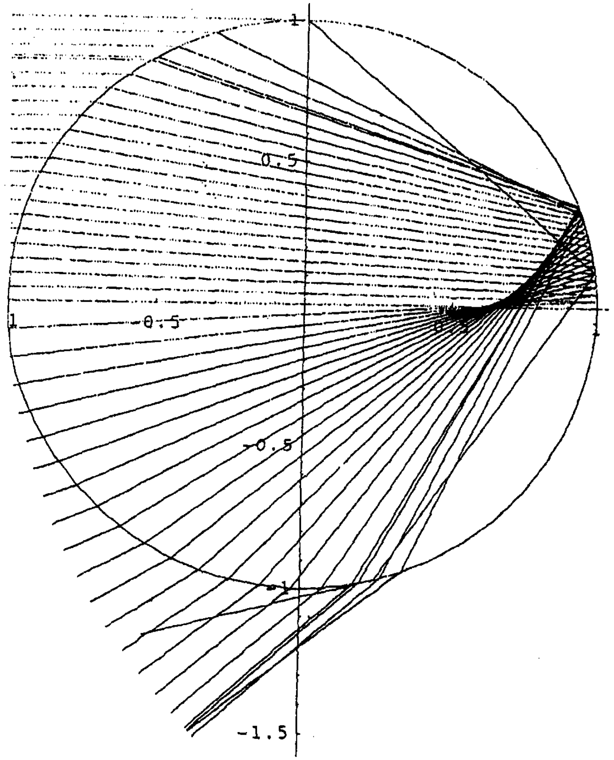
(5) 光の場合、空気に対する水の屈折率は約1.3である。空気から水への入射角が θ_1 ＝ 80° のとき、屈折角 θ_2 はおよそ何度になるか。三角定規、分度器、コンパスなどを使用し、作図で結果を求めよ。
☆前回の課題の二つ目の図(図2)を参考にするのも良い。

資料 2

直線群が作る線

茶園幸子

水滴の中を通る光の道筋（虹角）



折り線で作る曲線

定点Pから辺lへの垂線PH　→　y軸
PHの垂直二等分線　→　x軸
Pの座標を$(0, p)$
辺l上の点$A(t, -p)$　とおくと　$H(0, -p)$
折り線m　は　APの垂直二等分線

解１）
点Aを通る辺lの垂線と折り線mの交点をTとする
$TA = TP$
Tは定点Pまでの距離と定直線lまでの距離が等しい点
ゆえに　Tは放物線を描く（3年数Cで扱われる放物線の定義）

解２）
解１　における　Tの軌跡を求める

PAの傾き　$-\dfrac{2p}{t}$

PAの中点 M　$M(\dfrac{t}{2}, 0)$

折り線　mはMを通り、傾き　$\dfrac{t}{2p}$　の直線

$m : y - 0 = \dfrac{t}{2p}(x - \dfrac{t}{2})$　より

$y = \dfrac{t}{2p}x - \dfrac{t^2}{4p}$

よって　$T(t, \dfrac{t^2}{4p})$

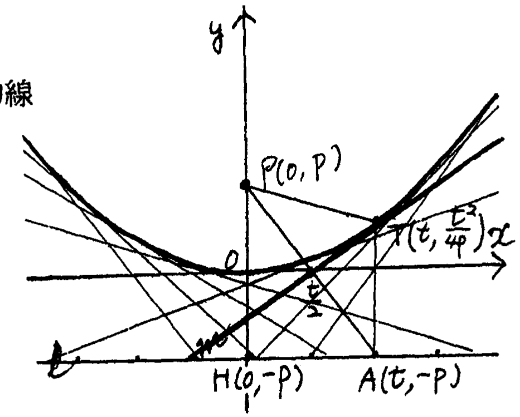
Tの軌跡

$x = t$　→①

$y = \dfrac{t^2}{4p}$　→②

①②より　Tの軌跡は　$y = \dfrac{1}{4p}x^2$

放物線



解３）

APの傾き　$-\dfrac{2p}{t}$　⇒　mの傾き　$\dfrac{t}{2p}$

APの中点　$\left(\dfrac{t}{2}, 0\right)$　を通る

$m \; : y = \dfrac{t}{2p}\left(x - \dfrac{t}{2}\right)$

$t^2 - 2xt + 4py = 0$　for $^\forall t$　→①

m　の通る領域

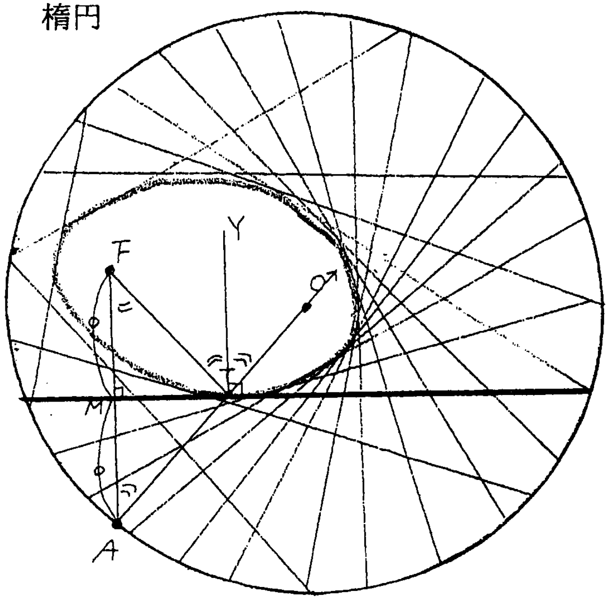
$\dfrac{D}{4} = x^2 - 4py \geq 0$　⇒　$y \leq \dfrac{1}{4p}x^2$

解４）
①が包絡線となる図形
①をtで微分　$2t - 2x = 0$　∴　$x = t$　→②
①　②よりtを消去

$x^2 - 2x^2 + 4py = 0$　∴　$y = \dfrac{1}{4p}x^2$

②寄り①の式は　$y = \dfrac{1}{4p}x^2$　の　$x = t$　における接線

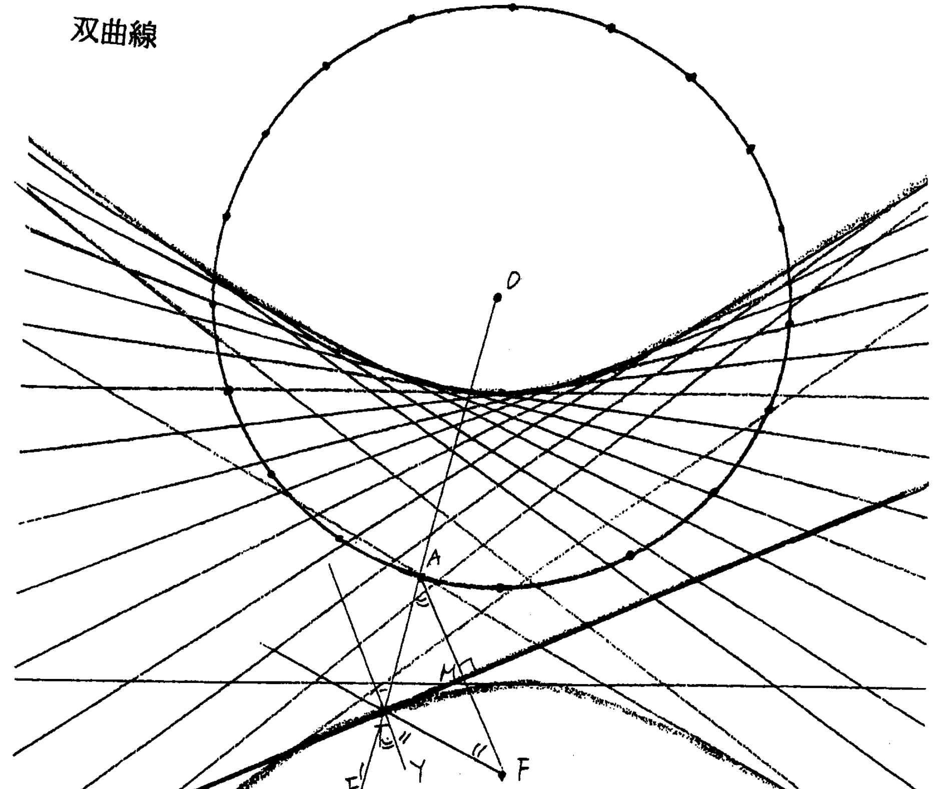
楕円



円周上の点 A を F に重ねて折る
折り線は AF の垂直二等分線　AF の中点を M
円の中心 O とし．OA と折り線の交点 T …… T の集合が楕円
TF + TO = TA + TO = OA = R 一定

T で折り線に直交する直線 TY
TY // AF より ∠TFM = ∠YTF （錯角）
∠TAM = ∠YTO （同位角）
一方 ∠TFM = ∠TAM　よって ∠YTF = ∠YTA
F からの光線は T で反射し（入射角＝反射角）O を通過

双曲線



円周上の点 A を F に重ねて折る
AF の中点を M
OA と折り線の交点 T …… T の集合が双曲線
TO − TF = TO − TA = OA = R 一定

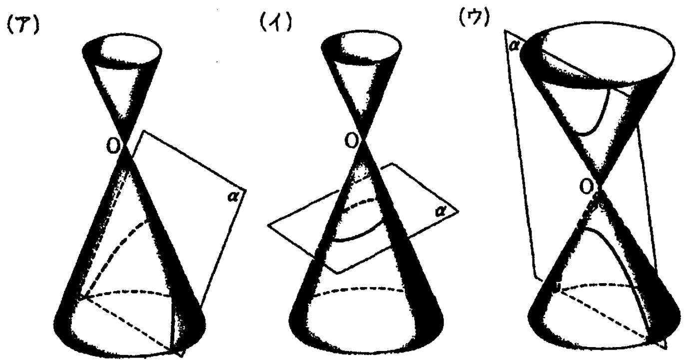
T で折り線に直交する直線 TY
TY // AF
∠TFM = ∠F'TY
∠TAM = ∠ATY
一方 ∠TFM = ∠TAM　よって ∠F'TY = ∠ATY
F からの光線は T で反射し O から発した方向に走る

資料3

数I・虹　　円錐曲線を描こう①　　担当：阿部

円錐曲線

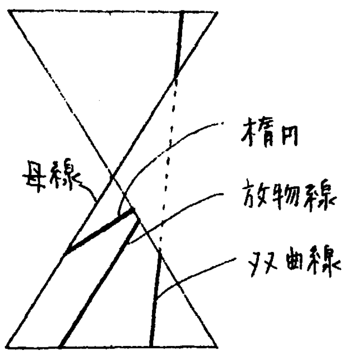
‥円錐を頂点を通らない平面で切ったときに，その切り口に現れる曲線



(ア) 円錐を，その1つの母線に平行な，頂点を通らない平面で切ったときに，その切り口に現れる曲線が，放物線である。

(イ) 円錐を，そのどの母線とも平行でなく，円錐と頂点の一方の側だけで交わる平面で切ったときに，その切り口に現れる曲線が，楕円である。

(ウ) 円錐を，それと頂点の両側で交わり，頂点を通らない平面で切ったときに，その切り口に現れる曲線が，双曲線である。



円錐を真横から見ると，切断する平面と母線とのなす角によって，切り口の図形が変化する様子がわかる．(左図)

1. 楕円

平面上で異なる2定点からの距離の和が一定である点の軌跡を楕円といい，これらの2定点をこの楕円の焦点という．(注)

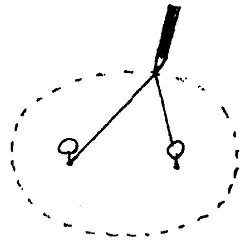
軌跡…ある条件をみたす点がある図形の上にあり，この図形上の点がすべてその与えられた条件をみたすとき，この図形をその条件をみたす点の軌跡という．

○ 楕円を描いてみよう！

〈用意するもの〉

ピン2本，鉛筆，ひも．

下に敷くボール紙（B5程度）



※ ひもの長さ，ピンの位置をいろいろに変えて実験してみよう．

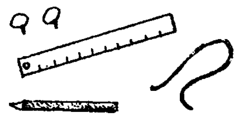
数I・数I　円錐曲線を描こう②

2. 双曲線

平面上で、異なる2定点からの距離の差が一定である点の軌跡を双曲線といい、これらの2定点をこの双曲線の焦点という。

○ 双曲線を描いてみよう！

〈用意するもの〉
- ピン2本
- 穴の空いた直線定規
- 鉛筆
- ひも　（下に敷くボール紙）



⇒ これらの道具を使って、どのように作図するのか、考えて下さい。

3. 楕円・双曲線の作図

〈用意するもの〉
コンパス、カラーペン（色えんぴつ）、グラフ用紙

①（準備）
グラフ用紙上に定点F，F′をとる。
F，F′を中心として、半径を一定の大きさ（例えば0.5cmずつ）だけ増やしながら同心円をかく。

② 同心円の交点で　$PF + PF' = \boxed{}$　をみたす点Pをいくつか求め、これらを通る曲線をえがく。

* $\boxed{}$ の値をいろいろに変えてみよう。

③ 同心円の交点で　$|PF - PF'| = \boxed{}$　をみたす点Pをいくつか求め、これらを通る曲線をえがく。

* $\boxed{}$ の値をいろいろに変えてみよう。

4. 放物線

平面上で1つの定点までの距離と、その定点を通らない定直線までの距離が等しい点の軌跡を放物線という。
この定点を放物線の焦点、定直線を準線という。

5. 放物線の作図

①（準備）
グラフ用紙上に定点Fと定直線dをとる。Fを中心として半径を一定の大きさだけふやしながら、同心円をかく。dと平行な線を同心円と同じ間隔でひく。

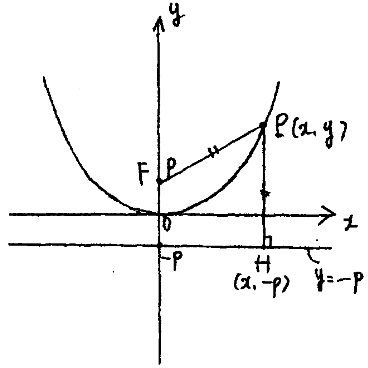
② 点Pからdへの垂線をPHとする。　PH＝PF　をみたす点Pをいくつか求め、これらを通る曲線をえがく。

* dとFの距離をいろいろに変えてみよう。

円錐曲線を描こう③

6. 放物線 $y=ax^2$

4で定義した放物線が座標平面上で $y=ax^2$ という方程式になることを証明してみよう。



証) 座標平面上に焦点 $F(0, p)$,
準線 $d: y=-p$ をとる。
放物線上の任意の点 P から、
準線 d に引いた垂線を PH とすると、

$$PF = PH \quad —— ①$$

点 P の座標を (x, y) とすると、

$$PF=\sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

$$PH=|y+p|$$

であるから、①は

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=|y+p|$$

と表される。両辺2乗して整理すると、

$$x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$

$$\therefore x^2=4px$$

ここで $\frac{1}{4p}=a$ とおけば $\underline{y=ax^2}$ //

7. 離心率

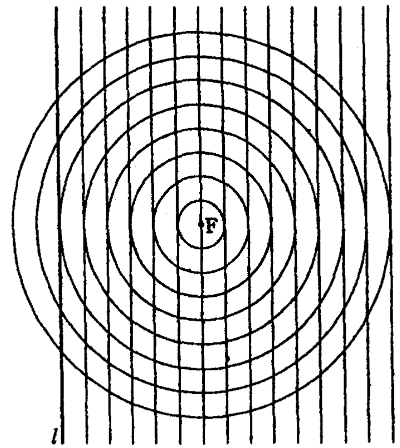
右の図は，等間隔の直線と，そのうちの1つの直線上の点Fを中心とし各直線に接する同心円である。平行線上の点Pから直線 l に引いた垂線をPHとするとき，次の条件を満たすような点Pをいくつか見いだせ。

そして，それらの点を通る曲線はどのような図形になるか調べよ。

(1) PF : PH=1 : 2

(2) PF : PH=1 : 1

(3) PF : PH=2 : 1



定点Fまでの距離PFと、その定点を通らない定直線 d までの距離PHとの比の値 $\frac{PF}{PH}$ が一定である点Pの軌跡は、$\frac{PF}{PH}=e$ とすると

$0<e<1 \Longrightarrow$ 楕円

$e=1 \Longrightarrow$ 放物線

$e>1 \Longrightarrow$ 双曲線

となり、定点Fは各曲線の焦点であることが知られている。
このeを離心率という。

資料 4

虹-その文化と科学-　「西條敏美　著」より

虹の語源と発音　虹は虫が相連なっている形からできていて主虹を虹、副虹を蜺で表している。
「虹」漢字を使った最も古い文書は「日本書紀」である。
万葉集にも虹を詠んだ詩がある。

虹の神話と伝説 旧訳聖書、ノアの箱船、ギリシャ神話「女神イーリス」、住井すえ「橋のない川」、李白詩集、アイルランド民話、アンデルセン童話集、マクドナルド民話集、

君は虹を見たか 萩山農場、テニスコートでの観察

虹の基本的なことがら 主虹、副虹、過剰虹、アレキサンダーの暗帯

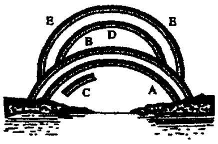


図 1·1　虹の模式図
A：主虹（第1の虹）　D：第1の反射虹
B：副虹（第2の虹）　E：第2の反射虹
C：過剰虹（余り虹）
A の虹は内側が紫，外側が赤であるが B の虹は内側が赤，外側が紫で，色の配列が反対になっていて，うっすらとしか見えない．A の虹と，B の虹の間は，他の部分に比べて暗い．

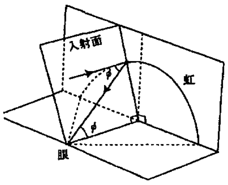


図 1·2　水滴への入射光線と水滴からの射出光線とがなす角 ϕ を虹角と言う．主虹の赤は約 42 度である．

虹についての疑問

(1) そもそも、なぜ空にあのような光の帯が見えるのだろうか。空には、太陽の光を反射できる鏡がある訳ではない。あるのは、無数の小さな水滴である。だとすれば、水滴が鏡の役割をして全反射しているのだろうか。
(2) 主虹と副虹、どうして２つの虹が見えるのだろうか。他に過剰虹と水面の反射光による虹、もう他には見える虹はないのだろうか。
(3) なぜ、虹は半円状のものしか見えないのだろうか。まん丸い虹などは見ることはできないのだろうか。
(4) 虹の根元はどうなっているのだろうか。そこに行くことはできないのだろうか。そこに行くことができたなら、真上にそそり立つ虹をみることができ、虹のトンネルをくぐりぬけることもできるはずだが。
(5) 近くにそそり立つように、高く見える虹と、遠くにゆるやかな円弧を描いて、低く見える虹とがあるが、なぜそのような違いがあるのだろうか。
(6) 虹には、比較的長い時間見えるものと、わずかな時間で消えてしまうものとがあるが、なぜそのような違いがあるのだろうか。
(7) 水滴はたとえ小さいとはいっても、地上に向かってゆっくりと落下しているはずである。落下する水滴に光が当たっているのに、なぜ虹は同じ位置に静止して見えるのだろうか。
(8) なぜ虹は七色の色彩を帯びているいるのだろうか。
(9) 色の順序が主虹では、円弧の内側が紫、外側が赤であるのに対して、副虹では、内側が赤、外側が紫と反対になっているのは、なぜだろうか。
(10) 副虹はなでうっすらとしていて、光が弱いのだろうか。
(11) 主虹と副虹との間は、他の部分よりも暗く感じられるのはなぜだろうか。
(12) 虹は七色というが、実際の色を見ると七色の全部がそろって見えることはまれである。いったい色は何色からできているのだろうか。
(13) 光が物体に当たって反射すると偏光することが知られている。ならば、虹の光も偏光しているのだろうか。

アリストテレスの虹の理論　虹の形や大きさを説明するにあたっては、「虹の諸現象を図形の研究から明らかにする」として記号を用いた幾何学的手法がとられている。二千五百年も前の時代というのに今日の論証の仕方と変わることなく、近代科学の精神と方法がもう現れている。

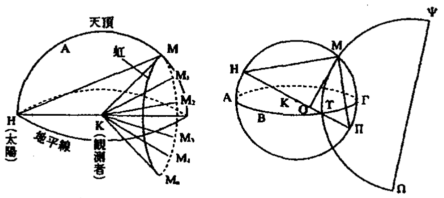


図 6·4　太陽が地平線より高く昇につれて虹は半円よりも小さくなることをアリストテレスは論証した．

デカルトの虹の研究 デカルトは「気象学」(1637) 第八講で虹の問題を論じた。デカルトは、光の反射だけ、あるいは屈折だけで虹が生じるとは考えずに、水滴内部に屈折して入り込んだ光の反射と屈折の両方が関係して生じるとし、実験と理論とによってそれまでのその理由が明らかでなかった虹角の問題をみごとに証明した。

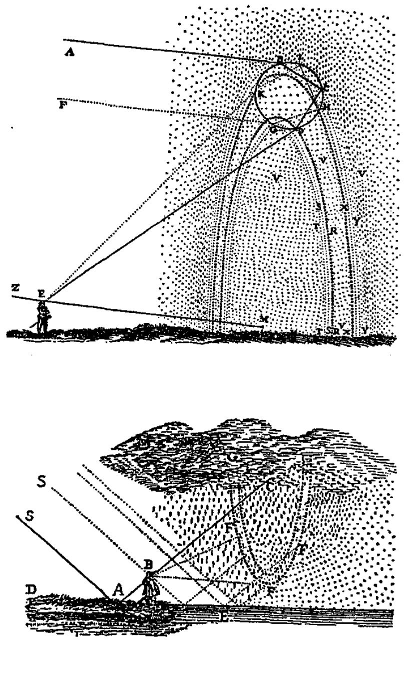
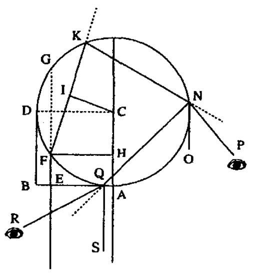


図 6·11　虹が観察される様子を示したデカルトのスケッチ．下は水面の反射光による虹，いずれも『気象学』(1637) より．(デカルト著作集 I　白水社)

デカルトの実験　デカルトもまた球形の大きなガラス内に水を満たし、これをこれを水滴と見たてた。そして、これに水平に太陽光線をを当て、観察者の目の位置を変えることによりガラス球の高さが４２度のとき、赤色の虹がみえることを確認した。これをデカルトは幾何学的に次のように説明した。ACに平行に入射した光線EFは、点Fで屈折して点Kにいき、この点で反射して点Nに届く。そこから点Pにいくか、もう一度反射して点Qへいき、そこから方向を変えて点Rへいく。ここでABを10000としたとき、例えばHFが8000であれば、CIは約5984となる。なぜなら、水の屈折率は、デカルトの測定では、187対250で、これは図のHF対CIで示されるからである。こうして、HF,CIの決定から二つの弧FG,FKを算出し、さらに角ONPと角SQRを算出している。下の表は、HFをいろいろ変えて計算した結果である。その結果から次のように述べている。

約40度の角ONPをつくる光線の方が、それ以下の大きさの角ONPをつくる光線よりはるかに多いこと、あるいはまた約54度の角SQRをつくる光線がそれ以上の大きさの角SQRをつくる光線よりはるかに多いことが容易にわかる。

このことが、虹が見える理由である。



視分 HF	視分 CI	弦 FG	弦 FK	角 ONP	角 SQR
1000	748	168.30	171.25	5.40	165.45
2000	1496	156.55	162.48	11.19	151.29
3000	2244	145.4	154.4	17.56	136.8
4000	2992	132.50	145.10	22.30	122.4
5000	3740	120.	136.4	27.52	108.12
6000	4488	106.16	126.40	32.56	93.44
7000	5236	91.8	116.51	37.26	79.25
8000	5984	73.44	106.30	40.44	65.46
9000	6732	51.41	95.22	40.57	54.25
10000	7480	0.	83.10	13.40	69.30

図6·13　デカルトは水滴内の光の道筋を屈折と反射で示した．下はそのときの計算表．（デカルト著作集Ｉ　白水社）

ニュートンの虹研究　ニュートンもまたデカルトと同じく、水滴内の光の道筋を考察する。ただ、水滴がプリズムの役割を果たして、太陽光の各色の屈折性がわずかに異なるために、各色が分散して現れるということをはっきりと述べている。つまり「注目すべきことは、屈折性の異なる度合いに応じて、それぞれ異なる角できわめて大量に射出し、互いに分離されることによって、それらの固有の色を表すことである。」ニュートンは、自ら実際の虹を観察したことがあるとし「内側の虹の最大半径は約四十二度、またその虹の赤、黄、緑の幅は六十三または六十四分であった」と述べている。そして、水を満たしたガラス球を水滴と見たてた実験、アントニオ・デミニスやデカルトも行ったあの有名な実験をニュートンもまた行い、これらの結論の正しさを裏づけている。

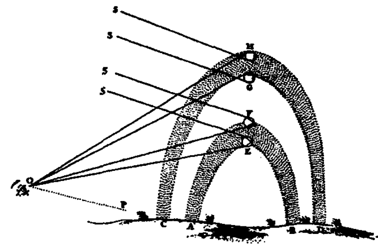


図6·18　虹のでき方を示したニュートンのスケッチ．太陽光が水滴に当たると屈折性の異なる度合に応じて，それぞれ異なる角で色が分散して現れるとした．主虹（内側の虹）の最大半径，つまり赤色は42度17分，副虹（外側の虹）の最小半径，つまり赤色は50度42分とした．（『光学』岩波文庫より）

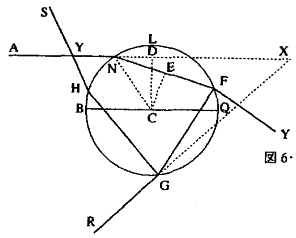


図6·19　水滴内の光線の道筋を示したニュートンの図．ANFGRは主虹をつくる光線，ANFGHSは副虹をつくる光線．副虹をつくる光線は，実際は水滴の下半径から入射して地上の観察者の眼に届く．（『光学』岩波文庫より）

残された課題　ニュートンの研究をもって虹の現象は解き明かされたといってよく、ニュートン以後百年以上も虹の理論はさして進展することがなかった。虹の理論のもう一歩進んだ段階、それは虹の微妙な色調の違いを説明する必要から始まった。色調の違いを説明するには光を波動と考え、水滴の大きさも考慮にいれた光の回折理論によらなければならない。また過剰虹が見える仕組みを明らかにするには、同じく波動論としての干渉理論を必要とする。

虹をめぐる主な研究史

表6·1　虹をめぐる主な研究史

年代	研究者	事項
前4世紀	アリストテレス	水滴への光の反射で説明，3色（赤，緑，紫）しか認めず．
12世紀	ロバート・グロステスト	屈折を最初に考慮．
13世紀	ロジャー・ベーコン	これまでの虹の観察記録を集大成．虹の高度も正確に記載．
13世紀	フライブルグのテオドリクス	近代的理論を提唱，太陽から雨滴に屈折によって入り，ついで1回または2回の反射によって水滴から出て観察者の眼に達するとした．水を入れたガラス球を用いて虹のモデル実験を行なう．
1611	アントニオ・デ・ドミニス	テオドリクスと同じ理論を提唱．
1637	デカルト	テオドリクスと同じ理論を詳細な考察と実験で提唱，虹の色の問題を除いて究明する．
	スピノザ	虹の幾何学的理論を代数的計算で検証する．
1704	ニュートン	虹の色の問題を解決して，幾何光学的虹の理論が完成する．
1802	ヤング	光の干渉理論によって，過剰虹の説明に成功する．
1838	エアリー	光の回折理論によって，波動光学的虹の理論を創設．太陽を点光源とし，水滴の大きさによって虹のそれぞれの色の強度，色帯の幅がちがってくることを詳細な計算から示す．
1841	ミラー	エアリーの理論を実験的に検証．
1888	ボイテル	エアリーの理論を発展．
1888	ラーモア	エアリーの理論を発展．
1888	ブルフリッヒ	エアリーの理論を実験的に検証．
1889	マスカルト	エアリーの理論を発展．
1897	パーンター	虹の色の問題をマクスウェルの電磁理論で詳細に研究．
1898	ローレンツ	エアリーの理論を発展
1904	愛知敬一と田中館寅士郎	太陽を円光源として，エアリーの理論を完成．
1937	ファン・デル・ポールとブレメル	虹の複素角運動量理論を創設．ワトソン変換（複素角運動量法）を虹に適用する極限においてエアリーの理論が得られることを示す．
1969	ナッセンツバイク	ワトソン変換を改良し（1965），虹に適用する．
1975	カー	虹の三つの理論（マクスウェルの電磁理論による厳密解，エアリーの理論，複素角運動量理論）を詳細に比較