

(4) 数学①コース「円すいの体積はなぜ円柱の 3分の1なのでしょう」

数学科 沖山 義光

テーマ設定の理由

面積や体積を求めるということに関しては、円の面積についていえば小学校で導入され中学校でも当然のごとく公式 πr^2 が使われている。また体積にしても、円錐の体積は底面積 \times 高さ $\div 3$ と教えられている。円周率 π とは何か。そして円の面積が πr^2 とできる理由とか、円錐の体積はどうして円柱の体積を3で割るのか。円の面積については、円を扇形に分割しそれを三角形に近似しその和を求めることでおよその値を求め、そこから公式を導いている。また円錐の体積は円錐を実際につくり中に水を入れるなどし、それを測定することからおよそ3分の1になることを納得させているのが現状であろう。これらの指導は、極限の考えが厳密に扱えないための工夫であり小中学校での指導の工夫としては大変優れていると思う。昨今の小中学校の現場ではこのような指導の工夫もなく頭ごなしに公式として覚えさせていることも多いのではないだろうか。このような指導は厳に慎みたいものである。分割を集めてその近似値で解決するという考え方は、高校での積分の素地指導として小中学校で用意周到に行われるべきである。そのような指導を受けてきた子供たちはおよその値というところに疑問を持って釈然としないまま学習を進めているはずである。疑問を持っている子供たちが知的発達に熟しある程度の数学的な知識も準備できた段階で、区分求積法による面積、体積の求め方は知り疑問が一気に解け感動する。このように計画されているのが指導要領ではないかと思う。区分求積法はその意味で知的発達や数学的知識の十分熟した時期に指導するように計画されるものである。ただし、個々の子供たちの中には近似値の考えに強く疑問をもち、極限の考え方を指導してもいい段階のものもいると思われる。そこで、中学生にも十分納得できるように工夫をしてみようというのがこのテーマの設定になった。これまでもそのことを常に考えて例年繰り返している。区分求積法には極限の考えや数列の知識が必要である。極限については $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ を理解させ、数列 $\sum_{k=1}^n k^2$ の和は立体模型を使って作業を通してよりわかりやすく時間をかけて指導すれば理解できるのではないかという試みである。昨年度は二次関数で囲まれる図形の面積を求めてみた。今年度は円錐の体積を扱うことにした。指導する内容が区分求積という意味では昨年度と変わらないが、毎年受講する子供たちもいることを考慮して面積と体積をテーマにしておよそ交互に実施している。

本コースのねらい

微積分のうち積分についてその基本的な考え方になった区分求積法を使って、円錐の体積を求める。

そこでは自然数の平方の和 $\sum_{k=1}^n k^2$ について、立体模型をつくりそれから導くこととする。

授業の流れ

1. 用意した発砲スチロールの角棒を切って、図のような立体を1人1個作成する。
2. できた立体を6個組み合わせて1つの直方体を完成する。
3. これから平方の和の公式を帰納的に導く。自然数の和 $1+2+3+\dots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ についてはガウスのやった方法を教える。
4. n 分割の和 $S_n = \frac{\pi}{n} \left\{ \left(\frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{2a}{n}\right)^2 + \left(\frac{3a}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{na}{n}\right)^2 \right\}$ を導いた平方の和の公式を使ってまとめる。
5. $S_n = \frac{\pi a^2}{n^3} \times \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}$ を $S_n = \pi a^2 \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}$ と変形し $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ になることをつかって極限值 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi a^2}{3}$ を導く。

準備したもの

発砲スチロール製の角柱(東急ハンド)

発砲スチロール用セメダイン

スチレンカッター

定規等

指導上の留意点

- ・式の計算は複雑なので細かく丁寧に導いていく。また極限值 $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ も議論しながら直観で理解させる。
- ・平方数の和の導きやグラフなど実際に作業することを通じて体験することによる理解をねらう。
- ・高校数学の他の話もできるだけ話題として取り入れる。

指導してみて

今年度の特徴は例年3年生が多いのですが、1年生、2年生も多く参加したことである。そしてその理解度も3年生がよい訳ではなく学年の差があまり感じられなかったことである。まず初めに発砲スチロールを電熱線を用いたカッターで切る作業からはじめたが、作業の早い生徒、きれいにカットできる生徒、まっすぐ切ることに集中するあまりますます曲がってしまう生徒などさまざまやはり学年差は感じられなかった。6個の立体を組み合わせて直方体を作るところはパズル的でできると感動を呼ぶところである。模型を作るところではきれいにテキパキできた生徒がこの段階で苦しんだり、模型を作る

ときにはもたもたしていた生徒がこの段階ではあつという間に組み合わせてしまうなど生徒の得意不得意な面がはっきりと現われそれぞれの生徒たちを把握することができる。作業のよさでありはじめての生徒たちをここで掌握していく。今年度も模型を作る作業に一昨年度と同様に時間がかかったが、生徒たちの要領の悪さというより、これまで何回も使用してきたスチレンカッターの性能が落ちたのも1つの原因ではないかと思う。それほど生徒たちの作業能力下がったとは思えなかった。平方和の公式を導き、 n 分割、その和、そしてその極限という一連の講話は後半の山場であるが、みな納得しながらよく聞いてくれた。終了後に1人の生徒が質問に来た。生徒：「 n を無限に大きくしていくと n 分の1は0になるのですか？」先生：「いいえ n 分の1が0になるのではなく、0に近づいていくのです。 n 分の1は0にはなりません。」この生徒はこの答えでとても納得し表情がぱっと明るくなり嬉しそうにお礼をいって帰って行った。この生徒は中学1年生だった。極限の考えをここまで深く考えている生徒がいること、それに一筋の光をさしのべられたことに私も喜びを感じこの授業を設定できたことに自信を得ることができた。