

(6) 数学③コース「折り紙と数学」

数学科 阿部 真由美

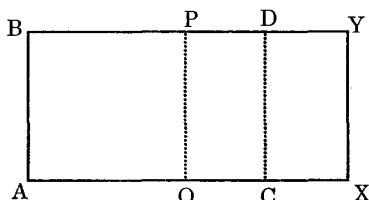
折り紙を用いて、正六点星、正五点星を折り、その図形の中に隠れている角度と、辺の長さの関係を考えてみた。

中学2年生の参加者には、正5点星の考察は少し難しかったかもしれないが、作業も多く、楽しみながら、学ぶことができたと思う。

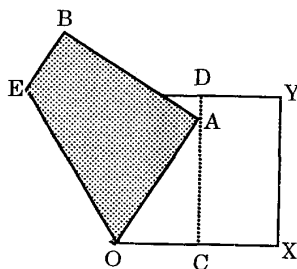
正六点星

角度に着目したとき、角度 θ から角度 $\frac{\theta}{2}$ を折るのは、辺と辺を重ねて折ればよいので容易くできる。正六点星は 60° の角を折らなければならないので、正三角形を半分に折った直角三角形の辺の比(60° をはさむ辺の比が $1:2$)を利用する。

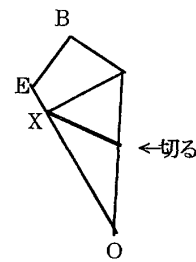
[図1]の長方形BAXYは正方形の折り紙をAXで半分に折ったものである。この長方形を半分に折った折線がPO、さらに半分に折った折線がDCである。ここで、[図2]のように点Aが線分DC上にくるように折ると、 $AO:OC=2:1$ 、 $\angle ACO=90^\circ$ なので $\angle AOC$ は 60° になる。次に $\angle EOX$ を四等分し、[図3]のようにはさみで切って切り開けば、正六点星ができる。



[図1]



[図2]

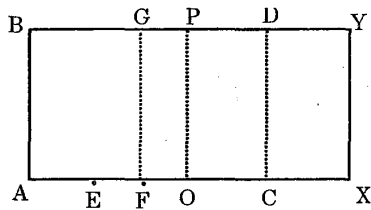


[図3]

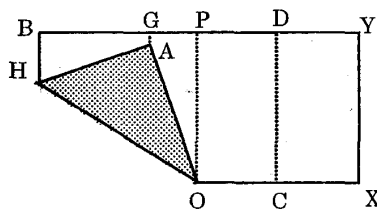
正五点星

まず、先に正五点星を折ってみた。

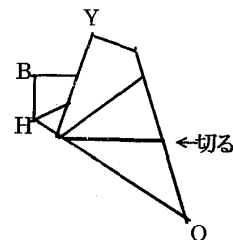
[図1]を利用する。[図4]のようにAX上に $CP=CE$ となるような点Eをとり、EOの中点をFとし、FGがABと平行になるように折る。(これも、長さを定規で測ることなく、紙を折って点のしるしをつける)次に、[図5]のように、点Aが線分FG上にくるように折る。 $\angle HOX$ を四等分し、[図6]のようにはさみで切って切り開けば、正五点星ができる。



[図 4]



[図 5]



[図 6]

正五角形の辺と角

正五角星の点Oの周りが正確に10等分されている(つまり36°ずつに等分されている)されていることを、辺の長さを使って、説明するために、正五角形の辺の長さや角の大きさを調べてみた。

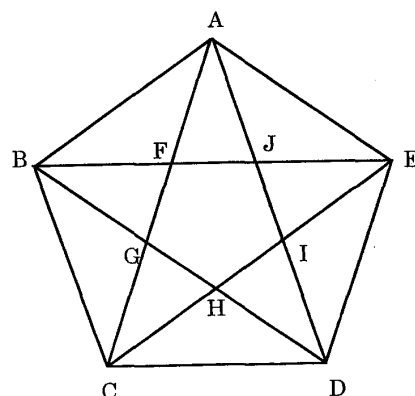
右の正五角形ABCDEで、対角線の交点をF, G, H, I, Jとする。

△ACDと△ABGは頂角が36°、底角が72°の二等辺三角形で、相似の関係にあることから、 $AB=1$ 、 $BG=a$ とおくと

$$AC : AB = CD : BG$$

$$(a+1) : 1 = 1 : a$$

このことから、 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ であることがわかる。



[図 7]

正五角星の考察

[図 8] は [図 5] で点Aの移った位置をA'として、開いたものである。

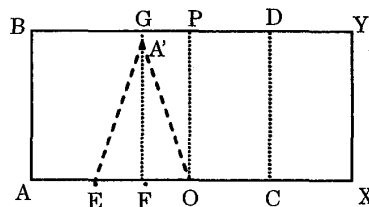
この図を用いて、 $\angle A'OF$ が $36^\circ \times 2 = 72^\circ$ になることを辺の長さを利用して考えた。

$AB=1$ とする。直角三角形POCで考えると $PC = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$PC=EC \text{ だから } EC = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{したがって } EO = EC - OC = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$AO=A'O$ だから $A'O=A'E=1$ である。ゆえに、△A'EOは頂角が36°、底角が72°の二等辺三角形であることがわかる。



[図 8]

直角三角形を利用して $\sqrt{5}$ という長さを折り紙でつくることがポイントとなっている。折り紙で考える前に、コンパスを使って実際に1という長さを与えて、 $\sqrt{5}$ という長さを作図し、そのことを利用して、正五角形も作図してみた。コンパスと折り紙は手段は違うが、まったく同様の理論で作図できる。

教わったとおりに作業するだけにとどまらず、それが数学的に計算された理論に基づいていることに気がつき、さらに発展させていってもらえればと思う。