

数学①コース：円すいの体積はなぜ円柱の3分の1なの でしょう

沖山 義光

テーマ設定の理由 中学生にとって高校の数学とは何が最もわかりやすくかつ重要かと考えて例年このテーマを取り上げている。昨年は人工知能を取り上げたがまだ教材としての練り上げが甘く難しかったので一昨年以降で扱っていたテーマを再度扱うことにした。面積や体積を求めるということは、円の面積は小学校で指導され中学校でも当然のごとく公式 πr^2 が使われている。また体積にしても、円錐の体積は底面積×高さ÷3と教えられている。円周率 π とは何か。どうして3で割るのか。その理由は実験などの測定によってどうもそうらしいと思わされている。このようなことに疑問を持っている児童生徒にとって高校での区分求積法による面積、体積の求め方はアイデアとして、中学生にも十分納得できるものである。ただし、極限の考えや数列の知識が必要である。そこを、極限については $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ を理解させ、数列 $\sum_{k=1}^n k^2$ の和は立体模型を使って理解させるという試みである。

本コースのねらい 微積分のうち積分についてその基本的な考え方になった区分求積法を使って、円錐の体積を求める。そこでは自然数の平方の和 $\sum_{k=1}^n k^2$ について、立体模型をつくりそれから導くこととする。

授業の流れ

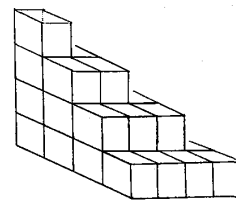
1. 用意した発泡スチロールの角棒を切って、図のような立体を1人1個作成する。

2. できた立体を6個組み合わせて1つの直方体を完成する。

3. これから平方の和の公式を帰納的に導く。自然数の和 $1+2+3+\dots$

$+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ についてはガウスのやった方法を教える。

4. n 分割の和 $S_n = \frac{\pi}{n} \left\{ \left(\frac{a}{n} \right)^2 + \left(\frac{2a}{n} \right)^2 + \left(\frac{3a}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{na}{n} \right)^2 \right\}$ を導いた平方の和の公式を使ってまとめる。



5. $S_n = \frac{\pi a^2}{n^3} \times \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}$ を $S_n = \pi a^2 \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6}$ と変形し $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ になる

ことをつかって極限值 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi a^2}{3}$ を導く。

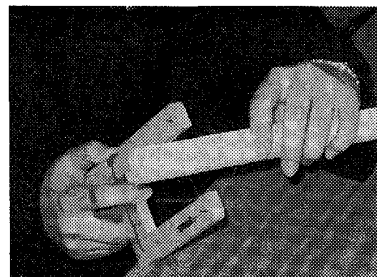
準備したもの

発泡スチロール製の角柱（東急ハンド）

発泡スチロール用セメダイン

スチレンカッター

定規等



指導上の留意点

- 式の計算は複雑なので細かく丁寧に導いていく。また極限值 $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ も議論しながら直観で理解させる。
- 平方数の和の導きやグラフなど実際に作業することを通じて体験することによる理解をねらう。
- 高校数学の他の話もできるだけ話題として取り入れる。



今年度とこれまでの違いとして、生徒の作業が遅くなったことが目立った。6個の立体を組み合わせて直方体を作るところはパズル的でできると感動を呼ぶところである。今年度は、いくつかのグループがなかなかできなくて感動するよりほっとするばかりという余裕の無さがあった。新指導要領によって学力が低下したということがいわれているがそのことを垣間見るようであった。なお、「理数体験授業」は高校の先生による授業を体験できるということで生徒には人気が高い。「理数体験授業」を受けた生徒は本校への入学を強く希望することが多く、私の授業を受けた生徒で2年前に受講し現在2年生の生徒が、数学IIの微積分を学習し終わった後で「先生に理数体験授業で教えて貰ったことはこのことだったんですね!!」と喋ってくれた。このように「理数体験授業」が学習効果をもっていることは授業するわれわれにとってとても「やりがい」を持たせてくれるものである。最後に、できた立体模型を前に全員で集合写真（デジカメ）をとり、それを後日受講生一人一人に郵送できたことも今年度の試みである。