移動現象とナビエ・ストークスの式
Transport phenomena and Navier-Stokes' equation

三浦明香子，兒玉歩，大久保淳子，前田育子，會川義寛
Sayaka MIURA, Ayumi KODAMA, Junko OKUBO, Ikuko MAEDA, Yoshihiro AIKAWA
（お茶の水女子大学）

1．はじめに

質量やエネルギーは保存則が成り立つことが知られてゐる．したがつてこれらの物理量が空間を移動するときには連続方程式が成り立つ．

ところが，化学種などは化学反応により生成消滅し，熱やエントロピーは不可逆的に生成するので，それらの物理量は一般には保存されない．しかしこの様な場合でも，連続方程式に湧き出しの項を加へることにより，それらの物理量の空間的・時間的密度変化を表はすことができる．

以上に挙げた物理量はいづれもスカラである．しかし例へば，運動量や角運動量などのベクトル物理量に関しても，ある条件下では保存則が成り立つことはよく知られてゐる．この様な場合はベクトルの各成分が保存されるとしてこの成分に関するスカラ物理量の連続方程式を求め，この3つの成分に関する連続方程式をまとめて，ベクトル物理量に関する連続方程式を導くことができる．

運動量に関して言へば，運動量保存則が成り立つと同時に，その発生速度はNewtonの運動方程式より力である．これらの観点よりNavier-Stokesの方程式を見つめてみたい．

2．拡散方程式と傳熱方程式

ある物理量iの，単位体積当りの量をρ_i，流束密度（単位面積を単位時間当りに通過する量）をj_i，単位体積当りの発生速度をφ_iとする．すると，その物理量iの空間局所における（単位体積当り，単位時間当りの）増加$\partial\rho_i/\partial t$は，そこへのiの流入 $-\mathrm{div}\, j_i$と，そこでのiの発生φ_iとの和であるから，**連続方程式**

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\mathrm{div}\, j_i=\varphi_i \qquad (1)$$

が得られる．

物理量iの流束密度j_iは，物理量iを含む媒体の流動vに基づく対流項$\rho_i v$と，その媒体中をi自身の濃度勾配により移動する拡散項との和である．この拡散項は一般に$-D_i\,\mathrm{grad}\,\rho_i$と近似できることが知られてゐる（$D_i$はiの拡散係数）．従つて$j_i$は

$$j_i=\rho_i v-D_i\,\mathrm{grad}\,\rho_i \qquad (2)$$

と表はせる．

この(2)式を連続方程式(1)に代入すると

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\rho_i v)=D_i\nabla^2\rho_i+\varphi_i \qquad (3)$$

または

$$\frac{d\rho_i}{dt}+\rho_i\,\mathrm{div}\, v=D_i\nabla^2\rho_i+\varphi_i \qquad (3')$$

が得られる．ここで，$\partial/\partial t$はEuler微分，d/dtはLagrange微分である．ただしここで拡散係数D_iは定数であるとし，∇^2の前に出した．

物理量iの質量密度（単位質量当りの量）をx_iとし，密度（単位体積当りの質量）をρとすれば，iの体積密度（単位体積当りの量）ρ_iは，

$$\rho_i=\rho x_i$$

なので，(3)式と，質量の連続方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\rho v)=0,\quad \text{または}\ \frac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}\, v=0$$

を用ゐれば直ちに

$$\rho\frac{dx_i}{dt}=\rho D_i\nabla^2 x_i+\varphi_i \qquad (4)$$

が得られる．ただし媒体は非圧縮性とし，密度ρは一定とした．この式の左辺はLagrange微分になつてゐるので，媒体の流動は微分中に取り込まれてをり，別途考へる必要がない．

物理量iとしてある化学種の濃度cを取り，対流および湧き出しがないとすると，(3)式は

$$\frac{\partial c}{\partial t}=D\nabla^2 c \qquad (5)$$

となる．これを**拡散方程式**といふ．

物理量iとして熱$Q=\rho cT$を取る（cは比熱）．熱拡散定数は温度傳導率αといふので，対流がなく，かつ熱発生速度をqとすると，(3)式は

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\nabla^2 T+q \qquad (6)$$

となる．**傳熱方程式**である．

３．運動量の移動と Navier-Stokes の式

（１）運動量の流束密度

物理量 i として運動量 p を取ると，単位体積当りの運動量は ρv である．從つて連続方程式(1)に関しては左辺第１項の ρ_i のところに ρv を代入することになる．これは連続方程式がベクトル方程式になつたことを意味する．

初めからベクトルの連続方程式を考へるのは難しいので，まづ，ρv の各成分 ρv_i (i = x, y, z) について考へてみよう．すると(2)式は，

$$j_i = \rho v_i v - \nu \,\mathrm{grad}\,(\rho v_i) \qquad (7)$$

となる．ここで ν は運動量の拡散定数，すなはち動粘度である．

この式を i = x, y, z の３つの成分に関して合はせると，ベクトルが３つ並ぶので，３行３列の行列（テンソル）で表はされるところの演算子 $\hat{j}$ となる．すなはち

$$\hat{j} = |v\rangle \rho \langle v| - |\partial/\partial r\rangle \mu \langle v| \qquad (8)$$

である．ここで，$\mu \equiv \rho\nu$ は粘度である．

(8)式の左辺は単位面積を単位時間に流れる運動量であるから，その次元は単位面積当りの力，すなはち応力である．從つて右辺第１項

$$\tau_k = |v\rangle \rho \langle v| \qquad (9)$$

は運動応力を，第２項

$$\tau_N = -|\partial/\partial r\rangle \mu \langle v| \qquad (10)$$

は粘性応力を意味してゐる．(10)式を **Newton** の粘性則といふ．

（２）運動量の発生

体積 V の流体にその表面を介して働く力 F は，応力テンソル $\hat{\sigma}$ を用ゐて

$$F = \oint_S dS\,\hat{\sigma}$$

と表はされるが，この式の右辺は拡張 Gauss の公式[注1]により，さらに

$$F = \oint_S dS\,\hat{\sigma} = \int_V dV\,\nabla\hat{\sigma}$$

と体積分に変換される．これは単位体積当りに働く力 f が，$f = \nabla\hat{\sigma}$ であることをを示してゐる．ところが Newton の運動方程式 $dp/dt = F$ より，運動量の発生速度は力 F に等しいことがわかつてゐる．すると単位体積当りの運動量発生速度は取りも直さず $f = \nabla\hat{\sigma}$ そのものである．從つて(4)式は

$$\rho\frac{dv}{dt} = \rho\nu\nabla^2 v + \nabla\hat{\sigma}$$
$$= \mu\nabla^2 v + \nabla\hat{\sigma} \qquad (11)$$

なるベクトル方程式となる．これを **Navier -Stokes** の式といふ．

この式をよく見れば実は，流体単位体積当りの Newton の運動方程式に他ならない．すなはち，右辺第１項 $\mu\nabla^2 v$ は粘性力を，第２項 $\nabla\hat{\sigma}$ は応力による力（これは多くの場合，圧力勾配 $-\nabla p$ として表はされる）を表はし，左辺はこの２つの力による運動量の変化である．粘性力は運動量の拡散移動により，圧勾配力は運動量の新たな発生より生ずる力である．

４．おはりに

結局，(8)式の運動量流束密度が運動応力と粘性応力よりなり，そして圧力（負の等方性応力）がその湧き出しに対応してゐると考へてよいのであらう．

注１．拡張 Gauss の公式

面積分から体積分に変換する公式としては Gauss の公式がよく知られている．例へば，電束密度 $\boldsymbol{D}$ の面積分は，その湧き出し div $\boldsymbol{D}$ の体積分に変換される．これはベクトル $\boldsymbol{D}$ の面積分から体積分への変換であるが，ベクトルのみならずこのほかに，スカラ p や演算子 $\hat{\sigma}$ の変換も同様に行なはれる．すなはち

$$\oint_S dS\,p = \int_V dV\,\nabla p \qquad (12a)$$

$$\oint_S dS\cdot \boldsymbol{D} = \int_V dV\,\nabla\cdot\boldsymbol{D} \qquad (12b)$$

$$\oint_S dS\,\hat{\sigma} = \int_V dV\,\nabla\hat{\sigma} \qquad (12c)$$

である．(12c)式は直接証明することも出来るが，(12b)式を用ゐれば以下の様に簡単に証明できる：

$$\oint_S dS\,\hat{\sigma} = \oint_S dS\,\hat{\sigma}\sum_i |i\rangle\langle i| = \sum_i \oint_S dS\,\hat{\sigma}|i\rangle\langle i|$$
$$= \sum_i \oint_S dS|\sigma_i\rangle\langle i| = \sum_i \oint_S dS\cdot\sigma_i\,\langle i|$$
$$= \sum_i \int_V dV\,\mathrm{div}\,\sigma_i\langle i| = \sum_i \int_V dV\,\langle\nabla|\sigma_i\rangle\langle i|$$
$$= \sum_i \int_V dV\,\langle\nabla|\hat{\sigma}|i\rangle\langle i| = \int_V dV\,\nabla\hat{\sigma}$$

さらに(12c)式における演算子 $\hat{\sigma}$ をスカラ p と単位演算子の積と考へれば直ちに(12a)式を得る．