行列式の線型性と交替性

Linearity and alternativity of determinant

池田寛子，児玉歩，野口栄太郎*，會川義寛
Hiroko IKEDA, Ayumi KODAMA, Eitaro NOGUCHI, Yoshihiro AIKAWA
（お茶の水女子大学大学院人間環境科学，筑波技術短期大学*）

1．はじめに

行列式は，数の並びである正方行列 A

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を，あるひとつのスカラ値 $|A|$ に対応させる函數である．行列式の値は行列が異なつても同じ値を取りうるので，この函數は多対1対応の函數である．

行列 A を列ベクトル $\boldsymbol{a}_{\mathrm{j}}$

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{j}}=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

の横並び，すなはち

$$A=(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}})=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\quad , \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}})$$

として表示することは，一見余り本質的なこととは見えないが，行列式 $|A|$ の性質を理解する上で重要な意味を持つ．行列 A と同様に，行列式 $|A|$ も

$$|A|=|\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}\ |=|\ \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\quad , \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}\ |$$

と列ベクトル表示されるが，いはゆる行列式の線型性・交替性は，この列ベクトルに関するものである．本稿は，この行列式の列ベクトル表示を用ゐると，如何に行列式の性質が見通しよくなるかを示したい．

2．行列式の線型性と交替性

行列式の線型性・交替性とは，上述の通り，行列式を列ベクトル表現したときの列ベクトルに関する線型性・交替性である．轉置行列 A^*の行列式$|A^*|$ は元の行列 A の行列式$|A|$ に等しいから，以下の，行列式の列ベクトルに関して成り立つ性質は，行ベクトルに関してもそのまま成り立つ．

（1）行列式の線型性

行列式に関し

$$\begin{aligned} &|\ \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, c_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{j}1}+c_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{j}2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}\ | \\ &\quad = c_1|\ \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{\mathrm{j}1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}\ | \\ &\qquad + c_2|\ \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{\mathrm{j}2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}\ | \end{aligned} \tag{1}$$

が成り立つことを，行列式の（列ベクトルに関する）線型性といふ．この線型性は行列式に関して言へるものであつて，行列に関しては成り立たない．例へば，行列式においては

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

となり分配則が成り立つが，行列では

$$\begin{pmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

となつてしまふ様なものである．すなはち，

$$|\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\ |=|\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\ |+|\ \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\ |$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\ )=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\ )+(\boldsymbol{b}, 0\ ).$$

である．この例より

$$|A+B| \neq |A|+|B| \tag{2}$$

なることは明白である．

（2）行列式の交替性

行列式の任意の2つの列を入れ替へると行列式の符号が変ること，すなはち

$$\begin{aligned} &|\ \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{\mathrm{i}}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\mathrm{j}}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}\ | \\ &\quad = -|\ \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{\mathrm{j}}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\mathrm{i}}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}\ | \end{aligned} \tag{3}$$

を，行列式の（列ベクトルに関する）交替性といふ．

これより直ちに，2つの列ベクトルが等しい行列式は0であることがわかる．さらに先の線型性と併せると，ある列に他の列

ベクトルの定数倍を足しても行列式が変らないことも導かれる．

3．列ベクトル表示の快適性

（1）余因子展開

単位列ベクトル e_i（i=1,2, …,n）を

$$e_i = \begin{array}{r} \\ \\ \langle i | \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表はせば，列ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ は

$$\boldsymbol{a}_j = \Sigma_i\, \boldsymbol{e}_i\, a_{ij} \qquad (4)$$

と展開されるから，行列式 $|A|$ は

$$\begin{aligned} |A| &= |\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_n \,| \\ &= |\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \Sigma_i\, \boldsymbol{e}_i\, a_{ij}, \dots, \boldsymbol{a}_n \,| \\ &= \Sigma_i\, |\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{e}_i, \dots, \boldsymbol{a}_n \,|\, a_{ij} \\ &= \Sigma_i\, A_{ij}\, a_{ij} \end{aligned} \qquad (5)$$

と，列ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ の要素 a_{ij} で展開できる．ここで展開の係数 A_{ij} は

$$A_{ij} = |\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \overset{|j\rangle}{\boldsymbol{e}_i}, \dots, \boldsymbol{a}_n \,| \qquad (6)$$

であり，これを a_{ij} の余因子といふ．

（2）逆行列

行列式の列ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ をその行列の任意の他の列ベクトル $\boldsymbol{a}_k$ で置き換へると，同じ列ベクトル $\boldsymbol{a}_k$ が２つあることになるから，この行列式は０である．これを先ほどの(5)式と同じく展開してみよう．すると

$$\begin{aligned} 0 &= |\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \overset{|j\rangle}{\boldsymbol{a}_k}, \dots, \boldsymbol{a}_n \,| \\ &= |\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \Sigma_i\, \boldsymbol{e}_i\, a_{ik}, \dots, \boldsymbol{a}_n \,| \\ &= \Sigma_i\, |\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{e}_i, \dots, \boldsymbol{a}_n \,|\, a_{ik} \\ &= \Sigma_i\, A_{ij}\, a_{ik} \end{aligned} \qquad (7)$$

である．(5)式と(7)式をまとめると

$$\Sigma_i\, A_{ij}\, a_{ik} = |A|\, \delta_{jk} \qquad (8)$$

となる．これはまさに A の逆行列 A^{-1} が

$$(A^{-1})_{ij} = A_{ji} / |A| \qquad (9)$$

であることを示してゐる．すなはち逆行列は余因子行列の轉置行列を行列式で割つたものに等しい．

（3）Cramer の公式

連立一次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (10)$$

の解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ であるが，この要素は，

$$\begin{aligned} x_i &= \Sigma_j\, (A^{-1})_{ij}\, b_j = \Sigma_j\, A_{ji}\, b_j / |A| \\ &= \Sigma_j\, |\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{e}_j, \dots, \boldsymbol{a}_n \,|\, b_j / |A| \\ &= |\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \Sigma_j\, \boldsymbol{e}_j\, b_j, \dots, \boldsymbol{a}_n \,| / |A| \\ &= |\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \overset{|i\rangle}{\boldsymbol{b}}, \dots, \boldsymbol{a}_n \,| / |A| \end{aligned} \qquad (11)$$

である．これを **Cramer の公式**といふ．

ここで $\boldsymbol{b} = \Sigma_j\, \boldsymbol{e}_j\, b_j$ を用ゐたが，この $\boldsymbol{b}$ は(10)式よりまた，

$$\boldsymbol{b} = \Sigma_j\, \boldsymbol{a}_j\, x_j \qquad (12)$$

とも展開される．そこで(12)式を(11)式の右辺に代入すると，

$$\begin{aligned} &|\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{b}, \dots, \boldsymbol{a}_n \,| / |A| \\ &= |\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \Sigma_j\, \boldsymbol{a}_j\, x_j, \dots, \boldsymbol{a}_n \,| / |A| \\ &= \Sigma_j\, |\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_n \,|\, x_j / |A| \\ &= \Sigma_j\, |A|\, \delta_{ij}\, x_j / |A| = x_i \end{aligned} \qquad (13)$$

となる．これももうひとつの証明である．

（4）積の行列式と行列式の積

行列 A, B の積の行列式 $|AB|$ が各々の行列の行列式の積 $|A|\ |B|$ となることの証明は，やはり列ベクトル表示を用ゐて，(12)式と同様の展開を利用して行なふ．すなはち

$$\begin{aligned} |AB| &= |(\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2 \dots \boldsymbol{a}_n)\, (\boldsymbol{b}_1\, \boldsymbol{b}_2 \dots \boldsymbol{b}_n)| \\ &= |\Sigma_i\, \boldsymbol{a}_i\, b_{i1}, \Sigma_j\, \boldsymbol{a}_j\, b_{j2}, \dots, \Sigma_m\, \boldsymbol{a}_m\, b_{mn}| \\ &= \Sigma_{ij..m}\, |\, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_m \,|\, b_{i1}\, b_{j2} \dots b_{mn} \\ &= \Sigma_{ij..m}\, \mathrm{sgn}(ij...m)\, |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n|\, b_{i1} b_{j2} \dots b_{mn} \\ &= |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n|\, \Sigma_{ij..m}\, \mathrm{sgn}(ij...m)\, b_{i1} b_{j2} \dots b_{mn} \\ &= |A|\, |B| \end{aligned} \qquad (14)$$

と容易に行なへる．(2)式と対比される．

4．おはりに

行列は，演算子を bra および ket ベクトルによつて表示した演算子の影に過ぎないといふ観点が役立つが，行列式の場合はこれではうまくいかない．行列式では列ベクトル表示を軽んじてはならないのである．