「昔のDUALITY」(DUALITYの今昔物語)

お茶の水女子大学理学部物理　菅本晶夫

1　始めに

Higgs機構：モノポールが磁力線でつながっている。
Confinement：クォークが電気力線でつながっている。
電場と磁場の入れ替えが両者を結び付ける。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\varepsilon F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}) = -\frac{1}{2}\mu(\mathbf{H}^2 - \mathbf{D}^2). \quad (1)$$

ここで、εは誘電率（dielectric constant 又はelectric permeability）である。若い人達にはSeiberg-Wittenにならってこれをτと書いた方が解り易いかも知れない。電場と磁場の入れ替えは、媒質に対して$\varepsilon \leftrightarrow -\mu = -\frac{1}{\varepsilon}$を伴う。今風に言うと、モジュラー変換$\tau \leftrightarrow -\frac{1}{\tau}$である。Higgs$\leftrightarrow$confinementを対称的な見方をしたのが't Hooft-Mandelstam Dualityである['t Hooft, Nucl. Phys. B138 (1978) 1; Mandelstam, Phys. Rev. D11 (1975) 3026]。

't Hooftは$SU(N_c)$ゲージ理論において、電気力線を作りだすWilson operator

$A(C,t) = TrP\exp i\oint_C A_\mu(x)dx^\mu$に対して、$B(C',t) \equiv$ 時刻tにC'に添ったmagnetic vortexを作るoperator（"bare soliton"を作るoperator♣）を導入した。
♣その時Mandelstam('75)が(1+1)dim. Sine-Gordon理論において"bare soliton"を作るoperatorを構成した仕事が参考になった：

$$\mathcal{L} = 1/2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \mu^2/\beta^2 : \cos\beta\phi(x,t) : . \quad (2)$$

時刻tにxにgapを持つbare solitonを消すoperator$\equiv \hat{\psi}(x,t)$、を導入するとこれが、$[\hat{\phi}(y), \hat{\psi}(y)] = \theta(x-y)2\pi\beta^{-1}\hat{\psi}(x)$を満たすことがチェックできる。この交換関係を満たすoperatorは2種類見つかって

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp -2\pi\beta^{-1}\int_{-\infty}^{x} dy\left(\dot{\phi} + \frac{\beta}{4\pi}\phi'\right) \\ \exp -2\pi\beta^{-1}\int_{-\infty}^{x} dy\left(\dot{\phi} - \frac{\beta}{4\pi}\phi'\right) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

これがmasive Thirring模型

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(-i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0)\psi + \frac{1}{2}g(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) \quad (4)$$

に従う演算子となる。但し、$g/\pi = 1 - 4\pi/\beta^2$。

ここでの教訓：Bare soliton は空間的に singular な系の対称変換、この例では $\phi \to \phi + 2\pi n \beta^{-1} (n: \text{integer})$ を用いて作られた。このように bare soliton を作る演算子は空間のある場所で場の変数に「飛び」を発生させる。従ってこのような演算子が空間の至る所で値を持てば、もとの変数はあらゆる場所で激しく変化している状態となる。この状態を、もとの変数が一定の値を持つ order 状態に対して、disorder 状態と呼び、bare soliton を作る演算子の期待値を disorder parameter と称する。(今の例では fermion 故期待値はもてないが....)。

さて、ゲージ理論においては、vortex を作りたい場所で singular となるゲージ変換（これが対称変換）を行う。vortex C' の周りをC' に添って1巻き ($\theta = 0 \sim 2\pi$) した時ゲージ変換が $\Omega^{[C']}(\theta = 2\pi) = \Omega^{[C']} e^{2\pi i n/N}$ となったとする。指数関数の因子は $SU(N_c)$ の center Z_N の元（群の構成要素）である。center とは群 $SU(N_c)$ の全ての元と交換するものを集めたもので、当然単位行列に比例する：

$$Z_N = \left\{ \exp \left[\frac{2\pi i n}{N} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & N-1 \end{pmatrix} \right] \right\}_{n=1 \sim N-1} \tag{5}$$

なぜ center の元かと言うと、Ajoint（随伴）表現に属している電場・磁場はゲージ変換において center の元は見ないから、singular な場所以外は電場・磁場を生成しない：$\Omega(x)(\text{center}) F_{\mu\nu}(x) (\text{center})^{-1} \Omega(x)^{-1} = \Omega(x) F_{\mu\nu}(x) \Omega(x)^{-1}$ しかし、このゲージ変換は、C' に添って singular であり、其処で磁束 **B** を作る。今C' を1巻きする閉じた輪Cを考え、それを角θでパラメトライズする。アーベル的に$\Omega^{[C']}(\theta) = e^{i\theta n/N}$と（traceless な generator を除いた部分で）考えれば、ゲージ変換により誘起されるゲージ場は$\Delta A_\mu(x) = \frac{1}{g} \partial_\mu (\theta n/N)$ でこれより、$\int_S dS\mathbf{B} = \oint_C \Delta A_\mu dx^\mu = \frac{2\pi}{g} \frac{n}{N}$。従って、singular なゲージ変換$\Omega^{[C']}(\theta)$ はC' 上に Z_N vortex を作る: $\hat{B}(C', t) \mid A, \phi\rangle \equiv \mid A^{\Omega^{[C']}}, \phi^{\Omega^{[C']}}\rangle$。

ここで次の't Hooft algebra を示すことができる：

$$\hat{A}(C)\hat{B}(C') = \hat{B}(C')\hat{A}(C) \times \begin{cases} e^{2\pi i n/N} & (\text{C と C' が知恵の輪の様に絡む}) \\ 1 & (\text{それ以外}) \end{cases} . \tag{6}$$

証明: $\hat{A}(C)\hat{B}(C') \mid A, \phi\rangle = \hat{A}(C) \mid A^{\Omega[C']}, \phi^{\Omega[C']}\rangle$

$= TrP \exp i \oint_C A_\mu(x)^{\Omega[C']} dx^\mu \mid A^{\Omega[C']}, \phi^{\Omega[C']}\rangle$

$= Tr\{\Omega(2\pi) \left[P \exp i \oint_C A_\mu(x) dx^\mu\right] \Omega(0)^{-1}\} \mid A^{\Omega[C']}, \phi^{\Omega[C']}\rangle$

$= e^{2\pi i n/N} \hat{B}(C')\hat{A}(C) \mid A, \phi\rangle$。

もちろん、$[\hat{A}(C),\hat{A}(C')]=[\hat{B}(C),\hat{B}(C')]=0$ も成り立つ。

$A(C)$ と $B(C')$ との関係が、全く対称的（mirror image と’ t Hooft が言った通り）である。従って、Higgs phase ：$A(C)\sim\alpha_1\exp(-\alpha_2 L(C))$ 及び $B(C')\sim\beta_1\exp(-\beta_2\Sigma(C')$ 　があればそれの、mirror image としての Confinement phase：$A(C)\sim\alpha_1\exp(-\alpha_2\Sigma(C))$ 及び $B(C')\sim\beta_1\exp(-\beta_2 L(C')$ もあることになる。ここで、$L(C)$ と$\Sigma(C)$ とはそれぞれ、輪Cの周囲の長さと囲まれる面積を表し、$L(C)$ と$\Sigma(C)$ が現われたとき、peimeter law や area law と呼ぶ。従って、Higgs phase があれば、Confinement も必ずあることになる。

研究会の後で、坂本眞人さんと野尻伸一さんから次のような事を教わった。’t Hooft algebra を用いるとより積極的に、$A(C)$ と $B(C')$ のどちらか一方（両方のこともある）が area law になる事が示せるという。恐らく両方面積則の場合は、dyon condensation と関係があろうが、超対称性のある場合に、’t Hooft algebra を用いたそのような研究をするのも面白いだろう。

2　Dual Transformation

’t Hooft algebra に対する当時の私の印象は次の通りであった。

これは $[\hat{x},\hat{p}]=i,\ [\hat{x},\hat{x}]=[\hat{p},\hat{p}]=0$ から、$(\Delta p)^2\cdot(\Delta x)^2\geq 1$ が導かれる様に不確定性関係の一種であろう。今の場合は電場が絞られると磁場は絞られないが、逆に磁場が絞られると電場は絞られない。これは $(\Delta\mathbf{E})^2\cdot(\Delta\mathbf{B})^2\geq 1$ であろうから、x 表示から p 表示に移る様なことをすると、一方の理論から他方の理論に移行出来るであろう。従って、一方の理論から他方の理論への移行を Dual（相対） 変換と呼ぶ事にすると、その Dual 変換は、field strength の Fourier 変換であろう。この時、電場・磁場の入れ替えに伴う$\varepsilon\leftrightarrow\mu$がうまく入る。又 disorder operator $\psi(x)$ や $B(C,t)$ を自然に出せるかも知れない。そこで、

$$\exp\left\{i\int d^4x-\frac{1}{4}\varepsilon F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\right\}$$
$$\propto\int\mathcal{D}W^a_{\mu\nu}(x)\exp\left\{i\int d^4x\left[\frac{1}{4}m^2\frac{1}{\varepsilon}W^a_{\mu\nu}W^{a\mu\nu}-\frac{1}{2}m\tilde{W}^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\right]\right\}. \quad (7)$$

なる Dual transformation を行い、もとの変数 A^a_μ を積分してしまう事を考えた。[Ref. (1) A.Sugamoto, Phys.Rev.D19('79)1820; (2) K.Seo, M.Okawa, and A.Sugamoto, Phys. Rev. D19 ('79) 3744; (3) K.Seo and M.Okawa, Phys. Rev. D21 ('80) 1614; (4) K.Seo and A.Sugamoto, Phys. Rev. D24 ('81) 1630.]

Non-Abelian の場合も OK である。ここでは上記の Refs.(1) と (4) に従って、簡

単な Abelian Higgs model の場合を解説する。もとの Action は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi|^2 - V(|\phi|^2). \tag{8}$$

この模型の分配関数において、上の Dual 変換を施し、更に A_μで積分すると次の Dual な模型の分配関数が得られる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\star &= -\frac{m^2}{2e^2|\phi|^2}\frac{1}{2}(V_\mu)^2 - \frac{1}{4}m^2(W_{\mu\nu})^2 + (\partial_\mu|\phi|)^2 - V(|\phi|)\\ &\quad+\frac{1}{2}\frac{2\pi}{e}mW^{\mu\nu}\times\frac{1}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}(\partial^\lambda\partial^\rho - \partial^\rho\partial^\lambda)\chi(x).\end{aligned} \tag{9}$$

ここで、$V_\mu = \partial^\nu\tilde{W}_{\nu\mu}$ は連続の式 $\partial^\mu V_\mu = 0$ を満たす流体の速度ベクトルで $W_{\mu\nu}$は速度ポテンシャルである。これを Kalb-Ramond-南部の相対論的流体力学模型と呼ぼう。私事ながら当時、上記の変換をして得た模型が何を意味するのか自分では解らなかった。幸いにも南部先生の講義を東大本郷で拝聴する機会があり（'78 の春？）自分の計算結果が、流体力学模型であることを知った。最近この種の模型が再発見され、超流動の vortex の運動に応用されている［M. Hatsuda, P. Ao, D.J. Thouless, S. Yahikozawa, Phys. Rev. D49 (1994) 1587; M. Sato and S. Yahikozawa, Nucl. Phys. B436 (1995) 100］。

今、Higgs の phase χが、ある曲線C' の周りをCに添って 1 周したときに $2\pi n$ 変化するような（singular な）配位を取り入れることにしよう。例えばC' が x^3軸に添った直線の場合には、

$\int dx^1dx^2(\partial^1\partial^2 - \partial^2\partial^1)\chi = \int dS\mathrm{rot}(\nabla\chi) = \oint_C \nabla_\mu\chi dx^\mu = \Delta\chi = 2\pi n$。

即ち、$\omega^{03} = \frac{1}{2\pi}(\partial^1\partial^2 - \partial^2\partial^1)\chi = n\delta(x^1)\delta(x^2) = n\int dy^0dy^3\delta^{(4)}(x-y)$。

従って、一般に vortex の world sheet を $y^\mu(\tau,\sigma)$ とパラメトライズすれば、

$$\omega^{\mu\nu}(x) = n\int d\tau d\sigma\frac{\partial(y^\mu,y^\nu)}{\partial(\tau,\sigma)}\delta^{(4)}(x-y(\tau,\sigma)). \tag{10}$$

これから自然に vortex の world sheet と Kalb-Ramond 場とのカップリングが導ける。その相互作用の action への寄与は

$$e^{i\int_S d\sigma^{\mu\nu}\frac{1}{2}\frac{2\pi}{e}mW_{\mu\nu}} \tag{11}$$

である。今述べた方法は、bare soliton を導入してそれと Kalb-Ramond 場とのカップリングを求める一般的な方法である。従って、string 理論の bare soliton である D-brane と string 場との相互作用を求めるのにも有効であろう。これは次章で議論しよう。

さて、古典的な荷電粒子と電磁場との相互作用は、action に $e^{i\int_C dx^\mu eA_\mu(x)}$なる寄与をする。古典的な粒子が、幾つかの closed paths を描く可能性を全部足し合わせ

ると、荷電粒子の対生成とそれに引き続き起こる対消滅を任意回数取り入れることになって、電磁場と相互作用する電荷を持つ粒子の場の理論、即ち charged Higgs model が得られる。同様のことが、vortex の world sheets の「形の足し上げ」で実行できる。この場合は closed vortex の対生成とそれに引き続き起きる対消滅を取り入れたいので、vortex がいくつかの torus を作った場合の寄与を足し上げる。今、closed paths, C_1 と C_2 とを面積 A の膜でつないでこの膜に外場として Kalb-Ramond 場をカップルさせた場合を考えて分配関数への寄与を求める。Eq.(11) を重みとして、C_1, C_2, A を固定して得られる膜の" あらゆる" 形の足し上げを実行したものを $K(C_1, C_2; A)$ としよう。但し当時（'80）は、膜の変形としては一辺 a の四角い変形のみを考慮し、C_2の変形が C_1 や C_2に影響を及ぼすような場合は考えなかったので、不完全であろう。今では、三角形分割を用いて膜の変形を正確に評価できるようになって来たので、川合光氏等が量子重力において開発した新しい手法を取り入れる必要性を感じる。そうすると重力場とのカップリングも入るかも知れない。しかし大雑把な振る舞いを考える場合には昔風も役立つかも知れない。さてこのKは次の拡散方程式を昔風では満たす。$\frac{\partial}{\partial \bar{A}} K(C_1, C_2; \bar{A}) = \hat{H}_{C_2} K(C_1, C_2; \bar{A})$ 但し、$a^2 \bar{A} = A$ で a はカットオフと考える。これを用いると形の足し上げが実行できて、次の dual な action が得られる：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\star &= \sum_C \Psi[C]^\dagger \hat{H}_C \Psi[C] \\ &= \sum_C \left\{ -\left(\oint_C dx_t\right)^{-1} \oint_C dx_t \left| \left(\frac{\delta}{\delta\sigma^{\mu t}} - i\frac{2\pi}{e} m W_{\mu t}\right) \Psi[C] \right|^2 - M_0^2 \left| \Psi[C] \right|^2 \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで $M_0^2 = [1 - 2(D-1)]/a^4 < 0$ は kinetic 項がない事の反映で形の足し上げによる entropy 効果を表す（$D = 4$)。

注意：Higgs の期待値 $\langle|\phi|\rangle^2$ は、Higgs 模型では A_μの mass を与え、dual な流体力学模型では $\nabla \times (\frac{m^2}{2e^2\langle|\phi|\rangle^2}\mathbf{V}) \propto \omega_{ext}$となり、渦の近くの流速を強める働きをする。これに対して string 場の凝縮 $\langle\Psi[C]\rangle^2$は、dual な流体模型では Kalb-Ramond 場の mass を増やし $m^2 \to m^2(1+\psi_S)$、もとの Higgs 模型では誘電率 $\varepsilon = 1 + \psi_S$を与えて $\nabla\cdot(\varepsilon\mathbf{E}) \propto \rho_{ext}$外部電荷の近くに電束を集中させる。なお$\psi_S(x)$は点 x を通る string 場の存在確率、即ち string 凝縮の order parameter を表す：$\psi_S(x) \equiv 4(\frac{2\pi}{e})^2 \sum_{C(\ni x)} \langle|\Psi[C]|^2\rangle / a^3 \oint_C dx_t$ この$\psi_S(x)$ に対する effective potential を Coleman-Weinberg 流に計算することが出来る。その結果は、

$$\begin{aligned} V(\psi_S) &= \frac{1}{(4\pi)^2}[(-20e^2\Lambda^4 + \frac{3}{2}\Lambda^2 m^2)\psi_S \\ &\quad -\frac{3}{4}m^4\psi_S^2 \ln(\frac{\Lambda^2}{m^2}) + \frac{3}{4}m^4(1+\psi_S)^2\ln(1+\psi_S)]. \end{aligned} \quad (13)$$

この手法は D-brane の有効作用を作るときに役立つかも知れない。昔は strong coupling での Quark の閉じ込めとは、Quark 間の linear potential を導出する事であった。今は何故 Quark 間のポテンシャルを計算しないで Confinement が起こったというのか、私には理解できない。そこで参考のために昔流の Quark 間のポテンシャルの計算方法を紹介しよう。

外部電荷が入った時にはガウスの法則は $\nabla\cdot\mathbf{D}=[\delta^{(3)}(\mathbf{x}+\frac{\ell}{2})-\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\frac{\ell}{2})]$ となる。但し $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ で、誘電率εは string の凝縮で小さくなる：$\varepsilon=(1+\psi_S)^{-1}$この現象は dual Higgs 機構（Kalb-Ramond 場の質量生成機構）と互いに Fourier 変換でつながっている：$-\frac{1}{4}\varepsilon F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\leftrightarrow-\frac{1}{4}\frac{1}{\varepsilon}W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}$。さて、Quark-anti-Quark 間のポテンシャルは

$$V_{Q\bar{Q}}(\ell)=\int d^3x[\frac{1}{2}(1+\psi_S)\mathbf{D}^2+V(\psi_S)] \tag{14}$$

を最小にする $\mathbf{D}$ とψ_S の配位を求めればよい。まず effective potential にψ_S^2項が現われるので $V(\psi_S)=c_e\psi_S+d\psi_S^2$但し $c_e=-20e^2\Lambda^4+\frac{3}{2}m^2$として良かろう。強結合では$\psi_S$の一次の係数が負になって $\langle\psi_S\rangle\neq 0$ (super) となるが、$\mathbf{D}^2$ もψ_Sの一次の係数にきくので、$\mathbf{D}^2$ が大きくなると $\langle\psi_S\rangle=0$ (normal) となる。これが、電束が狭い normal 領域を作ってひも状に流れる原因 (dual Meissner effect) となる。電束の直径をw長さを ℓとするならば、

$$V_{Q\bar{Q}}(\ell)\sim\min_{w}\pi w^2\ell\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{Q}{\pi w^2}\right)^2+\frac{c_e}{4d}\right\}\sim\frac{Q^2}{\pi w_{min}^2}\times\ell. \tag{15}$$

この仮定の下では linear potential になったが、別の仮定、即ちクォーク間にクーロン的な力が働いたとした場合のポテンシャルも計算する必要がある。両者の比較の後にポテンシャルが小さい方が実現する。今の場合は、距離が小さいときは linear potential で、ある距離を越えると Coulomb 的になって、クォークが飛び出す模型になっていた。詳細は文献（4）K.Seo and A.Sugamoto('81) を参照されたい。

3　D-brane への応用

次に、string とカップルする Kalb-Ramond 場の理論に昔の dual 変換をしてみよう。最近string 理論の soliton が発見され（J.Polchinski('95))、これを用いて string 理論の Dality が盛んに議論されている。弦の振動モードには自由端と固定端があるのは高校生でも知っている。自由端の境界条件を Neumann B.C. といい、固定端の境界条件を Dirichlet B.C. という。固定端の string 理論が余り研究されなかった理由は、固定端にするためは、例えば太鼓の胴体の様な容器が必要だからである。最近はこの容器に相当する拡がりのある物体を、Dirichlet B.C. の D を冠して「D-brane」

と呼んで積極的に取り入れ始めたのである。下記の図の様に、D-brane 内部では動きうるがそれから離れられない様な固定端をもつ open string が、2枚のD-brane をつないでいたとする。両固定端がD-brane 内を1周して1ループ振幅を作ったとしよう。これは別の見方をすると、一方のD-brane から closed string が放出され、これがやがて他方のD-brane に吸収される確率を表す。従って、D-brane とは、closed string のある種のモードを放出・吸収する源 (source) であって、しかも string の soliton になっているという。これは正に、もとの理論の bare soliton を構成し、それとカップルする Kalb-Ramond 理論を作った昔の Duality の考えの延長線上にある。したがって、今度は先程の vortex の場の理論である、string とカップルする Kalb-Ramond 理論から出発する。時空の次元は string らしく D=10 としよう。

$$S=\sum_C\sum_{x(\ni C)}\left|\left(\frac{\delta}{\delta\sigma^{t\mu}(x)}-iA_{t\mu}(x)\right)\Psi[C]\right|^2+\sum_x-\frac{\varepsilon}{2\cdot 3!}F_{\mu\nu\lambda}F^{\mu\nu\lambda}-V(|\Psi[C]|^2), \tag{16}$$

ここで $F_{\mu\nu\lambda}=\partial_\mu A_{\nu\lambda}+\partial_\nu A_{\lambda\mu}+\partial_\lambda A_{\mu\nu}$ は4次元の場合には流体の速度ベクトル V^μ と書き直せたものである。ここでは Kalb-Ramond 場は massless とした。このときには、string 理論のゲージ対称性である、Kalb-Ramond symmetry がある。即ち、

$$\begin{aligned}\Psi[C] &\to \Psi'[C]=e^{i\oint_C dx^t A_t(x)}\Psi[C],\\ A_{\mu\nu}(x) &\to A'_{\mu\nu}(x)=A_{\mu\nu}(x)+\partial_\mu\Lambda_\nu(x)-\partial_\nu\Lambda_\mu(x).\end{aligned} \tag{17}$$

昔流の dual 変換

$$\begin{aligned}&\exp\left\{i\int d^{10}x-\frac{\varepsilon}{2\cdot 3!}F_{\mu\nu\lambda}F^{\mu\nu\lambda}\right\}\\ \propto\ &\int \mathcal{D}W_{\mu_1\cdots\mu_7}(x)\\ \exp\ &\left\{i\int d^{10}x\left[\frac{1}{2\cdot 7!}\frac{1}{\varepsilon}W_{\mu_1\cdots\mu_7}W^{\mu_1\cdots\mu_7}-\frac{1}{7!3!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{10}}W_{\mu_1\cdots\mu_7}F^{\mu_8\mu_9\mu_{10}}\right]\right\}\end{aligned} \tag{18}$$

をして、もとの $A_{\mu\nu}(x)$ で積分してしまう。やはり以前のように、$\Psi[C]=|\Psi[C]|e^{i\chi[C]}$ とすれば、dual な action は

$$\begin{aligned}S^\star\ =\ &\sum_C\left(\frac{\delta|\Psi[C]|}{\delta\sigma^{t\mu}(x)}\right)^2+\sum_{C(\ni x)}|\Psi[C]|^2\left(\frac{\delta\chi}{\delta\sigma^{t\mu}(x)}\right)^2-\frac{\left(\sum_C|\Psi[C]|^2\frac{\delta\chi}{\delta\sigma^{t\mu}(x)}\right)^2}{\sum_C|\Psi[C]|^2}\\ &-\frac{1}{8\cdot 8!(7!)^2}\frac{1}{\sum_{C(\ni x)}|\Psi[C]|^2}F_{\mu_1\cdots\mu_8}F^{\mu_1\cdots\mu_8}\\ &-\frac{1}{7!2}\partial_\nu\left(\frac{-\frac{i}{2}\sum_{C(\ni x)}\Psi[C]^\dagger\overleftrightarrow{\frac{\delta}{\delta\sigma^{\mu t}(x)}}\Psi[C]}{\sum_{C(\ni x)}|\Psi[C]|^2}\right)\epsilon^{12\cdots\nu\mu t}\times W_{12\cdots 7}.\end{aligned} \tag{19}$$

最後の項は、大雑把に$\sum_x \frac{1}{2}\sum_C \oint_C dx^t \frac{\delta^2\chi[C]}{\delta\sigma^{\nu t}(x)\delta\sigma^{\mu t}(x)}\epsilon^{1,\cdots,7\nu\mu t}\times\frac{1}{7!}W_{1,\cdots,7}(x)$ となり、閉じた輪C上で定義されたstring の波動汎関数の phase の singularity を抜き出す。

今、閉じた輪Cが一点から膨らんでいって、2次元球の表面S^2を覆った後に、縮んでもとの一点に戻るとしよう (Hopf fibration)。この時のχの変化を $2\pi n$ [n:integer] としよう。すると

$$2\pi n = \iint_{S^2}\frac{\delta\chi[C]}{\delta\sigma^{\mu t}}dx^\mu dx^t \tag{20}$$

である。ここでStokes の定理（？）を用いるとS^2を縮めて行った中心にsingulaity がある事が解る。[研究会では、閉じた輪Cがある点の周りを一周した時に現われる torus T^2を用いたが、S^2を用いた、この議論の方が良いと思う。]

したがって、$\oint_C dx^t \frac{\delta^2\chi[C]}{\delta\sigma^{\mu t}(x)\delta\sigma^{\nu t}(x)} = 2\pi n\delta(x^\mu-y^\mu)\delta(x^\nu-y^\nu)\delta(x^t-y^t)$ となる。その singularity は１０次元時空において3個のデルタ関数で特徴付けられた、7次元の面を作る。即ち Eq.(18) の最終項は変形されて、

$$\pi\sum_{\text{7dim.worldsurface}}\int\frac{1}{7!}d\sigma_{S_7}^{\mu_1\cdots\mu_7}W_{\mu_1\cdots\mu_7}(x). \tag{21}$$

これは、昔の duality においてお馴染みのカップリングである。

更に、この string 波動汎関数$\Psi[C]$ の phase が singular となる7次元の世界面の「形の足し上げ」を実行すると、出発点の、Kalb-Ramond 場と相互作用する string 理論は、次の dual な理論へと移行する。

$$\begin{aligned} S^\star \;=\; & \sum_x -\frac{1}{8\cdot 8!(7!)^2}\frac{1}{\sum_{C(\ni x)}|\Psi[C]|^2}F_{\mu_1\cdots\mu_7}F^{\mu_1\cdots\mu_7} \\ & +\sum_{S_6}\sum_x\left|\left(\frac{\delta}{\delta\sigma^{\mu t_1\cdots t_6}(x)}-W_{\mu t_1\cdots t_6}(x)\right)\Psi[S_6]\right|^2 \\ & +\cdots. \end{aligned} \tag{22}$$

これは6-brane (S_6) がそのゲージ場 $W_{\mu_1\cdots\mu_7}$と相互作用する Kalb-Ramond 場の理論となり、昔の duality の自然な拡張になっている。同様にして、次の dual な対応が得られる。(但し、n-brane とは n-dimensionally extended object の事である。)

$$\begin{array}{lcll} \text{0-brane} & \to & \text{7-brane} & (=\text{6-branes をつなぐ vortex}) \\ \text{1-brane} & \to & \text{6-brane} & (=\text{5-branes をつなぐ vortex}) \\ \text{2-brane} & \to & \text{5-brane} & (=\text{4-branes をつなぐ vortex}) \\ \text{3-brane} & \to & \text{4-brane} & (=\text{3-branes をつなぐ vortex}) \end{array} \tag{23}$$

今述べた方法は、dual 変換をしたときに monopole をつなぐ vortex の理論へと導く方法である。従って monopole を用いて dual な理論を構成しようとすると、1次元

下がったbrane理論となろう。このように通常stringの人達が言っているdualな対応関係から1次元ずれている理由付は、8月末に開かれた中部夏の学校での石橋延幸氏による御指摘に負っている。

4 Non-Abelian Dual Transformation

始めに述べたように、Dual変換は非可換ゲージ理論の場合にも適用可能である。$SU(2)$ゲージ理論において、1) Higgs tripletを2個導入したvortexを作る模型[前出の(2) K.Seo, M.Okawa, and A.Sugamoto ('79)]、2) Higgs Triplet 1個を持つ、monopoleを作る模型、及び$SU(2)$ pure Y-M理論[前出の(3) K.Seo and M.Okawa]等で実行されている。

特に、瀬尾一大川による pure Y-M 理論の dual 変換は非常に美しい。これらの模型では、dualな模型として、Freedman による Kalb-Ramond-Nambu 模型のNon-Abelian版が現われた:

$$\mathcal{L}^{\star} = -\frac{1}{2}\left(\frac{m}{e}\right)^2 \left(V^{a,\mu} - \frac{e}{m}j^{a,\mu}\right) M^{ab}_{\mu\nu} \left(V^{b,\nu} - \frac{e}{m}j^{b,\nu}\right) - \frac{1}{4}m^2 (W^a_{\mu\nu})^2 + \cdots . \tag{24}$$

但し、$V^a_\mu = \partial^\mu \tilde{W}^a_{\nu\mu}$はnon-Abelian流体の速度ベクトル、カレント$j^{a,\mu}$は模型によって決まっており、$M^{ab}_{\mu\nu} \equiv (K^{ab}_{\mu\nu})^{-1}$は、もとの理論におけるゲージ場の2次の係数$K^{ab}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{i-thHiggs}(\phi_i^\dagger T_i^{\{a}T_i^{b\}}\phi_i)g_{\mu\nu} - \frac{m}{e}\epsilon^{abc}\tilde{W}^c_{\mu\nu}$の逆行列として求まる。この時のKalb-Ramond変換

$$W^a_{\mu\nu} \to W^a_{\mu\nu} + \nabla^{ab}_\mu \Lambda^b_\nu - \nabla^{ab}_\nu \Lambda^b_\mu, \ \ \nabla^{ab}_\mu = \delta^{ab}\partial_\mu + \frac{m}{e}\epsilon^{acb}P^c_\mu \tag{25}$$

の下で、第一項$\frac{1}{2}V^{a\mu}M^{ab}_{\mu\nu}V^{b\nu}$は不変になる。共変微分に現われるゲージ場$P^a_\mu(x)$はdualなゲージ場であるが、複雑な形をしている:$\hat{P}^a_\mu(x) = M^{ab}_{\mu\nu}(\phi, W)V^{d,\nu}$しかし運動方程式においては、$-(\frac{m}{e})^2[\partial_\mu \hat{P}^a_\nu - \partial_\nu \hat{P}^a_\mu + \frac{m}{e}\epsilon^{abc}\hat{P}^b_\mu \hat{P}^c_\nu] = m^2 \tilde{W}^a_{\mu\nu}$となり、自然なdualゲージ場として振る舞う。更にFreedman-Townsendの仕事が出て[Nucl. Phys. B177 (1981) 282]、non-linear sigma modelと関係が付いた。例えば、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}m^2 (A^a_\mu)^2 - 2m\tilde{W}^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}. \tag{26}$$

において$W^a_{\mu\nu}$の運動方程式を解くと、$F^a_{\mu\nu} = 0$が得られ、この解は$t^a A^a_\mu = \frac{1}{ig}U\partial_\mu U^{-1}$。これを元のactionに代入するとNon-linear sigma model:

$$\mathcal{L} = -\frac{m^2}{g^2}Tr(\partial_\mu U^{-1}\partial^\mu U) \tag{27}$$

が得られる。彼らは更に進んでsupersymmetric non-linear sigma modelも考えた。詳細は原論文を参照して下さい。

5 Membrane or (n-1)-Dimensionally Extended Objects

今は(n-1) = pとして、p-braneと呼ばれているが、昔のわれわれは(n-1)-dimensionally extended objectsと呼んでいた。この(n-1)-dimensionally extended objectsのactionとしては、

（1）Nambu-type action：

$$S_{(1)} \propto \text{world volume} \propto \int d^n\xi \sqrt{\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial(x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_n})}{\partial(\xi_1\cdots\xi_n)}\right)^2} \tag{28}$$

ここで、$(\xi_1\cdots\xi_n)$ はworld volumeのparametrization。Jacobianを南部に倣って、

$$\{x_{\mu_1},\cdots,x_{\mu_n}\} \equiv \frac{\partial(x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_n})}{\partial(\xi_1\cdots\xi_n)} \equiv p_{\mu_1,\cdots,\mu_n} \tag{29}$$

と書こう。あるいは、

（2）Gravity-like action:

$$S_{(2)} \propto \int d^n\xi\sqrt{g(x)}\{(1-\frac{n}{2})+\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a x^\mu(\xi)\partial_b x_\mu(\xi)\} \tag{30}$$

等が考えられる [cf. A.Sugamoto, Nucl. Phys. B215 ('83) 381]。私事ながら、この私の論文は主として膜を取り扱ったので「Theory of Membranes」としたが、今風に言うと「Theory of p-branes」でもあった。もちろん弦理論の拡張に興味があったのだが、内心は細胞分裂の理論を目指していた。その論文の中で更に2～3の膜の模型を構成している。その一つに、

（3）extra parameterを用いるactionがある:

これは南部のアイデアから出発したもので、$(\xi_1,\cdots,\xi_n;\phi_1,\cdots,\phi_{D-n}) \equiv (x_1,\cdots,x_D)$と、余分にパラメーター$\phi_1,\cdots,\phi_{D-n}$を加えて全空間を覆うことにする。その時action $\mathcal{L}^*(\phi_1(x),\cdots,\phi_{D-n}(x))$ は、その運動方程式の解で$\phi_1(x),\cdots,\phi_{D-n}(x) =$ constantsとおいて求まるn次元のmanifoldが、(n-1)次元に拡がった物体の力学から決められたworld volumeに一致する様なものである。$D=4$で$n=3$(即ち$p=2$)の場合には余分に一つscalar場を導入すればよく、

$$\mathcal{L} \propto \sqrt{(\partial_\mu\phi)^2} \tag{31}$$

であった。この私の書いたactionは最近、Jens Hoppe氏により再発見された[M.Brodemann and J.Hoppe, Phys. Lett. B325 ('94) 359; J.Hoppe, preprint

YITP/K-1069('94)]。この action を得るときに次の式を用いる：

$$p_{\mu_1,\cdots,\mu_n} \equiv \frac{\partial(x_1,\cdots,x_D)}{\partial(\xi_1,\cdots,\xi_n,\phi_1,\cdots,\phi_{D-n})}\frac{\partial(\phi_1,\cdots,\phi_{D-n})}{\partial(x_{\nu_1},\cdots,x_{\nu_{D-n}})} \times \varepsilon_{\mu_1,\cdots,\mu_n,\nu_1,\cdots,\nu_{D-n}} \tag{32}$$

更に次の模型も今後有用であろう。

（4）Hamilton-Jacobi 形式：

これも南部のアイデアに拠ったものである。膜理論に彼の方法を適用してみると、action の変分を 3-form としなければならない：

$$\sum_{m=1,2} dS_m \wedge dT_m \wedge dU_m = \sum p_{\mu\nu\lambda} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda - H d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge d\xi_3. \tag{33}$$

これは通常の $dS = pdx - Hdt$ の拡張である。この時、膜理論の運動方程式は

$$\{x^\mu, x^\nu, x^\lambda\} = \frac{\partial H}{\partial p_{\mu\nu\lambda}}, \tag{34}$$

$$\sum_{\nu>\lambda}\{p_{\mu\nu\lambda}, x^\nu, x^\lambda\} = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu}. \tag{35}$$

この方法は時間発展のパラメーターを $d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge d\xi_3$に取る理論である。string の場合は $d\xi_1 \wedge d\xi_2 = d\tau \wedge d\sigma$を時間発展のパラメーターとすることに当たる。従ってこのような見方をすると、modular 変換$\tau \to -\frac{1}{\tau}$あるいは T-duality: $\tau \leftrightarrow \sigma$ がξ_1とξ_2に関する $d\xi_1 \wedge d\xi_2$を不変にする discrete 変換として自然に理解される。membrane や p-brane に関して、T-duality とは何かは、興味のある問題である。[私事ながら、第33回原子核三者若手夏の学校('87) において Heterotic String Theory に関して講義をした事がある。その時提出した幾つかの問題の一つに Problem 5「modular 不変に似た概念を膜やもっと高次元に広がった物体の loop 振幅に拡張できるか。」がある。このような問題を考える際に、$(\xi_1,\cdots,\xi_{p+1})$ の discrete な入れ換えで $d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_{p+1}$ を不変にする変換を、南部の Hamilton-Jacobi 形式で考慮するのは面白いやり方だと思われる。

6 Gravity and Dual Meissner Effect

これは、topological 2-form gravity と言われる action が$\int d^4x \tilde{B}^{AB}_{\mu\nu} R^{AB\mu\nu}$ である模型から出発する。この模型は昔風に言うと、ゲージ群を $SO(4)$ とした場合の non-Abelian dual 変換の Fourier 変換部分$\int d^4x \tilde{W}^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$ に過ぎない。この模型が Kalb-Ramond 変換不変であることは自明であろう。この Kalb-Ramond 変換不変性を、string 場を導入し string 場の凝縮（dual Meissner 効果）を用いて、破ろう

という試みである。破ればEinstein重力になる。研究会ではこの問題に関してもかなり詳しく述べたが、ここでは紙数が尽きそうなので、次の論文を参照していただくことにしよう。[M.Katsuki, H.Kubotani, S.Nojiri, and A.Sugmoto, Mod. Phys. Lett A10 (1995) 2143; M.Katsuki, S.Nojiri, and A.Sugmoto, Int. J. Mod. Phys. A11 (1996) 3033]

7 Duallty between Microorganism's Swimming and String -Membrane Theory

Kalb-Ramond-Nambuの相対論的流体力学は、弦や膜変数とカップルする流体力学模型である。われわれは最近、微生物の遊泳問題を微生物の表面 $X^\mu(t;\xi_1,\cdots,\xi_n)$ を、閉じた弦（$n=1$：空間2次元の時）あるいは膜（$n=2$：空間3次元の時）と見なして、これが外部流体の速度ベクトル場 $v^\mu(x)$ とカップルすると考えて、弦や膜理論の言葉で微生物の運動を議論した。微生物が小さい時には、その運動方程式は、

$$\nabla\mathbf{v}=0,\ \ \Delta v_\mu=\frac{1}{\mu}\partial_\mu p,\ \ v^\mu(\vec{X}(t;\xi))=\dot{X}^\mu(t;\xi). \tag{36}$$

ここで p は流体の圧力、μ は流体の粘性係数である。この運動方程式を出すactionは

$$\begin{aligned}\hat{S}_N &= \sum_{i=1}^{N}\int dt\int d^{D-1}\xi_{(i)}P_\mu^{(i)}(t;\xi_{(i)})\left[\dot{X}_{(i)}^\mu(t;\xi_{(i)})-v^\mu(X_{(i)})\right]\\ &\quad -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^Dx\left[\frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}-\frac{1}{\mu}p(x)\partial_\mu v^\mu\right].\end{aligned} \tag{37}$$

ここで、$\omega_{\mu\nu}=\partial_\mu v_\nu-\partial_\nu v_\mu$ は渦度（vorticity）を表し $P_\mu^{(i)}$ はLagrange multiplierである。粘性による流体からのentropy発生率から統計力学における分配関数の重みを求めて上のactionと比較すると、$\frac{1}{4\pi\alpha'}=\frac{\mu t^*}{k_BT}$、と決まる。ここで t^* は遊泳運動の周期である。この理論は速度ベクトルをゲージ場と見なした時、Landau gaugeのQEDと同じである。従って、微生物の遊泳問題は、Kalb-Ramond-Nambuの流体力学、即ち

$$\mathcal{L}^*=-\frac{1}{2}(V^\mu)^2-kW_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} \tag{38}$$

で速度ベクトルが $V^\mu=\partial^\mu\tilde{W}_{\nu\mu}$ と言った模型よりも寧ろ、stringにカップルする $U(1)$ ゲージ場の理論の方と近い関係にある。しかし、このstringにカップルする $U(1)$ ゲージ場の理論は

$$S^*=\sum_{i=1}^{N}\int dt\int d\xi_{(i)}^{D-1}\dot{X}_{(i)}^\mu(t;\xi)v^\mu(X_{(i)})-(\text{ Landau gauge QED}). \tag{39}$$

となり、微生物の遊泳模型に現われる微生物の表面を表す弦・膜変数と速度ベクトルとのカップリングと異なっている。

速度ベクトル v^μ が $\dot{X}^\mu(t;\xi)$ にカップルするのが、普通の弦・膜理論である。一方、微生物の遊泳では v^μ が $P^\mu(t;\xi)$ にカップルする。この $\dot{X}^\mu$ と P^μ とは互いに Fourier 変換でつながり dual な関係にある。従って $U(1)$ ゲージ場とカップルする弦・膜理論と微生物の遊泳理論とはある意味で dual な関係にある。例えば Casimir energy が前者では紫外領域から来るが、後者では赤外領域から出るし、又なるべく細かい振動モードを重ねた方が遊泳効率が上がる事も、普通の弦・膜の低エネルギーの（効率の良い）振動パターンと異なっている（dual?)。詳しくは以下の文献を参照下さい：[M. Kawamura, A. Sugamoto and S. Nojiri, Mod. Phys. Lett. **A9**, 1159 (1994);S. Nojiri, M. Kawamura and A. Sugamoto, Phys. Lett **B343**, 181 (1995); S. Nojiri, M. Kawamura and A. Sugamoto, "Collective motion of micro-organisms from field theoretical viewpoint", preprint NDA-FP-21, OCHA-PP-65, hep-th/9508112, to be published in Mod. Phys. Lett. **A**; M. Kawamura, "Efficiency of swimming of micro-organism and singularity in shape space", preprint, OCHA-PP-71, hep-th/9601156 to be published in Mod. Phys. Lett. **A** ; E. Elizalde, S.D. Odintsov, S. Nojiri, M. Kawamura and A. Sugamoto, "Quantum effects of stringy and membranic nature for the swimming of micro-organisms in a fluid", preprint, CEAB95/9-13, NDA-FP-22, OCHA-PP-66 (1995), hep-th/9511167, to be published in Int. J. Mod. Phys. **A**.

8 Conclusion

（１）昔の Duality も役立つかも知れない。（２）今の Duality をこの研究会で勉強してからにしよう。

Acknoledgements

この研究会で話をする機会を与えて下さった、坂本眞人さん始め世話人の方々に感謝致します。前半部分は１５年～２０年前の仕事に基づいていますが、その時 duality に情熱をもって取り組み一緒に研究した瀬尾幸市さん、大川正典さんに、心から感謝致します。又後半部分に関しては最近数年間の研究に基づいていますが、これらの仕事に貢献して頂いた、野尻伸一さん、川村昌子さん、香月深雪さん、窪谷浩人さん、オディントフさん、エリザルデさんに感謝いたします。