数学

発展方程式

古谷　希世子　/　FURUYA, Kiyoko

自然·応用科学系　/ 理学部数学科

http://researchers.ao.ocha.ac.jp/6696849479.html

■研究者情報

連絡先

Email: furuya.kiyoko@ocha.ac.jp／TEL: 03-5978-5296／FAX:03-5978-5295

専門分野

数学、 函数方程式論

数学

■研究成果情報

シュレディンガー方程式に対する経路積分

キーワード

発展方程式、ベクトル値測度、ファイマンの経路積分、関数空間

研究内容

■概要（背景・目的・内容）

背景：ファインマンの経路積分は 無限次元空間での条件収束はするが絶対収束はしない広義積分の一種であるため、測度では表現できない こと はよく知られている。しかし、現実には物理の世界、特に量子力学の分野でファインマンの経路積分は重要な位置を占めている。従って『測度』によるファインマンの経路積分の数学的な定式化は、数学者のみならず物理学者にとっても意義があるであろう。実際物理学の立場から次のような意見が寄せられている。
『物理学者は証明が厳密でなくても、物理的な直観に照らして正当（と感じられる）ならば充分であり、そのうち数学の得意な人が ちゃんとした証明をして くれる と期待している訳です。』

目的：Ⅰ.『測度』即ちベクトル値の無限次元空間上の一般化された測度という概念を導入し, シュレディンガー方程式を経路積分によって『測度』を用いて表現する。
Ⅱ.『測度』で積分可能になるシュレディンガー方程式のポテンシャルの性質を研究する。非線型半群 の理論を応用し特異点を持つ場合などの具体的な条件を求める。

■プロセス・潜在可能性

シュレディンガー方程式の解をファインマンの経路積分により バナッハ空間上の『量子測度』（一般化された測度:連続微分可能関数全体の空間の相対空間）を用いたルベーグ積分の かたちで表現する。

一般に特異点のあるポテンシャルを持つシュレディンガー方程式の解は積分表現出来ない。
これを『量子測度』を用いてルベーグ積分の形で表現したときに積分可能になる、ポテンシャル の性質を研究する。特にクーロンポテンシャルのように物理学で重要なものを含むようにする。

$\mathbb{R}^N$ でのシュレディンガー方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = i\triangle u(t,x) - iU(t,x)u(t,x), \quad u(0,x) = \varphi(x), \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$$

の解をファインマンの経路積分の形

$$u(t,x) = \int_{\Omega_{[0,t]}} e^{-i\int_0^t U(\tau,\gamma(\tau))d\tau}\varphi(\gamma(0))d\mu(\gamma), \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}).$$

で構成する。ここで　γ は　$\mathbb{R}^N$ 上の経路、$U \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N\backslash\mathcal{N},\mathbb{R})$ は特異点を持つポテンシャルである。

特許・著作物等の知財情報、製品化情報、あるいは社会貢献実績

・2010年5月、RIMS（京都大学数理解析研究所）での共同研究「経路積分と超局所解析の入門」において、サーベイレクチャー「シュレディンガー方程式に対する経路積分−ベクトル値の経路積分を考える.」を講演。
・2011年8月、国際会議:NACA2011（第7回非線形解析と凸解析）において招待講演、海外の研究者とのディスカッションなどを行う.

産学官・社会連携の可能性

■学術コミュニティへの貢献