水道方式による数の指導について

——とくに幼児の場合——

新田倫義

(一)

“算数に強くなる”が一種のブームになっているといわれる。“水道方式”という一見算数とどのような関係があるのかわからないような奇妙な名前の方式がその中心をなしている。これは一体どういう方式なのか。どうしてこんな名前がつけられたのか。そして今われわれが関心をもっている幼児の数の指導ということについては、どのようなやり方をとるのだろうか。

それには先ず“水道方式”をおしすすめている数学教育協議会（略して数教協）の人たちの基本的な考え方がどういうものかについてみてゆくのがよいだろう。その基本的な考え方としてあげられるのは次の三つのものである。（本稿末尾の文献4、P.73）

①数概念と演算の分離

②筆算を計算の主体とし、筆算の形式を尊重して一般から特殊の順で指導する。

③暗算より先に筆算を教える。

(二)

今までのやり方だと、たとえば100以下の二数を加えて100以上の数を作るという計算をとおして扱う数の範囲を200まで拡張する、というように、数範囲の拡張を計算と結びつけて行なう方法をとった。この方法だと指導体系が複雑になる。たとえばたし算ならたし算の指導をするにしても数範囲が限られているので低学年では扱えない

部分がでてくる。それはまた上へ行って数範囲を拡げながらつけ加える。子どもの方ではどれだけのことをやるのがたし算なのか全体として統一して理解することが難しいといったことがある。といった困難を除くために、数教協では数概念と計算とを分離して、はじめに数の構造を理解させ、数概念の基礎を築いた上で、すじみちの立った計算体系によって計算の指導を行なう、という方法をとることになった。(注) 先にあげた②と③はこの計算体系の指導の原則である。次の節ではこれについてみてゆこう。

ところで、計算に先立って数概念の基礎を築くことが要求されるのであるから、幼児の数の指導というときこの点が最も重要な問題となる。これについては第四節以下で考えてゆくことにしよう。

(注) 数概念と計算体系とを分離するということは、考えの上ではそうであっても、実際の指導においては、特に数をはじめて取扱う幼児の段階では、なかなか難しい問題である。

(三)

従来のやり方では、暗算をやると数概念を養うことができる、日常生活に役に立つ、というような考え方から暗算を重視し、最初は専ら暗算の指導を行ない、桁数が大きくなって暗算では扱いきれなくなってから筆算に移る、という方法をとっていた。これに対し、水道方式では、途中から筆算に移るのは筆算でやる方がやさしいからであるのに、それをはじめに教えないでおくのはおかしい。それに暗算の典型的な方式は頭加法といって、上の桁から計算してゆくやり方だが、これによると指導体系が複雑なものになってしまう、と批判し、計算のルールが簡単で、結果の確認もしやすい、要するに暗算よりもやさしい、筆算の指導を暗算よりも先に行なうことにした。そして筆算が計算の主体であり、それが十分にできるようになったときに、筆算式のやり方で暗算ができるようになってくるならば、それはちっともかまわないし、むしろよいことだと考えている。

ところで計算というのは、一種のゲームのようなものだ。野球でも将棋でもトランプでもそれぞれいくつかの基本的なルールがあって、それらの組合せによってゲームがすすめられてゆく。この定められた形式に従わなければゲームはすすめられない。それと同じように、計算では、ある数が与えられたとき、これにある定められた規則によって順々にあるいくつかの基本的手続を施し、その結果としてある数をとり出すのである。つまり計算は、そのもとになる要素的な最も単純な過程に分解できる。この計算のもとになる基本的手続、すなわち要素的な計算過程を水道方式では素過程と名づける。複雑な計算は、この素過程を組合せた複合過程ということになる。たとえばⅢ位数＋Ⅲ位数のたし算は、位ごとに分けてⅠ位数＋

Ⅰ位数のたし算という素過程が組合された複合過程である。

水道方式ではこの素過程は、その計算が成立つわけについてよく理解させた後で、練習を重ね、反射的に答の出せる位にまでもってゆく。そうなればこれは暗算であるが、計算の基礎になる暗算という意味で基礎暗算とよばれて、一般の暗算とは区別される。幼児の数の指導でいえば、たし算と引き算の基礎暗算をやることになるが、これについてはあとでのべよう。

複合過程を教えてゆく場合は、先ず素過程の組合せによって作られる複合過程を考え、その中で同じ性質をもつものをまとめていくつかの型に分ける。考えられるすべての型のうち最も典型的な型の複合過程をえらび出して最初にこれを教える。これが十分理解できてから次第に典型的でない複合過程に及んでゆく。たとえばⅢ位数＋Ⅲ位数のたし算では、たす数にもたされる数にもどの位にも0でない数字があり、しかもどの位にも繰上りのない $\begin{array}{r}222\\+222\\\hline\end{array}$ のような型が典型であり、一番やさしい型である。これがすんでから0が一か所にあるもの、二か所にあるものへすすんでゆく。

水道方式ではこのように先ず基本的な要素に分解した後、これを綜合してゆく方法をとる。そして綜合された複合過程の中では典型的な一般的な複合過程を先ずよく理解させておいてから漸次に典型的でない複合過程に及ぼして指導すると、子どもはより広い見晴しのきく地点に立って全体を見わたすことになるので分りやすく、典型的でない特殊な複合過程も容易に理解することができる。このような一般→特殊という指導体系は、都市の水道設備において、谷川から水源地に集った水が、管によって導かれ、次第に枝分れして各家庭の蛇口に至るのに似ている、というので、水道方式という名前がつけられた。谷川は素過程、水源地は一般的な複合過程、蛇口が特殊な複合過程に当るというわけだ。

(四)

以上で水道方式の計算体系に関する原則を概観したので、次に数概念についてみてゆこう。水道方式の特色は、数の「集合数」としての性質を強調すること、及び位取りの原理によって数を構造化することである。

「集合数」というのは、集合（すなわちもののあつまり）の大きさ、または多さ、をあらわす数、ということである。数にはこの他に、ものの順序をあらわす「順序数」がある。従来は最初に「いち、に、さん……」または「ひとつ、ふたつ、みっつ……」とかぞえさせることから始まったが、これは数をあらわすことば、数詞を、順番にとなえるだけであって、歌の丸暗記である。そのため10個のおはじきをならべてかぞえさせると、右からかぞえたときは10こ、左からかぞえたときは11こというような誤りをしても平気でいるような

子どもが５歳児でも６歳児でもいる。これは数を唱えられるだけで、集合の大きさということが分っていないためだとして、集合数の理解の必要性を強調するのである。

風呂に入って「十までかぞえたら出ることにしようね。一、二、三、四……」などとやるのは数の順序の全くの丸暗記であろうが、おはじきをかぞえたりする場合は、かぞえて行って「全部でいくつ」という問に対し、唱えた最後の数詞をあげることができるなら、集合数の概念ができて順序数の概念と結びついていることの一つの目安になると考えてよいだろう。野呂氏のしらべた幼稚園では四歳児で七六％、五歳児で九〇％の者がこの段階に達していたというから、(注) 従来のやり方でも集合数の理解がある面ではできていないわけではない。しかしおはじきを二群に分けても、或いは二群を合せても、または順序を変えても数は変らないことが分っているのは表のような割であった。これは集合数の基本的な性質である。にもかかわらずその理解は極めて弱いものといわざるをえない。したがって集合数の指導をしっかりやる必要がある。

		４歳	５歳
分けても数は変らない		８％	12.5％
あわせても数は変らない		８％	25％
順序をかえても数はかわらない	すぐに	52％	20.8％
	かぞえてから	32％	70.8％

（注）野呂正「幼児の数観念の発達」教育心理学研究九巻（一九六一）第四号、二三三頁、二三七頁

位取りの原理というのは、たとえば423というとき一番右の数字は１の位の数、２番目の数字は10の位の数、３番目の数字は100の位の数をあらわす、という具合に10ずつ束ねて位取りがきめられていて、それぞれの位には０から９までの数字のどれかをおくことによって、どんな数でも記すことができる、というやり方である。この場合０はある位に数がないことを示すという極めて重要な役割を果している。これがなかったら、位取り記数法は成立たない。

水道方式では、この数概念を指導するのに便利な教具として「タイル」を使う。これは紙なり板なりで作られた一辺３㎝位（小学生では一辺一㎝でよい）の正方形であって、10個あわせれば１ポンの棒になり、棒を10ポンあわせれば１マイの板になるといった具合に、数の10進構造をよくあらわしており、また量感をそのまま保存している。そして、具体物の集りから数を抽象してくることから、記数法や計算の指導にまで一貫して使える利点がある。位ごとに別の色をつけた色板は、どの位がどの色ということも、量感もピンと来ないし、計算棒・おはじきなどは、10ずつの束、100ずつの束がうまく

まとまったものにはならない。お金も両替という手続がいる。タイルは水道方式によって始められたものではなく、ずっと昔からあったではないかという人もいるが、指導体系の中に織込んで活用の仕方を明らかにした功績はみとめるべきであろう。

(五)

それでは、幼児に数の指導をするのにどんな手順がとられているか。これに関しては小川純一郎氏の報告があり、幼児向け絵本としては「かずのほん(1)(2)」が出されているし、最近では「水道方式による幼児の数の導き方」が出版されているので、これらに従ってみてゆこう。(本稿末尾の文献参照)

その大すじは次のようなものである。

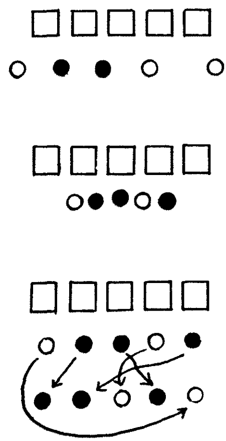
(1)集合作り
(2)集合の大きさの比較、一対一対応
(3)推移律
(4)類別と数詞、数字の導入
(5)個物・タイル・数詞の結びつけ
(6)数えることと物指タイル
(7)タイルによる5までのたし算・引き算
(8)10までの数の導入
(9)順序数の導入
(10)筆算の形による5までのたし算・引き算
(11)0の導入とそのたし算・引き算
(12)位取りの原理による10以上の数の導入
(13)10までの数のたし算・引き算

(1)集合作り

木の葉を集める、積木を集める、などある共通な特性をもったものを集めること、および逆に、「この箱の中にあるのは?」「ミルク壜の蓋」、「表を通っているのは?」「遠足の子どもたち」のようにある集まりに共通な特性をとり出すこと、などを通して、集合、即ちある共通な特性をもったものの集りがあること、を理解させる。「数える」ということは、数えられる要素がある共通性をもっていることを前提とするから、このようにものの集りについてはっきりおさえておくことは適切であろう。

(2)集合の大きさの比較・一対一対応

数には集合の大きさをあらわす性質があるが、単独で集合の大きさといっても何のことか分らない。他の集合とくらべることによってはじめて明らかになる。この比較の手続が両集合から1個ずつ対にしてならべてゆく一対一対応の手続である。このようにして残りがでた方が大きい、または多い、どちらにも残りがでないときは同じ大きさということをはっきりさせる。



このとき、くらべるべき二つの集合で要素の間隔を離したり、近づけたり、または順序を変えたりしても、集合の大きさは変らない、ということを、一対一対応をとおしてしっかり身につけさせねばならない。従来はこの点の指導が欠けていた。水道方式では、この際いろいろな集合をタイルの集合と対応させて、右のようなことを行ない、タイルに個物の集合の多さを象徴させることがよいとしている。

(3) 推移律

a、b、c、をそれぞれ、集合A、B、Cの大きさとするとき、$a=b$, $b=c$ ならば $a=c$ となり、$a>b$, $b>c$ ならば $a>c$ となるように、aとb、bとcの関係がきまるとaとcの関係もきまることをいう。この推移律は子ども自身によっては発見されることがないが、3種類以上のものの集合の大きさをくらべ、それらが皆同じだということから数が抽象されて来るのだから、この比較を可能にする推移律を教えなければならない、とされている。

三集合間の大小関係を考えると、表のように九種類がある。このうち①、⑨、⑤は先にあげたものだが、その他にも②・⑥・④・⑧のように推移律の成立つ場合と③・⑦のように成立たない場合がある。水道方式では、成立つ場合のうちでは①・⑨・⑤を主として取上げ、その他は④についてふれた程度である。成立ない場合については全然ふれていない。成立つ場合をはっきりさせるためには成立たない場合にもふれる必要があるだろう。また①・⑨・⑤以外の成立つ場合にもふれておいた方がよいのではないだろうか。ただそれらをここでもちこんだ方がよいか、またはもっとあとにした方がよいかは、実験にもとづいてきめられるべきであろう。

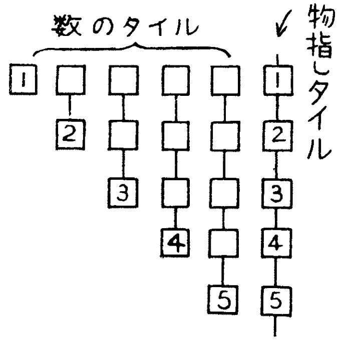
a，b，c 間の大小関係

	a, b の関係	b, c の関係	a, c の関係
①・	$a>b$,	$b>c$ →	$a>c$
②△	$a>b$,	$b=c$ →	$a>c$
③	$a>b$,	$b<c$	×
④☆	$a=b$,	$b>c$ →	$a>c$
⑤	$a=b$,	$b=c$ →	$a=c$
⑥△	$a=b$,	$b<c$ →	$a<c$
⑦	$a<b$,	$b>c$	×
⑧☆	$a<b$,	$b=c$ →	$a<c$
⑨・	$a<b$,	$b<c$ →	$a<c$

同じ印をつけた行どうしは，一方のa，b，c 3者の関係が，他方のc，b，a 3者の関係と同じになっている。

(4) 類別と数詞・数字の導入

図のような5までの「数のタイル」を作り、そのそれぞれの前にそれと同じ大きさの個物の集合をあつめさせる。そしてそれぞれの



数のタイルの前に集った集合の大きさは皆それぞれ同じであることを確認させ、この集りの大きさを1、2、…ということ、及びそれをあらわす数字を教える。またこれら集りの大きさをまとめて数ということも教える。そして、タイルに指をあてながら1, 2, 3, 4, 5をいわせ、それになれて来たらタイルを図のように順にならべ、1に1こふえると2、2に1こふえると3…ということを指さして数を唱えながら示して、1こずつだんだんにふえてゆく数の系列の中での前後関係が分るようにする。

(5)個物・タイル・数詞の結びつけ

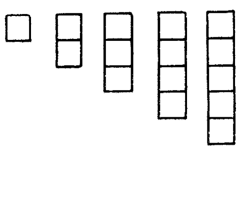
個物とタイルと数詞の相互の間の結びつきをくりかえし強化する。即ち数詞をいってタイルを取り出す。タイルを出して数詞をいう。個物にタイルをあてはめ、その数をいう。次には個物にタイルをあてないで、頭の中におもいうかべながら数をいう。いわれた数の集合を作る。

(6)数えることと物指しタイル

今までは1から5までの5種類のタイルを使ったが、これをもっと簡単に一本にまとめた「物指タイル」を使う。数のタイルとならべて、それぞれの数のタイルに対応するところに数字1, 2, …5が書いてあることを教え、これを物の集合にあてがって一対一に対応させながら数をよんでゆき、対応している最後の数でその個物の集合の大きさをあらわすことを教える。次に物指タイルを使わないで頭の中におもいうかべながら、個物に指をあてて1, 2…と唱えながら個物の集合の系列の終まで来て、そのとき最後に唱えた数詞でその個物の集合の大きさをあらわすようにする。これがかぞえるということである。

(7)タイルによる5までのたし算、引き算

数のタイルの紐をとってタイル同志をくっつけた長方形のタイルを作り、これをくっつけたり、鋏で切離したりしながら、一つの集合に他の集合が加わる添加、二つの集合が同時に合さって一つになる合併、一つの集合のうちある部分が除かれて残りを求める除去、



一つの集合を二つの部分に分けてしまう分解などの事例について練

習させる。

(8)10までの数の導入

5のタイルに1のタイルを足して6、5のタイルに2のタイルを足して7、…という具合にして10までの数を導入し、その範囲で(4)〜(6)のようにして数の系列の中での前後関係、数詞・個物・タイルの結びつけ、数えること、などをやっておく。

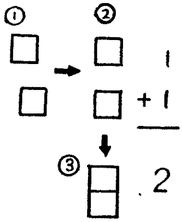
(9)順序数の導入

数は1こずつ増すように1，2，…とうまく系列を作ってならんでいるからこれを利用する。そして個物をどのような系列に従って順序づけるかをはっきり指定し、この順序に従って数えたとき指定された個物までの集合の大きさを見出させ、その数でその個物の順番を定めることを教える。

このように先に集合数としての数を十分に理解させておいてから、それと結びつける形で順序数を導入する方法をとるので、集合数の理解がこれによって妨げられることはないであろう。

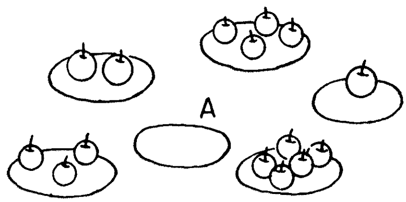
(10)筆算の形による5までのたし算・ひき算

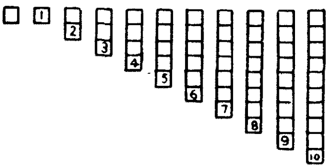
先にやったタイルを使っての5までのたし算、引き算に筆算の形を結びつけて、縦書きの式を読んで計算できるようにする。特に6〜10の計算の準備として和が5になるたし算と5からの引き算をよくやっておく。

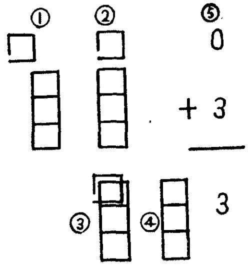


(11)0の導入と、そのたし算・引き算

図のように個物（例えばみかん）を皿にのせ、Aの皿だけ1こものせないでおく。各皿にのっている個数をきいてゆき、Aの皿には1こものっていない、そのとき0こという。1こもないとき0ということを教え、タイルは針金で作った正方形の枠だけのものを使うことにする。この0を1〜10と関連づけるため、図のようにタイルをならべ、0，1，2……，10の系列を作り、(8)でやったようにして大小関係を明らかにする。



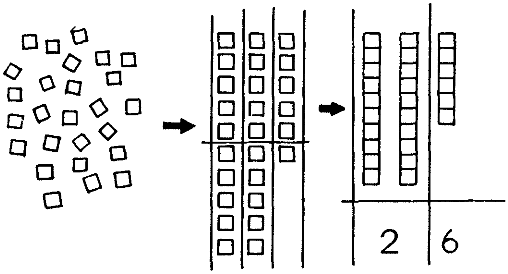




次に0の入る計算を

$\begin{array}{r}0\\+\square\\\hline\end{array}$、$\begin{array}{r}\square\\+0\\\hline\end{array}$、$\begin{array}{r}0\\+0\\\hline\end{array}$、$\begin{array}{r}0\\-\square\\\hline\end{array}$、$\begin{array}{r}\square\\-0\\\hline\end{array}$、$\begin{array}{r}0\\-0\\\hline\end{array}$

の順で入れる。例えば $\begin{array}{r}0\\+3\\\hline\end{array}$ では、0に3をつぎ足したいが、0のタイルはタイルが1個もないから、このように重ねられる③。これは3のタイルと同じだ、0に3たすとやはり3になる、というような説明をする。0を加えてもひいても数の大きさは変らないことが分ればあとはすぐできるという。



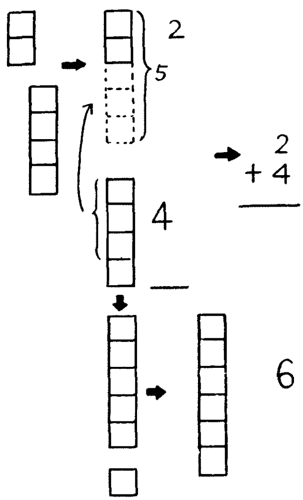
⑿位取りの原理による10以上の数の導入

タイルの集合を、10こずつあつめて図のように整理し、10こずつの組が2こと、残り6このようにならべる。これを10のタイル2こと6のタイル1ことにおきかえ、この個数を数字でかきあらわすと26となる。右側の数字は1のタイルの個数、左側の数字は10のタイルの個数を示す。「にじゅうろく」とよみ、「にじゅう」は10のタイルが2個、「ろく」は1のタイルが6個あることを示す。10、20、…の右側の0は1のタイルが0こであることを示す。などの説明によって位取り記数法を教え、99までの数を導入する。そして、タイルによる数の表現と数字と数詞との3者相互を結びつける練習をさせる。

更にこの拡張された数範囲について、かぞえることによって集合の大きさを求めることと、順番をきめることの練習をさせる。

⒀10までの数のたし算・ひき算

たし算は4以下の数のたし算、5以上の数と他の数との間のたし算、引き算は引く数も差も4以下となるひき算、引く数か差の少なくも一方が5以上になるひき算という型に分けて、タイルを使って指導する。たとえば $\begin{array}{r}2\\+4\\\hline\end{array}$ は答が5以上になるので、前にやった計算ではできないことをいう。次に2のタイルに4のタイルをたす。5



は2と3だから、4のタイルから3だけまわし、2とあわせて5を作る。このとき4のタイルは4から3とって1残る。従って5と1のタイルができるから、これをあわせて6となる。

以上の数の指導は4歳頃から始めて小学校入学前にすましてしまおうというのが、水道方式の人たちのプログラムである。

このプログラムにおいては、0と位取りの原理が導入されないうちに既に10が使われていることが形式上はおかしいということ、推移律に関して先にあげたようなこと、更には子どもにとっては0を発見することは困難であろうが、0を教えられれば理解が困難ではないことから考えて、このプログラムの中でももう少し早い段階で導入してもよいのではないかと思われること、など、二、三の点を除いては概ね妥当なプログラムであろう。4歳頃は数に興味をもちはじめている時期であり、それから二年あまりでこれだけの事を指導するというのであれば、時間をかけてゆっくりすすめることができよう。

おとなにとっては分りきった概念であっても、子どもは分らない。分るためには、これこれの基礎的な事項や概念が分っていなければならない。それらが分るためには、更にその前に分っていなければならないことがある。子どもはこのようなひとつながりの概念や事項を何段階にもわたってだんだんと高度に抽象したり結合したりして漸く或る概念に到達するのである。指導はそのつながりを明らかにした上で、一つ一つ段階をふんですすめられなければならない。

紙面が限られていて極めてあらましをのべたに止ったが、興味のある方は、次のような文献に当ってみられるとよい。

＜文　献＞

○水道方式全般について

1、遠山啓「教師のための数学入門（数量編）」一九六〇年　国土社

2、遠山啓・銀林浩「水道方式による計算体系」一九六一年　明治図書

3、長妻克亘、渡辺幸信「水道方式の授業」一九六一年　明治図書

4、遠山啓・中谷太郎「算数の系統学習」一九六一年　国土社

5、毎日新聞社「算数に強くなる」一九六二年

○幼児の数の指導について

6、小川純一郎「小学校低・中学年の数量」数学教室No.89（1961年）1431—1451.

7、遠山啓・横地清「かずのほん(1)、(2)」一九六一年　童心社

8、横地清「水道方式による幼児の数の導きかた」一九六二年　国土社

＊　＊

（国立教育研究所）