二項係数を含む交代和とベータ関数
ー 本校ＳＳＨ数理・情報科学分野の話題から ー

吉田　裕亮

令和 4 年度の本校ＳＳＨ課題研究Ｉの数理・情報科学分野のある研究課題において, 二項係数の交代和に関連する等式が議論されている. 本稿では, 同等式がベータ関数を用いて一般化することが可能であることを述べる. 内容的には, ほぼ定義を書き換えたものに過ぎないがベータ関数の応用例のひとつとして備忘を兼ねて, 本稿を記すことにした.

< キーワード > ＳＳＨ課題研究　数理・情報科学分野　二項係数を含む等式　ベータ関数・ガンマ関数

1. 二項係数を含む交代和の等式

本校のＳＳＨでは, 学校設定教科「課題研究」を設置し，第 2 学年に「課題研究Ｉ」(必修，3 単位) を設定している. 文系・理系の 8 分野にわたって, 生徒自身が課題を策定し, 主体的に研究を進めている. 令和 4 年度の数理・情報科学分野の課題研究に n 次元超球の体積に関するテーマを扱い, その中で以下のような二項係数を含む交代和の等式を導いている. また本等式は, 生徒自身が発見的に導いたものであり, その導出の過程も興味深い.

その等式は以下のようなものである. すなわち, 自然数 n に対して,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{{}_nC_k}{2k+1}=\frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1}\times\cdots\times\frac{4}{5}\,\frac{2}{3} \tag{1}$$

である. なお, 右辺は, 二重階乗あるいは階乗を用いて

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \tag{2}$$

と表わされるので,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{{}_nC_k}{2k+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \tag{3}$$

が導出された等式となる. 上の式 (1) が導出されるのは, 三角関数の冪 $\cos^n x$ を積分する際であり, 実はこれが上の等式の証明を与えることに相当する.

実際, 自然数 n に対して, 定積分

$$I_n=\int_0^1\left(1-t^2\right)^n\mathrm{d}t \tag{4}$$

を考えよう. この定積分は, 被積分関数を二項定理を用いて展開し, 項別積分することで, 式 (1) の左辺になることは容易に分かる. すなわち

$$I_n=\int_0^1\left\{\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k(-t^2)^k\right\}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_nC_k\left(\int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t\right)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{{}_nC_k}{2k+1} \tag{5}$$

である. また部分積分法を 1 回施すことにより, 定積分 I_n に関する漸化式

$$I_n=\frac{2n}{2n+1}\,I_{n-1} \tag{6}$$

が得られるので, 初期値 $I_1=\dfrac{2}{3}$ より 式 (1) の右辺も直ちに導かれる. 部分積分法を 1 回施すことにより得られる等式なので, 適当な誘導を行えば, 高等学校の数学の範囲に収めることも可能とも考えられるため, この等式に関連した大学入試問題も過去に幾つか出題されているようでもある. 本稿では, この等式 (3) がベータ関数を用いて少し一般化することが可能であることをみる.

2. ガンマ関数とベータ関数

ガンマ関数 Γ とベータ関数 B は, 大学初学年の微積分学の講義に現われる特殊関数であり, 様々に応用される関数でもある.

ガンマ関数 Γ は, $x>0$ に対し,

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \tag{7}$$

と定義される. なお変数 x は複素領域に拡張可能であるが, 本稿では正の実数の範囲で十分である. ガンマ関数の重要な性質は

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \tag{8}$$

であり, これより自然数 n について $\Gamma\big(n+1\big)=n!$ となり, 上のガンマ関数は階乗の正の実数への拡張と考えられる.

またベータ関数 B は, $x>0,\ \ y>0$ に対して

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \tag{9}$$

と定義され, ガンマ関数と

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{10}$$

の関係がある. 本稿で用いるガンマ関数 Γ とベータ関数 B の性質は上記のみであり, ほとんど定義そのものといえる. 次節では, これらを用いて, 等式 (3) の拡張を考えよう.

3. 一般化された二項係数を含む交代和の等式

自然数 n, m に対して, 定積分

$$J_{n,m}=\int_0^1 \big(1-t^m\big)^n\,\mathrm{d}t \tag{11}$$

を考える. この被積分関数を二項定理を用いて展開し項別積分を行うと 式 (5) と同様に

$$J_{n,m}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{{}_nC_k}{mk+1} \tag{12}$$

となる. また $J_{n,m}$ において $s=t^m$ と変数変換し置換積分を行うと

$$J_{n,m}=\int_0^1 \big(1-s\big)^n\frac{1}{m}s^{\frac{1}{m}-1}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{m}\int_0^1 s^{\frac{1}{m}-1}\big(1-s\big)^{(n+1)-1}\,\mathrm{d}s \tag{13}$$

となり, $J_{n,m}$ はベータ関数を用いて表わされ

$$J_{n,m}=\frac{1}{m}\,\mathrm{B}\Big(\frac{1}{m},n+1\Big)=\frac{\Gamma\Big(\frac{1}{m}\Big)\Gamma\big(n+1\big)}{m\,\Gamma\Big(n+1+\frac{1}{m}\Big)} \tag{14}$$

となる. ここでガンマ関数の性質 式 (8) を用いると

$$\Gamma\Big(n+1+\frac{1}{m}\Big)=\Big(n+\frac{1}{m}\Big)\Big(n-1+\frac{1}{m}\Big)\cdots\Big(1+\frac{1}{m}\Big)\,\frac{1}{m}\,\Gamma\Big(\frac{1}{m}\Big) \tag{15}$$

となるので,

$$J_{n,m}=\frac{n!}{\Big(n+\frac{1}{m}\Big)\Big(n-1+\frac{1}{m}\Big)\cdots\Big(1+\frac{1}{m}\Big)}=\frac{m^n\,n!}{(mn+1)\big(m(n-1)+1\big)\cdots\big(m+1\big)} \tag{16}$$

となる. m 重階乗 ($m-1$ 飛びの整数積) を $\overbrace{!!\cdots!}^{m}=!_{(m)}$ と表記すると

$$J_{n,m}=\frac{(mn)!_{(m)}}{(mn+1)!_{(m)}} \tag{17}$$

と与えられる. したがって 式 (12) と 式 (17) より, 少し一般化された等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{{}_nC_k}{mk+1} = \frac{(mn)!_{(m)}}{(mn+1)!_{(m)}} \tag{18}$$

が得られる. もちろん $m=2$ が, 最初に挙げた生徒が導出した等式に相当する.

この定積分をベータ関数で表わす方法により, 更に等式 (18) を一般化することも可能である. すなわち, 自然数 n, m, j ($j<m$) に対して, 定積分

$$K_{n,m,j} = \int_0^1 t^{j-1}\left(1-t^m\right)^n \mathrm{d}t \tag{19}$$

を考えると, 二項定理の項別積分により

$$K_{n,m,j} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{{}_nC_k}{mk+j} \tag{20}$$

となり, $s=t^m$ の置換積分で

$$K_{n,m,j} = \frac{1}{m}\int_0^1 s^{\frac{j}{m}-1}\left(1-s\right)^{(n+1)-1}\mathrm{d}s = \frac{1}{m}\,\mathrm{B}\left(\frac{j}{m}, n+1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{j}{m}\right)\Gamma\left(n+1\right)}{m\,\Gamma\left(n+1+\frac{j}{m}\right)} \tag{21}$$

となることは, 先と同様である. また,

$$\Gamma\left(n+1+\frac{j}{m}\right) = \left(n+\frac{j}{m}\right)\left(n-1+\frac{j}{m}\right)\cdots\left(1+\frac{j}{m}\right)\frac{j}{m}\,\Gamma\left(\frac{j}{m}\right) \tag{22}$$

なので,

$$K_{n,m,j} = \frac{m^n\,n!}{j\left(mn+j\right)\left(m(n-1)+j\right)\cdots\left(m+j\right)} \tag{24}$$

となる. 式 (20) と 式 (24) から等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{{}_nC_k}{mk+j} = \frac{(mn)!_{(m)}}{j\,(mn+j)!_{(m)}} \tag{25}$$

が得られる. これが本稿で述べたかった 式 (3) の一般化された等式である.

4. むすびに

本稿で述べた一般化は, 自然数の制限を外して正の実数に変えたり, 一般化二項係数を考えたりすることで, さらに拡張可能ではあるが, ここではできれば高校生が背伸びをして理解できるような組合せ論的な範囲で試みた. ＳＳＨの課題研究で, 生徒たちが興味関心のある分野で, どれくらい背伸びを見せてくれるかは, 今後とても楽しみでもある.