1次元ボーズ粒子系に現れる量子ダークソリトンの制御: 量子ソリトンと古典ソリトンの比較

氏名　　金城　佳世

本論文は、リープ・リニガー模型に現れる量子ダークソリトン状態と、それに対応する非線形シュレーディンガー方程式の古典ソリトンについての研究成果をまとめたものである。量子ダークソリトン状態とは、リープ・リニガー模型の固有状態の重ね合わせによって構成される量子状態のことをさす。量子ソリトンに対する古典の対応物として、古典ソリトンとここでは呼ぶが、特に、周期境界条件を満たすソリトンは、ギャップソリトンとして知られている。

従来の研究では、量子ダークソリトン状態の密度プロファイルが古典ソリトンの密度プロファイルとよく一致するということ、さらに、量子ダークソリトン状態の場の演算子の行列要素の位相プロファイルも、古典ソリトンの位相部分と一致するということが知られていた。また、これまでは量子ダーク1ソリトン状態の中でも、位相についての巻きつき数が J=0 の場合の量子ダーク1ソリトン状態のみが研究されていた。

本来、相互作用する量子多体系は、一次元系でさえも解析が困難である。これまでよく研究されてきたテーマとして、調和振動子のポテンシャルなど様々な形のポテンシャルの下で、平均場近似を施し、量子状態がボーズ・アインシュタイン凝縮のように形成するソリトンについての数値シミュレーションなどが挙げられる。一方で、厳密な計算手法を用いて、量子状態及びその密度プロファイルなどの量を理解しようとする研究は少ない。したがって、量子ダークソリトン状態の研究は、今後、量子状態を理解する上で重要な意味を持つ。

本論文では、量子ダークソリトン状態の性質を明らかにすることを目的とし、巻きつき数 J=1,2 の場合の量子ダーク1ソリトン状態、量子ダーク2ソリトン状態の構成方法と、それらに対応する古典ソリトンとの関係、及び古典ソリトンの構成方法について議論していく。

まず、第2章では、ソリトンの構成方法の1つとして知られている逆散乱法を紹介する。この章は、後の第3章の代数幾何的方法をより直観的に理解することを助ける。代数幾何的方法とは、古典ソリトンとしてのギャップソリトンの構成方法である。これは、超楕円曲線上で逆散乱問題を解くことを意味するが、理解のためには高度なリーマン面の理論の知識を要し、物理学分野で代数幾何的方法を用いられた例は数少ない。さらに数学分野では、代数幾何的方法を用いるにあたって必要な量は具体的に計算されていない。このことも物理学分野で代数幾何的方法が実際に用いられない原因の1つとなっている。本論文の第3章では、このことを解決するために、具体例を用いながらリーマン面の理論の解説を行い、代数幾何的方法については、具体的な計算方法を示した。

第4章では古典の非線形シュレーディンガー方程式のソリトンにおけるソリトンとギャップソリトンとの関連を示した。まず、代数幾何的方法から得られるリーマン面の種数が g=1 の場合のギャップソリトンと、非線型シュレーディンガー方程式を直接積分することで得られる、ヤコビの楕円関数で表される古典ソリトンが等価であることを示した。さらに、逆散乱法と代数幾何的方法の2通りの方法で構成された解の間の関連を見出した。代数幾何的方法において、リーマン面を縮退することでソリトンが得られることはこれまでに示されているが、逆散乱法と代数幾何的方法との関連については、詳しく議論されてこなかった。この第4章の内容は、計算ソフトウェアの発展によって関数のプロットが容易になった昨今では、再び重要となる内容になると予想される。

第５章では、巻きつき数 J=1,2 の場合の量子ダーク１ソリトン状態と、量子ダーク２ソリトン状態について議論する。量子ダークソリトン状態を構成するために、リープ・リニガー模型の固有状態を用いるが、この固有状態は、一連のベーテ量子数のセットにおいて、非占有状態を作る、すなわち、ホールを作ることで得られる。ベーテ量子数のセットをエネルギーが高くなるように配位すると、巻きつき数 J も上がっていくということを明らかにした。

量子ダーク２ソリトン状態は、ベーテ量子数のセットから２つホールを作ることで得られる固有状態の重ね合わせによって構成されることが分かった。さらに、適切なガウシアンの重みを量子ダーク２ソリトン状態に適用することによって、深さの異なる量子ダーク２ソリトンを構成することに成功した。この量子ダーク２ソリトンの位相プロファイルを詳細に解析することにより、J=0 と J=1 のソリトンが２つ局在していることが分かった。