

[研究論文]

ケプラーと多声音楽 —協和音程としての3,6度の受け入れ—

當間 亜紀子

1. はじめに

ヨハネス・ケプラー (Johannes Kepler 1571-1630) はその著書『世界の調和』 (*Harmonice Mundi* 1619) 全5巻の中で、人間の音楽にも見られる調和的な比 (Harmoniae proportio) を用いて、宇宙全体の調和を説明しようと試みている。天体の音楽ともいべきこの調和論自体は長い伝統を持っているが、ケプラーの調和論にはいくつかの新しい点が見られ、WALKER, D. P. は ‘Kepler’s Celestial Music’ (1978) の中で、その独特な点を以下の5つにまとめている。

①現実には聽こえない。(一方で、中世における天体の音楽は、形而上学的で最終的には純粹に文学のテーマになっていくものか、もしくは様々な理由によりとても例外的な人々のみ聽くことのできる音楽とされている)

②多声的である。(ピュタゴラスからツァルリーノまでの天体の音楽は、音階のみから構成されている)

③純正律^{注1}において、3度や6度の協和を持っている。(初期の体系は主にピュタゴラス学派の調音を採用しており、最も小さな協和は4度である)

④諸協和は、円の中に刻まれた諸正多角形によって幾何学的に決定づけられる。(初期の理論家は音楽的な音程を、数的比率から算術的に引き出している)

⑤太陽に中心が置かれ、太陽から知覚されるものとなっている。(地球中心の宇宙観との対比)

(WALKER : 34-35)。

このうち、諸協和の決定については、以前筆者も着目し、*Harmonice mundi*の第3巻を釈義することでその過程を明らかにしてきたと考える(當間: 2009)。そこで本稿では、協和決定の過程同様、音楽理論の分野として馴染み深く、しかしこの時代には画期的であつただろうと思われる、②多声的であるということ、③3度や6度の協和を持っていること、の2項目に焦点を当て、主に前述の Walker の論文と、*Harmonice mundi* 第3巻を参考に、それらに対するケプラー自身の考えを探っていきたい。

2. 多声音楽と3,6度

まず、ケプラーは多声音楽のことを、古代の人々には知られていない現代の発明であり、音楽の並外れた驚くべき前進であるとして、とても好意的に捉えているようである (Walker : 38-39, フィールド : 77)。世界の調和論の集大成である *Harmonice mundi* 第5巻の中でも、ケプラーは天体の音楽として、諸惑星同士の多声音楽 (その近日点・遠日点における最大最少速度を用いたもの)

を見出しており、それ故に多声音楽は、世界の機構の中にも見出せる、神の与えた幾何学的調和の原型からの所産であるとされている（フィールド：76-77）。

また、垂直的にも長三和音が支配的・中心的位置を占めてくるようになった多声音楽において、3度及び6度は欠かせない要素であり、これらの音程に協和としての地位を確立させる必要性も出てきたと考えられる。実際、ピュタゴラスの採用してきた調音方法では3度はあまり耳に心地よいものではなかったため^{注2}、ケプラーは聴覚が心地よいと判断する4:5, 5:6の2つの比についても長短3度の協和^{注3}として認めるべく、その根拠を探していたのではないだろうか。

結果として、ケプラーは3, 6度の協和についても多声音楽についても、事物の始まり以前から存在し、いわば神自身ともいえる幾何学の中にその起源を見出すことに成功し、両者を自然のものとして論じている（WALKER：38-39）。つまりケプラーにとって両者は神の精神における原型に一致しており、それはまた神の表象である人間の精神にも存在するもの、として正当化できるのである。

3. 協和としての3, 6度の受け入れ

3-1. 協和の原型

Harmonice Mundi 第3巻第2章において、ケプラーは円に作図可能な正則図形を内接させ、その図形が円から切り取る弦の長さと円周全体の比を用いて協和を決定する方法を提唱している。つまり、定規とコンパスのみから作図できる直径・正三角形・正方形・正五角形と、それらの辺の数を連続的に倍加させた図形を協和の原型（causae consonantiarum）として用いて、円周全体を分割し、7つの協和を導きだす方法である。ここで、前述の正五角形までの図形を使うと表1に示すような比が見出せる【表1】。

まず、これらの図形によって、オクターブ内の7つの協和のうち、短3, 6度と長6度以外のものを選び出すことができる。そしてその後、長6度（3:5）については、正五角形の辺を利用して、円を2と3の部分に分割することで、残りの短3度（5:6）・短6度（5:8）についても、ここに挙げられた正則図形の比を連続的に倍加させた図形（つまり正三角形の倍加によって得られる正六角形と正方形の倍加によって得られる正八角形）を用いることで、協和として見つけ出すことができる。

ただし、ここで正八角形を用いることによってある問題が生じてくる。つまり、正八角形を用いた分割のうち、3と5という比への分割は協和と認められるのに、何故1と7への分割は協和に加えられないのか、という問題である。ケプラーは最終的に、作図不可能な諸図形の辺の数である、7, 9, 11, 13というような数を含む比率は協和を導き出すことはできない^{引用1}、としてこの問題を乗り越えたが、長短3, 6度を認めるために説明が難しくなったことは間違いないといえるだろう。

Walkerはこの点について、一つの見解を述べている。

3-2. Walker の考察

Walker はケプラーの幾何学的な協和の決定方法について、3, 6 度を加えることによって幾何学的というよりも算術的なものに近づいてしまったのではないかという見解を示している（WALKER : 49-50）。

つまり、ケプラーが從来通りピュタゴラス学派やプラトンの調音体系を踏襲していたならば、幾何学的な説明を用いて協和を立証することもより簡単だっただろうということである。

その場合は、 $1:2, 2:3, 3:4$ の比率が協和することを立証すれば良いため、同じように円と多角形を用いて協和の原因を特定する際も、①その辺が円の直径と直接に通約できるもの（直径自身, $1:2$ ）と、②その辺が円の直径と平方の中で通約できるもの（正三角形, $2:3$ ・正方形, $3:4$ ）のどちらかであるものとして定義すれば良いだけだった【図 1～3】。そうすれば他の諸图形を用いる必要はなく（正五角形は実際作図可能であるものの、その辺は二乗の中でさえ直径と通約不可能であるという点で不完全な图形だとケプラーも述べている）、また特定の数字を除外するといった算術的に近い説明も用いる必要はなかっただろう。ケプラーがその労力をおかしてまで長短 3, 6 度を協和に取り入れようと努めた点は注目に値するものと考える。

3-3. 長短 3, 6 度の原因

3-1 によると、長短 3, 6 度の原因はそれぞれ次のようになる。長 3 度 ($4:5$) …正五角形、短 3 度 ($5:6$) …正六角形、長 6 度 ($3:5$) …正五角形、短 6 度 ($5:8$) …正八角形。

Harmonice mundi 第 3 卷第 2 章においても同様に説明されており、さらには、正八角形より後に新しい協和は存在しない^{用2}と述べられているのだが、短 3 度の原因について、同著第 3 卷第 15 章においては異なる説明がなされている。すなわち、「ここで再確認しておく必要があるのは、 $1:6$ が正六角形から来たとしても、残りである $5:6$ は六角形の性質によって協和するわけではなくて、 3 と 10 の各項を 2 倍し、また半分にすることによって円の 10 分の 3 から派生するから協和するのである。ゆえに、その所産である短 3 度も图形の中では正五角形の部類に入る」^{用3}というのである。この説明によると、正八角形より後に新しい協和は存在しないという言葉には矛盾するが、短 3 度の協和は正十角形という正五角形の辺の倍加によって得られる图形に由来していると考えられる。短 6 度については、正八角形の所産ということで変わりはないものの、「長短 3, 6 度の比率はすべて 5 という正五角形由來の数字を含むため、他の協和に比べてやや不完全である」^{用4}とされており、正五角形の性質もいくらか引き継いでいるようである。

ここで注目したいのは、例えば、4 度 ($3:4$) の協和を語る際、「 $1:4$ が正方形から来たとしても残りである $3:4$ は各項を半分にし、また 2 倍することによって円の 6 分の 2、つまり 3 分の 1 から来たものである」とか、「4 度の比率は 3 という正三角形由來の性質を引き継いでいる」などの説明も可能であるのにそれはせず、短 3 度や短 6 度については半ば強引に正五角形という图形に結び付けようという姿勢がみられることである。4 度は円を正方形で分割した際の [残り : 全体]

で、確固たる原因をもった協和だからということかもしれないが、それならば短3度も正五角形よりも完全な図形である正六角形によって円を分割した際の【残り：全体】というしつかりとした原因を持っているのではないだろうか^{注4}。実際に短3度を正六角形の所産であるとして論じている箇所も見られるためますます困惑させられることになる。

ではケプラーが長短3, 6度を少しでも結び付けようと考えた正五角形とはどのような性質を持った図形なのだろうか。以下では、*Harmonice mundi*第3巻第15章を主に参照し、それを検証していく。

4. 正五角形について

4-1. 正五角形と黄金分割

まず、ケプラーは正五角形を、実際に作図可能ではあるもののその辺が二乗の中でさえ直径と通約不可能であるという点で不完全だとしているが、しかしその不完全なものの中に黄金分割という神々しい比 (proportio divina) を含んでいるとして特別視していたようである。ここで黄金分割というのは、次の2つの条件を満たす3つの量 ($a > b > c$) の間の比例関係のことをいっている。

- ① 幾何学的な調和比例の中にあること。すなわち、真ん中の項が最も小さな項に対するのと同じように、最も大きな項が真ん中の項に対するもの。 $(a:b = b:c, b = \sqrt{ac})$
- ② 最も大きな項は小さな2つの項の合計であること。 $(a = b + c)$

$$\text{以上より, } \frac{a}{b} = \frac{b}{a-c} \rightarrow b^2 = a(a-b) \rightarrow b = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$$

となるものとをいう。

正五角形の場合、その作図は正十角形を用いて行われるが、まず円に内接された正十角形の辺が円の半径に対する比率は、黄金分割において、より大きな部分が全体に対する比率と同じものとなっている。

$$\text{正十角形の辺} = \frac{1}{2}r\left(\sqrt{5}-1\right)$$

ケプラーはこのことを、正十角形の優れた特徴としており、それと同時に10という数と関連する第3の等級の図形^{注5}は至る所で神聖比に支配される、と述べている（當間2011:28）。しかし、正十角形とその星形図形では正六角形の辺の比を介在しないと出てこないものであるが、神聖比は正五角形とその星形図形には直接に備わっている^{注6}、とし、この神聖比については正十角形よりも正五角形の方が関わり深いことを示唆している。

$$(\text{正五角形の辺})^2 = (\text{正十角形の辺})^2 + (\text{正六角形の辺})^2$$

$$(\text{正五角形の辺})^2 = r^2 + \frac{r^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}) \quad \text{よって} \quad \text{正五角形の辺} = \frac{r}{2}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$$

このように、正五角形も辺だけに注目すると、正五角形も正十角形や正六角形の辺の比を介在し、さらに自乗しないと神聖比は見出せない。しかし正五角形は、円から離れ、自身の辺と対角線の中に神聖比を見出すことができる【図4】。

ケプラーは神聖比のことを、「父が息子を生み、息子がまた息子を生んで互いに似るように、この分割においても全体と大きい部分の比が、大きい部分と小さい部分の比としてつぎつぎに繰り返される」^{引用6}として生殖の原型 (generationis idea) と捉えていた。そのため、この比を自身の中に直接に含む正五角形については、この比例関係の、すなわち一般的な生成の原型的な図形と見なしていたようである。

4-2. 生成の原型としての黄金分割

また、この神聖な比は数では表せないものの、絶えず比率の真の値に近づいていく一連の数が与えられる。この数列では、その項と神聖な比例項（数で表せず無理数となる値）の差そのものが、見事な交替変化により、象徴としての生殖器によって区別された男性と女性を生み出すのである^{引用7}。

神聖比への近似は $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$ etc. と続く数列によって得ることができる。表2のように、この中から連続する 3 つの項を選び出した場合、4-1. で述べた黄金分割の条件の 2 つ目 ($c = a - b$) は満たすものの、1 つ目の条件は決して満たすことができない。しかし、 a と c の積は b^2 を 1 つおきに超過したり不足したりするのを繰り返していくのだが、その差が常に単位数 1 だけなので、 b^2 について無限に続けられたこの数列は限りなく ac すなわち $a(a - b)$ に近づいていく【表3】。ここで、ケプラーは前述の通り、「差そのものが男性と女性を生み出す」とし、 $a(a - b)$ が b^2 を超過しているところは男性的、不足しているところは女性的と捉え、この数を 2 つ一组にして、男女の一対でお互いを埋め合わせながら徐々に完全な融合へと近づいていく結合の仕方を表しているものと考えたようである【図5】。

4-3. 長短 3 度の組み合わせ

以上のこととは、黄金分割の性質であり、その性質は正五角形という图形の中に保持され、また、起源となる图形の性質がその所産である協和にも反映される^{引用8}ということから、長短 3 度の協和にもこれらの性質が表れることになる。第 15 章では長短 3 度は「どちらも正五角形の部類に入るため、この 2 つの 3 度の緊密な関係によって男性と女性の親密な関係を表せることが確定し、それぞれの 3 度を両性に当てるのはたやすい」^{引用9}と述べ、その大きさの理由から長 3 度 (4:5) を男性、短 3 度 (5:6) を女性として持論を展開している。すなわち、正五角形の所産である長短 3 度の協和は、神の似姿である私たちの魂を生成の事業に匹敵する感激へと動かすものであり^{引用10}、さらには、神がこの性的な象徴も正五角形も同じ幾何学的原型（黄金分割）を基にして象ったということを根拠にして、これらの協和を使った多声的な音楽は、性的な肉体関係がするように、私た

ちをとても興奮させ感動させるものである、と述べている（KEPLER：174-176）。また、ケプラーは至る所で、数に重点をおいたピュタゴラス学派の理論に異議を唱えていたが、ここでは奇数を男性・偶数を女性としたピュタゴラスの教説を持ち出し、長3度の男性性が奇数である正五角形の所産であり、短3度の女性性が正十角形の所産であることの裏付けとして利用している^{引脚11}のも興味深い。

5.まとめ

今まで見てきたように、ケプラーは多声音楽を肯定的に受け入れ、その中に欠かせない3, 6度の音程を独自の協和の理論で説明し、従来の協和に比べて不完全ではあるものの、黄金分割という特別な意味を持たせ、その地位を確立してきた。さらに、長短3度については、男性女性の象徴を与え、その組み合わせから生まれる響きの中には、私たちに性的な興奮を喚起させるものがあるという類比まで与えて論じられており、本稿ではその過程を明らかにできたと考える。しかしその一方で、長3度と同様にれっきとした正五角形からの所産である長6度や、わずかながら正五角形の性質を持っているとされていた短6度については特に何も触れられていないところも気になった。ケプラーの音楽理論の射程は実践的な音楽慣習に向けられていないとする先行研究もあり（大愛 2007：66）、ケプラー自身も随所で実践については記さないというようなことを述べているが、*Harmonice mundi*第3巻の第13章から第16章など、実際の演奏慣習について考察を重ねている箇所も多くみられることから、少なくとも意識はしていたと考えられる。その場合、この3度と6度の扱いの違いについても、当時の音楽慣習におけるそれら協和の位置づけの中に答えが見出せる可能性もあるのではないだろうか。その点については今後考察していきたい。

そしてまたここで、ケプラーが音楽を論じる目的はあくまで神の創造物たる天体の調和を理解する手段であり、その音楽論も全世界の体系を説明しようという壮大な構想の一部分として組み込まれていたということを確認しておきたい。それを考えると、諸惑星同士の関係もその近日点・遠日点における最大最少速度を用いた多声音楽を利用することで説明できるということから、はじめに「多声音楽は世界の機構の中に見出せるもの」であり「神の与えた幾何学的調和の原型からの所産」であり、ということありきで、多声音楽に、ひいてはその中で重要な役割を果たす3度の協和に説明を与えるとしたのではないか、と考えることもできるのではないか。実際、数による考察を批判しながらも、正則図形による円の分割方法を数を用いて制限したり、いくらか矛盾を孕みながらも短3度（5:6）の起源を後の文章で正六角形から正十角形へと修正したり、などいささか御都合主義なところも見受けられる。このことからも、純粹に原因をみつけ、それに沿って事物が並んでいるということを明らかにしたというよりは、最初に結果ありきで、それに合うよう説明に操作が加えられたように見えなくもない。

今後は、上述したように3度と6度の関係性の問題について同時代の他の音楽理論や音楽慣習と比較検討していくことに加え、ケプラーが*Harmonice mundi*の執筆過程ではどのような思考を

辿っていたのか、また、類比や象徴についてどのような考え方を持っていたのかについて、書簡などを通して検討していきたい。

※以下の図表は全て當間作成である。

【表1：円周を切り取る图形とそこから生まれる比】

	1つの辺 : 全体	残り : 全体
直径	1/2:1 オクターブ	1/2:1
正三角形	1:3 12度	2:3 5度
正方形	1:4 2オクターブ	3:4 4度
正五角形	1:5 2オクターブ+長3度	4:5 長3度

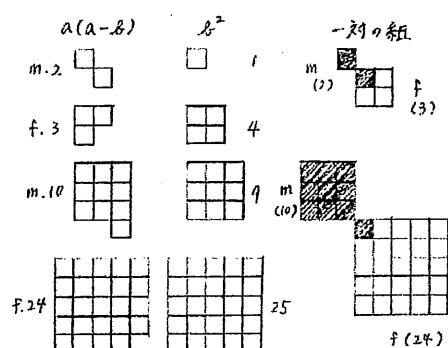
【表2：近似の数列から選び出した3項】

cすなわちa-b	b	a
1	1	2
1	2	3
2	3	5
3	5	8
5	8	13
8	13	21

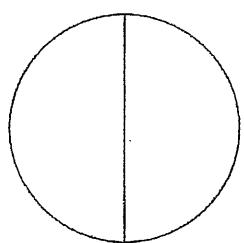
【表3：acとb²の差と象徴的な性】

a(a-b)	b ²	
2	1	男性的
3	4	女性的
10	9	男性的
24	25	女性的
65	64	男性的
168	169	女性的

【図5：融合へと近づいていく様子】

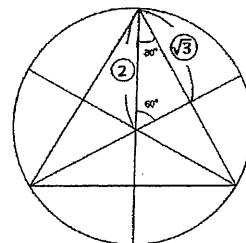


【図1：円に直径】



直径 : 直径 = 1 : 1

【図2：円に正三角形】

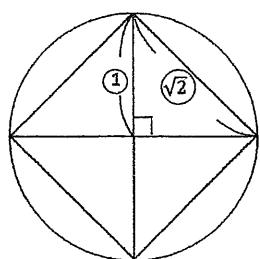


直径 : 一边 = 4 : $2\sqrt{3}$

$$(\text{直径})^2 : (\text{一边})^2 = 16 : 12$$

$$= 4 : 3$$

【図3：円に正方形】

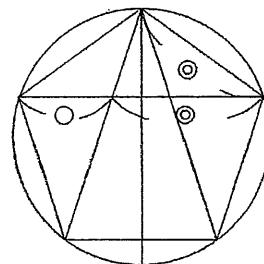


直径 : 一边 = $2\sqrt{2}$

$$(\text{直径})^2 : (\text{一边})^2 = 4 : 2$$

$$= 2 : 1$$

【図4：円に正五角形】



$\odot : \varnothing = \odot : (\odot + \odot)$

【引用】

1. Nam causa dissonantiae erit, quod vel tota vel pars habeat numerum portionum illius divisionis, proprium figurae indemonstrabilis. p. 117

また、今回注で引用したラテン語原文については全てカスバールによる以下の校訂版に拠るものである。以降、原文とその掲載ページのみ示すものとする。

KEPLER, Johannes *Gesammelte Welke* Bd. IV : Harmonice Mundi, hrsg. von CASPAR, Max, München : Beck, 1940.

2. Post Octogonicum nulla datur section chordae Harmonica. p. 118

3. (略) quod quamvis 1. 6. sit ex sexangulo, Residuum tamen 5. 6. non consonet propter sextangulum, sed propter derivationem; itaque etiam Residuum hoc, ejusque Soboles, Tertia minor, est ex Quinquangulari figurarum classe. p. 176

4. Et cum harmonicae 3. 5. et 4. 5. sint ex Pentagono, cuius latus ineffabile, sed et 5. 8. et 5. 6. miscreant aliquid de natura Pentagoni; hinc fit ut bigautraque sit imperfectioris consonantiae. p. 135

5. (略) quòd per hanc Sectam, Denario communicantem, regnat undique proportion Divina: quae immediatè inest ipsis lateribus Quinquangulari ejusque stellæ: at Decangulari cum suâstellâ non competit, nisi mediante latere Sexanguli. p. 63-64

6. Nam sicut pater gignit filium, filius alium, quisque sibi simile: sic etiam in illa sectione, cùm pars major additur toti, continuator proportion, capitque composite locum Totius, et quae prius erat tota, locum partis majoris. p. 175

7. (略) in qua serie, ipsa differentia numerorum à terminis genuinis (qui sunt non numerabiles sed ineffabiles) admirabili vicissitudine mares foeminas progignit, membris sexus indicibus distinctas. p. 175

8. Lateris seu lineae, quae circulum dividit consonanter, ingenium transit in consonantiam ipsam. p. 109

9. Hoc igitur stabilito, quòd societas duarum Tertiarum repreäsentet societatem maris et foeminae: nullo jam negocio cuique sexui sua assignatur Tertia. p. 176

10. (略) quid mirum igitur; si etiam soboles quinquangulari Tertia dura seu 4. 5. et mollis 5. 6. moveat animos, Dei imagines, ad affectus, generationis negocio comparandos. p. 176

11. Cùmque major sit ex imparilaterà, sc. ex Quinquangulari, minor verò originaliter ex parilatera Decangula; consentaneum est etiam PYTHAGORAE placitis, qui numerous mares dixit, pares, foeminas (quod confirmatur illa excessum et defectum speculation, cùm impar sit et excedens); ut illa masculine sexus habeatur, haec foeminei. p. 176

【注】

1. ケプラーが純正律という言葉を使っているわけではないが、ケプラーの音楽理論における協和の比率は全て純正律に等しい。
2. 完全5度を積み重ねていくピュタゴラス音律では、長3度は64:81、短3度は27:32である。
3. これらの比はそれぞれ *durus*（硬い）と *mollis*（軟らかい）と名がついており、それを長・短と訳すのが適當か否かはまだ考察の余地があるが、それぞれ純正律の長・短と同じ比率にあるため、便宜上長・短として表すものとする。
4. *Harmonice mundi* の第1巻において、ケプラーはそれぞれの正則図形について、それが内接する円の直径を基準としたときに、図形の辺がどのような位置にあるかということを等級化している。この直径からの距離による正六角形の知の等級は第2段階であり、第3段階である正方形よりも高い段階に位置している。
5. 正五角形を筆頭に 5×2^n で表せる正則図形がこれにあたる。

参考文献

エイトン, E. J. (著) : 原, 純夫 (訳)

1991 「異端か正当か—ケプラーと神学」 in 渡辺 1991 : 39-59.

FIELD, Judith, V.

1984 "Kepler's rejection of numerology", in BICKERS, Brian(ed.) 1984: 273-296.

フィールド, J. V. (著) : 大谷, 隆 (訳)

1991 「宇宙の完全性を求めて—ケプラーのコスマロジー」 in 渡辺 1991 : 61-82.

KEPLER, Johannes

1619 *Harmonice mundi*, s.l.

1940 *Harmonice mundi*, CASPAR, Max (ed.), München: Beck.

1997 英語訳 *The Harmony of the world*, E. J. Aiton; A. M. Duncan; J. V. Field (訳)

Philadelphia: American Philosophical Society.

2009 日本語訳 『宇宙の調和』 岸本, 良彦 (訳) 東京: 工作舎.

小川, 研

1989 「ルネサンスにおける音楽数比論」

中森, 義宗; 上村, 保子 (編) 『美とかたち』 東京: 東信堂: 40-63.

大愛, 崇晴

2007 「ケプラーにおける協和音の問題」『美学』 Vol. 57, No. 4: 55-68.

OWEN, Gingerich

- 1992 “Kepler, Galilei, and the harmony of the world”, *Music and science in the age of Galileo*, COELHO, Victor (ed.), Boston: Kluwer Academie Publishers: 45-63.
- 東川, 清一
- 2001 『古楽の音律』 東京:春秋社
- 當間, 亜紀子
- 2009 『ケプラーの音楽理論における諸音程について』
お茶の水女子大学人間文化創成科学研究所比較社会文化学専攻修士論文。
- 2011 「ケプラーにおける協和の等級について」『お茶の水音楽論集』第13号: 24-35.
- WALKER, D. P.
- 1978 “Kepler's Celestial Music”, *Studies in Musical Science in the late Renaissance*, London: Warburg Institute, University of London: 34-62.
- 渡辺, 正雄 (編)
- 1991 『ケプラーと世界の調和』 東京:共立出版。

とうま あきこ

お茶の水女子大学卒業。同大学院博士前期課程を経て、現在、博士後期課程在学中（比較社会文化学専攻）。

