

SUR LA COURBURE DE BLASCHKE

ET

LE RANG DES TISSUS DE \mathbb{C}^2

ALAIN HÉNAUT

Laboratoire de Mathématiques pures
Université Bordeaux I et C.N.R.S.
351, cours de la Libération
F-33405 TALENCE Cedex

(RECEIVED AUGUST 31, 2000)

*to the steps of Monk's Misterioso
in the Denzuin Temple lane*

Abstract

Web geometry is devoted to the study of families of foliations which are in general position. We restrict ourselves to the local situation, in the neighborhood of the origin in \mathbb{C}^2 , with $d \geq 1$ complex analytic foliations of curves in general position. Basic invariants of webs in $(\mathbb{C}^2, 0)$ and examples of such configurations are presented. We emphasize some problems of effectivity to characterize d -webs $\mathcal{W}(d)$ in $(\mathbb{C}^2, 0)$. Rank questions and curvature are discussed. The point of view adopted here is the concrete initial data given by the differential equation $F(x, y, y') = 0$, which is in correspondence with $\mathcal{W}(d)$. For this study, we use special meromorphic 1-forms on the surface defined by the equation $F(x, y, p) = 0$. In particular, using these methods, we present an explicit way to find the Blaschke curvature for a 3-web in $(\mathbb{C}^2, 0)$.

1. Introduction

La géométrie des tissus s'intéresse aux propriétés géométriques des familles de feuilletages en position générale. Dans ce qui suit on se restreindra à la situation *locale*, au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$, avec une famille de $d \geq 1$ feuilletages analytiques complexes de codimension 1 de $(\mathbb{C}^2, 0)$ en position générale. L'étude entreprise est *géométrique*, et par conséquent, on s'intéresse aux propriétés de telles configurations, à savoir de germes en $0 \in \mathbb{C}^2$ de tissus, qui sont *invariantes* par les isomorphismes analytiques du germe $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Cette étude systématique a débuté autour des années 30, notamment dans le cadre réel, par les travaux de l'école de Hambourg dirigée par W. Blaschke (*cf.* [B-B], [B], [C1] et par exemple [Hé5]). Pour des généralisations et des développements récents aux horizons variés, on peut également consulter [G1], [G2], [A-G] et [T96].

Avant de présenter les grandes lignes du présent travail, voici deux exemples de (germes de) tissus de $(\mathbb{C}^2, 0)$ qui, on le verra ultérieurement, apparaissent comme deux pôles autant attractifs que complémentaires.

Le premier exemple provient de la géométrie algébrique projective. Il est donné par les tangentes issues d'un point générique à une courbe algébrique projective de *classe* d . Plus généralement et par dualité, toute courbe algébrique réduite $C \subset \mathbb{P}^2$ de degré d , non nécessairement irréductible et éventuellement singulière détermine en un point générique $z \in \mathbb{P}^2$, un germe $\mathcal{L}_C(d)$ d'un d -tissu de (\mathbb{P}^2, z) . Ce dernier est *linéaire* (*i.e.* toutes ses feuilles sont des droites, non nécessairement parallèles) et l'on dit que $\mathcal{L}_C(d)$ est "le" *tissu algébrique* associé à la courbe algébrique $C \subset \mathbb{P}^2$. Si la courbe C ne contient pas de droites, les feuilles de

$\mathcal{L}_C(d)$ sont les tangentes à la courbe duale $\tilde{C} \subset \tilde{\mathbb{P}}^2$ de la courbe $C \subset \mathbb{P}^2$, sinon ce sont des membres des pinceaux de droites correspondants.

Le second exemple est en fait général. Il est donné par les courbes intégrales d'une équation différentielle du premier ordre et de degré d de la forme

$$F(x, y, y') = a_0(x, y) \cdot (y')^d + a_1(x, y) \cdot (y')^{d-1} + \dots + a_d(x, y) = 0$$

où les coefficients a_i sont des éléments de l'anneau $\mathcal{O} := \mathbb{C}\{x, y\}$ des séries entières convergentes à deux variables avec $a_0 \neq 0$. On suppose de plus que le polynôme $F \in \mathcal{O}[p]$ naturellement associé à l'équation différentielle ci-dessus est sans facteur multiple, mais n'est pas nécessairement irréductible et l'on note $\Delta(x, y)$ son p -discriminant. Au voisinage de $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ tel que $a_0(z_0) \neq 0$ et $\Delta(z_0) \neq 0$ on a d tangentes distinctes et non "verticales", et les courbes intégrales correspondantes de l'équation différentielle précédente sont les d feuilles d'un germe $\mathcal{W}(d)$ d'un d -tissu de (\mathbb{C}^2, z_0) . D'une manière générale, l'équation différentielle précédente définit un germe de tissu singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$ noté encore $\mathcal{W}(d)$.

Les deux exemples précédents sont liés par la remarque suivante. Dans un système de coordonnées convenables, on peut vérifier que si C est une courbe algébrique réduite de \mathbb{P}^2 d'équation affine $P(s, t) = 0$ et dont le degré est d , alors l'équation différentielle correspondante à $\mathcal{L}_C(d)$ est donnée par le polynôme $F(x, y, p) = P(y - px, p)$.

Il est naturel d'étudier les invariants du tissu non singulier sous-jacent à $\mathcal{W}(d)$ à partir des coefficients de l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$ et cette étude fait l'objet d'un travail en cours de l'auteur. On présente dans ce qui suit les méthodes utilisées dans ce travail et une partie des résultats essentiels obtenus avec les démonstrations; ces résultats sont complets dans le cas particulier où $d = 3$ et seront établis ci-dessous en détail. Les définitions générales de certains invariants d'un tissu, dont le *rang*, seront rappelées. De plus, on montrera comment décrire de manière effective ces derniers pour $d = 3$, à savoir essentiellement la courbure de Blaschke de $\mathcal{W}(3)$. Ce qui complétera le théorème classique de structure des germes de 3-tissus de $(\mathbb{C}^2, 0)$ que l'on rappellera également. Outre ce résultat, le type d'information obtenu permet par exemple de caractériser, de manière effective, les 4-tissus de Nakai de $(\mathbb{C}^2, 0)$ (cf. [N]).

Les premiers résultats dans cette direction sont dûs à G. Mignard qui, en partie grâce aux méthodes de base de l'analyse algébrique, c'est-à-dire de la théorie des \mathcal{D} -modules où \mathcal{D} est l'anneau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans \mathcal{O} , a donné dans [M1] (cf. également [M2]) une formule explicite de la courbure de Blaschke de $\mathcal{W}(3)$, à partir des seuls a_i pour $0 \leq i \leq 3$.

Un des ingrédients essentiels dans ce cas était l'analyse algébrique du \mathcal{D} -module, de la *résonance*, associé à $\mathcal{W}(3)$ sur lequel on reviendra. Certes, les expressions explicites que l'on retrouvera restent compliquées car la complexité inhérente à ce type d'invariant ne peut être évitée; c'est en fait le cas général de toute *condition d'intégrabilité*.

Cependant le point de vue présenté ici est différent. Outre une simplification des calculs effectifs et surtout de leurs présentations, il vise à en obtenir des descriptions géométriques.

Soit S la surface, en générale singulière, de $(\mathbb{C}^2, 0) \times \mathbb{C}$ dont l'équation est $\{F(x, y, p) = 0\}$. La projection $\pi(x, y, p) = (x, y)$ induit un morphisme $\pi : S \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ génériquement fini de degré d dont on note $\pi_i(x, y) = (x, y, p_i(x, y))$ les branches locales.

La méthode proposée ci-dessous consiste à utiliser la géométrie de la surface S dans la description des invariants du tissu $\mathcal{W}(d)$ et notamment des 1-formes différentielles méromorphes "suffisamment régulières" de cette surface S . Ces dernières seront des éléments particuliers du complexe (ω_S^\bullet, d) introduit par D. Barlet dans [Ba] pour tout espace analytique réduit S de dimension pure.

La définition précise de ces 1-formes sera également rappelée. Celles qu'on utilisera ci-dessous sont directement liées à l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$ puisqu'on verra qu'elles sont de la forme $\omega = r \cdot \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)}$ avec des polynômes $r \in \mathcal{O}[p]$ vérifiant des relations convenables avec les dérivées partielles de F . De plus, d'après les propriétés générales des sections locales de ω_S^1 , ces formes ont des traces, $Trace_\pi(\omega) := \sum_{i=1}^d \pi_i^*(\omega)$ relativement à π , qui se prolongent holomorphiquement sur $(\mathbb{C}^2, 0)$.

D'une manière générale, il s'agit de mieux comprendre comment la surface S gouverne la géométrie de l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$, *via* le tissu $\mathcal{W}(d)$ qu'elle engendre, aussi bien du point de vue générique que du point de vue de ses singularités. On notera, en particulier, la présence "déterminante" du p -résultant $R := \pm a_0 \cdot \Delta$ de $F \in \mathcal{O}[p]$ qui accompagne tous les calculs.

Simultanément, il s'agit également d'étudier la nature des tissus *exceptionnels* de $(\mathbb{C}^2, 0)$, encore appelés exotiques par S.S. Chern (*cf.* [C2]) et sur lesquels on reviendra dans les paragraphes qui suivent.

2. Sur quelques invariants associés aux tissus non singuliers de $(\mathbb{C}^2, 0)$

Soit $\mathcal{O} := \mathbb{C}\{x, y\}$ l'anneau des séries entières convergentes à 2 variables. Un germe $\mathcal{W}(d)$ d'un d -tissu non singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$, ou plus simplement un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$, est donné par $d \geq 1$ familles de courbes lisses indexées par i et en position générale. Les feuilles de $\mathcal{W}(d)$ sont les germes non singuliers d'ensembles de niveau définis par $F_i(x, y) = \text{cste}$ où $F_i \in \mathcal{O}$ avec $F_i(0) = 0$. La position générale se traduit par $dF_i(0) \wedge dF_j(0) \neq 0$ pour $1 \leq i < j \leq d$.

Puisque l'on ne s'intéresse qu'à la géométrie des feuilles du tissu $\mathcal{W}(d)$, les objets importants sont les champs de vecteurs $X_i = \partial_y(F_i)\partial_x - \partial_x(F_i)\partial_y$ pour $1 \leq i \leq d$ définis à un *inversible* près de l'anneau \mathcal{O} ou encore les formes de Pfaff correspondantes $\omega_i = \partial_x(F_i)dx + \partial_y(F_i)dy$ pour $1 \leq i \leq d$ avec $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ et $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$.

Par ailleurs, grâce à l'hypothèse de position générale et au théorème d'inversion locale, l'étude géométrique des configurations précédentes n'est intéressante que pour $d \geq 3$.

Par nature, comme on l'a vu notamment dans les deux exemples de l'introduction, un tissu se présente dans son ensemble. Ainsi tout d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ définit une équation différentielle du type $F(x, y, y') = 0$ décrit dans le second exemple de l'introduction et qui est obtenue comme produit d'équations différentielles du premier ordre et du premier degré. Cette présentation ne privilégie aucune des familles de feuilles du d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ et sera le plus souvent retenue. Elle correspond par projection à la donnée du tissu $\mathcal{W}(d)$ comme famille de feuilletages induite par la surface $S = \{F(x, y, p) = 0\}$ et sa forme de contact.

L'un des invariants principaux du d -tissu $\mathcal{W}(d)$ est lié à la notion de relation abélienne. Un d -uplet $(g_1(F_1), \dots, g_d(F_d)) \in \mathcal{O}^d$ où $g_i \in \mathbb{C}\{z\}$ et qui vérifie $\sum_{i=1}^d g_i(F_i)dF_i = 0$ est appelé une *relation abélienne* du d -tissu $\mathcal{W}(d)$; on désigne par

$$\mathcal{A}(d) = \left\{ (g_i(F_i)) ; g_i \in \mathbb{C}\{z\} \text{ et } \sum_{i=1}^d g_i(F_i)dF_i = 0 \right\}$$

le \mathbb{C} -espace vectoriel des relations abéliennes du d -tissu $\mathcal{W}(d)$.

La majoration optimale suivante :

$$rg \mathcal{W}(d) := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}(d) \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

est classique (*cf.* [B-B] et par exemple [Hé5]) et l'on vérifie que l'entier $rg \mathcal{W}(d)$ défini ci-dessus est un invariant analytique du tissu $\mathcal{W}(d)$ qui ne dépend pas du choix des F_i et que l'on appelle le *rang* de ce tissu.

Le premier exemple donné dans l'introduction fournit un modèle type important de tissu. En effet, un tissu algébrique $\mathcal{L}_C(d)$ associé à une courbe algébrique réduite $C \subset \mathbb{P}^2$ de degré d est nécessairement de rang maximal, à savoir $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$. C'est essentiellement une conséquence du théorème d'annulation

classique d'Abel qui permet de montrer (cf. par exemple [Hé2] pour des détails) que l'on a un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire

$$A : H^0(C, \omega_C) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{L}_C(d))$$

où ω_C est le faisceau dualisant sur C . On rappelle que si C est lisse, on a $\omega_C = \Omega_C^1$ et que les sections globales $H^0(C, \omega_C)$ du faisceau ω_C , c'est-à-dire les 1-formes différentielles abéliennes sur C , forment un \mathbb{C} -espace vectoriel engendré par $r(s, t) \frac{ds}{\partial_t(P)}$ où $r \in \mathbb{C}[s, t]$ avec $\text{degr} \leq d - 3$. L'application A est construite de la manière suivante : dans un système convenable de coordonnées, on a d branches locales $\check{p}_i = (F_i, \xi_i(F_i))$ sur $\check{\mathbb{P}}^2$ où l'on peut supposer que $P(s, t) = \prod_{i=1}^d (t - \xi_i(s)) = 0$ est une équation affine

de C , où en tant que famille de 0-cycles de C paramétrée par $\check{\mathbb{P}}^2$ on a $l(x, y) \cap C = \sum_{i=1}^d \check{p}_i(x, y)$, avec $l(x, y) = \{s = y - tx\}$ et implicitement $F_i(x, y) = y - \xi_i(F_i(x, y)) \cdot x$. On pose alors $A(\omega) = (g_i(F_i))$ où $\omega = g_i(s)ds$ au voisinage de $\check{p}_i(0)$ puisque l'on peut vérifier que l'on obtient, après extension, les égalités $\text{Trace}(\omega) := \sum_{i=1}^d \check{p}_i^*(\omega) = \sum_{i=1}^d g_i(F_i) dF_i = 0$ sur $\check{\mathbb{P}}^2$. Ce qui permet au passage d'établir une remarque de l'introduction, à savoir que l'équation différentielle correspondante à $\mathcal{L}_C(d)$ est donnée dans ce cas par le polynôme $F(x, y, p) = P(y - px, p)$.

La détermination, *via* leur polynôme $F \in \mathcal{O}[p]$, des tissus $\mathcal{W}(d)$ qui sont *algébrisables*, c'est-à-dire de la forme $\mathcal{L}_C(d)$ à un isomorphisme de $(\mathbb{C}^2, 0)$ près est un problème théoriquement résolu (cf. [Hé2] et le travail en cours évoqué dans l'introduction). Ceci en partie, grâce au théorème de Lie-Darboux-Griffiths (cf. [G1]) qui permet d'inverser pour les tissus linéaires le résultat d'Abel ci-dessus et à l'analyse algébrique minutieuse d'un système différentiel linéaire $\mathcal{M}(d)$ associé à $\mathcal{W}(d)$ dont on reparlera en détail ci-dessous.

Malheureusement, pour $d \geq 4$, la compréhension géométrique des conditions effectives qui interviennent dans ce type d'analyse est loin, pour l'instant, d'être satisfaisante. C'est également le cas pour $d \geq 4$ de la caractérisation des tissus de *rang nul*, c'est-à-dire ne possédant pas de relations abéliennes non triviales, dont l'intérêt apparaît notamment en optique géométrique non linéaire.

D'autres modèles type de tissus de $(\mathbb{C}^2, 0)$ sont attendus et notamment des d -tissus $\mathcal{E}(d)$ *exceptionnels*; ce sont les d -tissus de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont le rang est maximal et qui ne sont *pas* algébrisables; pour ces derniers, on a nécessairement $d \geq 5$ et le seul exemple connu, à ce jour, est le 5-tissu de Bol \mathcal{B} (cf. [Bo] et par exemple [Hé5]). Dans cette perspective, la poursuite de l'étude esquissée dans [Hé5] des *tissus polylogarithmiques* notés $\mathcal{Plog}(d)$ où notamment $\mathcal{Plog}(5) = \mathcal{B}$ serait la bienvenue.

Pour éclairer cette notion de rang associé à un tissu $\mathcal{W}(d)$ dans le cas général, on peut considérer le système différentiel linéaire $\mathcal{R}(d)$ dit de la *résonance* et dont les solutions $(f_1, \dots, f_d) \in \mathcal{O}^d$ vérifient

$$\mathcal{R}(d) \quad \begin{cases} X_i(f_i) = 0 & \text{pour } 1 \leq i \leq d \\ \partial_x(f_1 + \dots + f_d) = 0 \\ \partial_y(f_1 + \dots + f_d) = 0. \end{cases}$$

Si l'on désigne par $\text{Sol } \mathcal{R}(d)$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des solutions de $\mathcal{R}(d)$, on a une suite exacte de \mathbb{C} -espaces vectoriels induit par la différentielle usuelle

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^d \longrightarrow \text{Sol } \mathcal{R}(d) \xrightarrow{\delta} \mathcal{A}(d) \longrightarrow 0.$$

Grâce à l'hypothèse de position générale, on peut montrer (cf. [Hé3] pour des détails et une généralisation) que le \mathcal{D} -module à gauche $\mathcal{M}(d)$ associé au système différentiel du même nom est *holonome* et que sa variété caractéristique a pour support la section nulle (cf. par exemple [G-M] pour les résultats de base sur les \mathcal{D} -modules et la terminologie utilisée). Par récurrence sur d , ce qui correspond à prendre des

tissus extraits de $\mathcal{W}(d)$, on majore explicitement à l'aide de la matrice des symboles associée au système différentiel $\mathcal{M}(d)$ la *multiplicité* de $\mathcal{M}(d)$, notée $\text{mult } \mathcal{M}(d)$. Ce qui permet d'exprimer le rang de $\mathcal{W}(d)$ et de retrouver également sa majoration puisque

$$\text{rg } \mathcal{W}(d) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}(d) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Sol } \mathcal{M}(d) - d = \text{mult } \mathcal{M}(d) - d$$

d'après la suite exacte précédente.

Un 3-tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ est de rang 0 ou 1, voici deux autres caractérisations de cette dichotomie.

Soit $\mathcal{W}(3)$ un 3-tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$. Pour z voisin de $0 \in \mathbb{C}^2$ et en cheminant le long des feuilles de $\mathcal{W}(3)$, on peut construire grâce à l'hypothèse de position générale un "hexagone" au voisinage de z qui se referme ou non (cf. [T], [B-B] et par exemple [Hé5]). On dit que le tissu $\mathcal{W}(3)$ est *hexagonal* (ou possède la propriété de Thomsen) si pour tout z voisin de $0 \in \mathbb{C}^2$, tout "hexagone" construit autour de z se referme.

Par exemple, le 3-tissu \mathcal{H} défini par $x = \text{cste}$, $y = \text{cste}$ et $x + y = \text{cste}$ est hexagonal.

On peut supposer que l'on a *normalisé* les formes de Pfaff ω_i définissant $\mathcal{W}(3)$ de manière que l'on ait $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. La 2-forme $\Omega := \omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_2 \wedge \omega_3 = \omega_3 \wedge \omega_1$ est non singulière et ainsi $d\omega_i = h_i \cdot \Omega$ où $h_i \in \mathcal{O}$ pour $1 \leq i \leq 3$. De plus, il existe une forme de Pfaff γ telle que $d\omega_i = \gamma \wedge \omega_i$ pour $1 \leq i \leq 3$, à savoir $\gamma := h_2\omega_1 - h_1\omega_2 = h_3\omega_2 - h_2\omega_3 = h_1\omega_3 - h_3\omega_1$.

On dira que la 2-forme $K_{\mathcal{W}(3)} := d\gamma$ est la *courbure de Blaschke* de $\mathcal{W}(3)$ puisque l'on peut vérifier que $d\gamma$ ne dépend que de $\mathcal{W}(3)$ et non du choix normalisé des ω_i .

Le 3-tissu hexagonal \mathcal{H} ci-dessus est de courbure de Blaschke nulle puisqu'il est donné par dx , dy et $-d(x+y)$ et que par conséquent $h_1 = h_2 = h_3 = 0$.

Si \mathcal{W}_f est défini par $x = \text{cste}$, $y = \text{cste}$ et $f(x, y) = \text{cste}$, on a la normalisation $\partial_x(f)dx + \partial_y(f)dy - df = 0$ et l'on peut vérifier que l'on a la formule suivante :

$$K_{\mathcal{W}_f} = \partial_x \partial_y \left(\text{Log} \frac{\partial_x(f)}{\partial_y(f)} \right) dx \wedge dy.$$

Le théorème classique suivant caractérise la structure des 3-tissus de $(\mathbb{C}^2, 0)$ (cf. [B-B] et par exemple les "notes bleues" [Hé1]) :

Théorème.

Pour un 3-tissu $\mathcal{W}(3)$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) $\text{rg } \mathcal{W}(3) = 1$;
- ii) $\mathcal{W}(3)$ est *parallélisable* (i.e. donné à un isomorphisme analytique de $(\mathbb{C}^2, 0)$ près, par les trois familles de feuilles $x = \text{cste}$, $y = \text{cste}$ et $x + y = \text{cste}$) ;
- iii) $\mathcal{W}(3)$ est *hexagonal* ;
- iv) $\mathcal{W}(3)$ est de courbure de Blaschke nulle (i.e. $K_{\mathcal{W}(3)} = 0$).

Il est naturel de rendre effectif le résultat précédent pour le 3-tissu $\mathcal{W}(3)$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$ défini par l'équation différentielle

$$a_0(x, y) \cdot (y')^3 + a_1(x, y) \cdot (y')^2 + a_2(x, y) \cdot y' + a_3(x, y) = 0$$

où $a_0(0) \neq 0$ et $\Delta(0) \neq 0$ avec les notations de l'introduction. C'est-à-dire de déterminer la courbure de Blaschke de ce 3-tissu $\mathcal{W}(3)$ à partir de la donnée des a_i pour $0 \leq i \leq 3$ et par conséquent également son rang. Ce qui sera obtenu dans le paragraphe 4. Auparavant, on montre d'une manière générale comment les invariants introduits précédemment sont naturellement reliés à la géométrie de la surface S définie par $F(x, y, p) = 0$.

3. Normalisation, relations abéliennes et sections locales de ω_3^1

Soit $F(x, y, y') = 0$ une équation différentielle du premier ordre et de degré d de la forme

$$F(x, y, y') = a_0(x, y) \cdot (y')^d + a_1(x, y) \cdot (y')^{d-1} + \dots + a_d(x, y) = 0$$

où les coefficients a_i sont des éléments de l'anneau $\mathcal{O} := \mathbb{C}\{x, y\}$ des séries entières convergentes à deux variables avec $a_0 \neq 0$. On suppose de plus que le polynôme $F \in \mathcal{O}[p]$ associé est sans facteur multiple, mais n'est pas nécessairement irréductible.

Soit z_0 voisin de $0 \in \mathbb{C}^2$, on peut écrire $F(x, y, p) = a_0(x, y) \cdot \prod_{i=1}^d (p - p_i(x, y))$ avec des germes p_i de fonctions analytiques définis au voisinage de z_0 , dès que $R(F, \partial_p(F))(z_0) \neq 0$ où par définition l'élément $R(F, \partial_p(F)) = a_0^{2d-1} \cdot \prod_{i \neq j} (p_j - p_i) = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} a_0 \cdot \Delta$ de \mathcal{O} est le résultant des polynômes F et $\partial_p(F)$ de $\mathcal{O}[p]$, et où l'on a noté le p -discriminant, non identiquement nul, $\Delta := \Delta(F) = a_0^{2d-2} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq d} (p_j - p_i)^2$ du polynôme $F \in \mathcal{O}[p]$. Dans ce cas, les champs de vecteurs associés au tissu $\mathcal{W}(d)$ de (\mathbb{C}^2, z_0) défini, comme dans l'introduction, par $F(x, y, y') = 0$ sont de la forme

$$X_i := \partial_x + p_i \partial_y \quad \text{pour } 1 \leq i \leq d$$

et les feuilles de $\mathcal{W}(d)$ sont les germes d'ensembles de niveau définis par $F_i(x, y) = cste$ où $X_i(F_i) = 0$ avec des F_i analytiques au voisinage de z_0 , $F_i(z_0) = 0$ et $\partial_y(F_i)(z_0) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq d$.

Sur la surface réduite S , définie par l'équation $F(x, y, p) = 0$, on considère le complexe (ω_S^\bullet, d) introduit par D. Barlet (cf. [Ba] et par exemple [Hé6]). On rappelle que, pour $0 \leq p \leq 2$, le faisceau ω_S^p est \mathcal{O}_S -cohérent où $\mathcal{O}_S = \mathbb{C}\{x, y, p\}/F$ et qu'il s'identifie à Ω_S^p aux points lisses de S . En fait, on peut vérifier que les sections locales du faisceau ω_S^1 sont des 1-formes différentielles méromorphes sur S , à pôles contenus dans le lieu singulier de S , qui s'écrivent $\omega = \frac{r_x dy - r_y dx}{\partial_p(F)}$ avec un triplet (r_x, r_y, r_p) d'éléments de \mathcal{O}_S vérifiant la relation

$$r_x \partial_x(F) + r_y \partial_y(F) + r_p \partial_p(F) = \theta \cdot F$$

où $\theta \in \mathcal{O}_S$; de plus, on peut également vérifier que la différentielle $d : \omega_S^1 \rightarrow \omega_S^2$ est définie explicitement par

$$d\left(\frac{r_x dy - r_y dx}{\partial_p(F)}\right) = (\partial_x(r_x) + \partial_y(r_y) + \partial_p(r_p) - \theta) \frac{dx \wedge dy}{\partial_p(F)}.$$

En particulier, la condition de fermeture de $\omega = \frac{r_x dy - r_y dx}{\partial_p(F)} \in \omega_S^1$ (i.e. $d\omega = 0$) se traduit "à la Picard" (cf. [P-S], p. 118) par la relation

$$r_x \partial_x(F) + r_y \partial_y(F) + r_p \partial_p(F) = (\partial_x(r_x) + \partial_y(r_y) + \partial_p(r_p)) \cdot F$$

où le triplet (r_x, r_y, r_p) est constitué d'éléments de \mathcal{O}_S .

Lemme 1. Soit $r \in \mathcal{O}[p]$ tel que $\text{degr } r \leq d - 2$, alors $\omega = r \cdot \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)}$ est un élément de ω_S^1 . Plus précisément dans ce cas, il existe des éléments r_p et t de $\mathcal{O}[p]$ dont le degré est inférieur ou égal à $d - 1$ et tels que l'on ait

$$r \cdot (\partial_x(F) + p \partial_y(F)) + r_p \cdot \partial_p(F) = (\partial_x(r) + p \partial_y(r) + \partial_p(r_p) - t) \cdot F.$$

Démonstration. Soit z_0 voisin de $0 \in \mathbb{C}^2$ tel qu'avec les notations précédentes on ait $R(F, \partial_p(F))(z_0) \neq 0$; on pose avec ces mêmes notations $\rho_i := \frac{r(x, y, p_i)}{\partial_p(F)(x, y, p_i) \partial_y(F_i)(x, y)}$ pour $1 \leq i \leq d$ en omettant la dépendance en x, y et p et également

$$\lambda := \sum_{i=1}^d \frac{\rho_i \partial_y(F_i)}{p - p_i}, \quad \mu := \sum_{i=1}^d \frac{X_i(p_i) \cdot \rho_i \partial_y(F_i)}{p - p_i} \quad \text{et} \quad \nu := \sum_{i=1}^d \frac{X_i(\rho_i) \cdot \partial_y(F_i)}{p - p_i}.$$

En vertu essentiellement de la formule d'interpolation de Lagrange, on a

$$\begin{aligned} r &= F \cdot \lambda = (a_0 \cdot p^d + a_1 \cdot p^{d-1} + \dots + a_d) \cdot \sum_{i=1}^d \frac{\rho_i \partial_y(F_i)}{p - p_i} \\ &= F \cdot \left\{ \frac{1}{p} \sum_{i=1}^d \rho_i \partial_y(F_i) + \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^d p_i \cdot \rho_i \partial_y(F_i) + \frac{1}{p^3} \sum_{i=1}^d p_i^2 \cdot \rho_i \partial_y(F_i) + \dots \right\} \\ &= (a_0 \cdot R_0) \cdot p^{d-1} + (a_0 \cdot R_1 + a_1 \cdot R_0) \cdot p^{d-2} + \dots + a_0 \cdot R_{d-1} + \dots + a_{d-1} \cdot R_0 \end{aligned}$$

avec des éléments $R_j := \sum_{i=1}^d p_i^j \cdot \rho_i \partial_y(F_i)$ dans \mathcal{O} pour $0 \leq j \leq d-1$ où $R_0 = 0$ puisque par hypothèse le degré en p de $r \in \mathcal{O}[p]$ est au plus $d-2$ et $a_0 \neq 0$. Grâce à ce qui précède, on peut montrer que l'on a l'égalité $\partial_x(\lambda) + p \partial_y(\lambda) + \partial_p(\mu) = \nu$. En effet, d'une part on a

$$\sum_{i=1}^d \frac{p_i \cdot \rho_i \partial_y(F_i)}{p - p_i} = \sum_{i=1}^d \frac{(-(p - p_i) + p) \cdot \rho_i \partial_y(F_i)}{p - p_i} = p \lambda = - \sum_{i=1}^d \frac{\rho_i \partial_x(F_i)}{p - p_i}$$

puisque $R_0 = \sum_{i=1}^d \rho_i \partial_y(F_i) = 0$ et $X_i(F_i) = \partial_x(F_i) + p_i \partial_y(F_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq d$, et d'autre part on obtient par dérivation

$$\begin{aligned} \partial_x(\lambda) &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial_x(\rho_i) \partial_y(F_i)}{p - p_i} + \sum_{i=1}^d \frac{\rho_i \partial_x \partial_y(F_i)}{p - p_i} + \sum_{i=1}^d \frac{\rho_i \partial_x(p_i) \partial_y(F_i)}{(p - p_i)^2} \\ p \partial_y(\lambda) &= - \sum_{i=1}^d \frac{\partial_y(\rho_i) \partial_x(F_i)}{p - p_i} - \sum_{i=1}^d \frac{\rho_i \partial_x \partial_y(F_i)}{p - p_i} - \sum_{i=1}^d \frac{\rho_i \partial_y(p_i) \partial_x(F_i)}{(p - p_i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{p_i \partial_y(\rho_i) \partial_y(F_i)}{p - p_i} - \sum_{i=1}^d \frac{\rho_i \partial_x \partial_y(F_i)}{p - p_i} + \sum_{i=1}^d \frac{p_i \rho_i \partial_y(p_i) \partial_y(F_i)}{(p - p_i)^2} \end{aligned}$$

ce qui permet d'établir l'égalité ci-dessus par addition et d'après les définitions de μ et ν . A l'aide de cette égalité, on peut alors vérifier que les trois expressions

$$\begin{aligned} r(x, y, p) &:= F \cdot \lambda \\ r_p(x, y, p) &:= F \cdot \mu \\ t(x, y, p) &:= F \cdot \nu \end{aligned}$$

qui, par définition, sont des éléments de $\mathcal{O}[p]$ satisfont la relation de l'énoncé, à savoir $r \cdot (\partial_x(F) + p \partial_y(F)) + r_p \cdot \partial_p(F) = (\partial_x(r) + p \partial_y(r) + \partial_p(r_p) - t) \cdot F$. Par ailleurs et comme auparavant pour r , on a

$$r_p = (a_0 \cdot Q_0) \cdot p^{d-1} + (a_0 \cdot Q_1 + a_1 \cdot Q_0) \cdot p^{d-2} + \dots + a_0 \cdot Q_{d-1} + \dots + a_{d-1} \cdot Q_0$$

avec des éléments $Q_j := \sum_{i=1}^d p_i^j \cdot X_i(p_i) \rho_i \partial_y(F_i)$ dans \mathcal{O} pour $0 \leq j \leq d-1$ et de même

$$t = (a_0 \cdot T_0) \cdot p^{d-1} + (a_0 \cdot T_1 + a_1 \cdot T_0) \cdot p^{d-2} + \cdots + a_0 \cdot T_{d-1} + \cdots + a_{d-1} \cdot T_0$$

avec des éléments $T_j := \sum_{i=1}^d p_i^j \cdot X_i(\rho_i) \partial_y(F_i)$ dans \mathcal{O} pour $0 \leq j \leq d-1$. Ce qui démontre le lemme. \square

Remarque 1.

Si les feuilles de $\mathcal{W}(d)$ sont toutes des droites (*i.e.* le tissu $\mathcal{W}(d)$ associé à l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$ est linéaire), on a $X_i(p_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq d$. Par conséquent dans la démonstration précédente $\mu = 0$ d'où $r_p = 0$ et la relation du lemme devient $r \cdot (\partial_x(F) + p \partial_y(F)) = (\partial_x(r) + p \partial_y(r) - t) \cdot F$.

Soit $r = b_3 \cdot p^{d-3} + b_4 \cdot p^{d-4} + \cdots + b_d$ un élément de $\mathcal{O}[p]$, alors d'après le lemme qui précède $\omega = r \cdot \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)}$ est un élément de $\omega_{\frac{1}{2}}$ et il existe des éléments

$$r_p = c_1 \cdot p^{d-1} + c_2 \cdot p^{d-2} + \cdots + c_d$$

$$t = t_2 \cdot p^{d-2} + t_3 \cdot p^{d-3} + \cdots + t_d$$

de $\mathcal{O}[p]$ tels que l'on ait la relation

$$r \cdot (\partial_x(F) + p \partial_y(F)) + r_p \cdot \partial_p(F) = (\partial_x(r) + p \partial_y(r) + \partial_p(r_p) - t) \cdot F.$$

En particulier, cette relation montre que l'on a nécessairement $\deg t \leq d-2$ puisque $\deg r \leq d-3$ par hypothèse. D'une manière générale cette relation entraîne par identification des coefficients des différentes puissances de p que l'on a exactement $2d-1$ relations entre les a_i, b_j, c_k, t_l et certaines de leurs dérivées partielles premières où l'on rappelle que $F = a_0 \cdot p^d + a_1 \cdot p^{d-1} + \cdots + a_d$. De plus, on peut montrer que les diverses relations peuvent être présentées sous forme matricielle.

Par exemple pour $d = 3$ et avec les notations précédentes on vérifie que l'on obtient le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_0 & -a_0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & 0 & -2a_0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_2 & -a_1 & -3a_0 \\ a_2 & a_3 & 2a_3 & 0 & -2a_1 \\ a_3 & 0 & 0 & a_3 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x(b_3) \\ \partial_y(b_3) \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ = b_3 \cdot \begin{pmatrix} \partial_y(a_0) \\ \partial_x(a_0) + \partial_y(a_1) \\ \partial_x(a_1) + \partial_y(a_2) \\ \partial_x(a_2) + \partial_y(a_3) \\ \partial_x(a_3) \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

et l'on note $R \in \mathcal{O}$ le déterminant de la matrice 5×5 ci-dessus. A l'aide, de combinaisons linéaires convenables des colonnes et après transposition, on peut montrer que

$$R := R(F, \partial_p(F)) = -a_0 \cdot \Delta$$

où $R(F, \partial_p(F))$ est le résultant à (x, y) fixé, des polynômes F et $\partial_p(F)$. C'est, en fait, une conséquence de la formule de Sylvester, à savoir

$$R(F, \partial_p(F)) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 3a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3a_0 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

A l'aide des formules de Cramer, on vérifie que le système matriciel précédent permet d'obtenir le système suivant :

$$\begin{cases} R \partial_x(b_3) + \alpha_1 b_3 = R t_3 \\ R \partial_y(b_3) + \alpha_2 b_3 = R t_2 \end{cases}$$

où

$$-\alpha_1 = \begin{vmatrix} \partial_y(a_0) & a_0 & -a_0 & 0 & 0 \\ \partial_x(a_0) + \partial_y(a_1) & a_1 & 0 & -2a_0 & 0 \\ \partial_x(a_1) + \partial_y(a_2) & a_2 & a_2 & -a_1 & -3a_0 \\ \partial_x(a_2) + \partial_y(a_3) & a_3 & 2a_3 & 0 & -2a_1 \\ \partial_x(a_3) & 0 & 0 & a_3 & -a_2 \end{vmatrix}$$

et

$$-\alpha_2 = \begin{vmatrix} 0 & \partial_y(a_0) & -a_0 & 0 & 0 \\ a_0 & \partial_x(a_0) + \partial_y(a_1) & 0 & -2a_0 & 0 \\ a_1 & \partial_x(a_1) + \partial_y(a_2) & a_2 & -a_1 & -3a_0 \\ a_2 & \partial_x(a_2) + \partial_y(a_3) & 2a_3 & 0 & -2a_1 \\ a_3 & \partial_x(a_3) & 0 & a_3 & -a_2 \end{vmatrix}.$$

Soit $d \geq 3$, on suppose désormais que $R(F, \partial_p(F))(0) \neq 0$, alors l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$ définit un d -tissu $\mathcal{W}(d)$ non singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Avec les notations du lemme précédent la 1-forme particulière $\omega := \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)}$ est un élément

de ω_S^1 puisqu'ici $r = 1$. De plus, on a $R_j = \sum_{i=1}^d p_i^j \cdot \varrho_i \partial_y(F_i) = 0$ dans \mathcal{O} pour $0 \leq j \leq d-2$

où dans ce cas particulier $\varrho_i(x, y, p) := \frac{1}{\partial_p(F)(x, y, p_i) \partial_y(F_i)(x, y)}$ pour $1 \leq i \leq d$ et également $X_i(\varrho_i) = \frac{t(x, y, p_i)}{\partial_p(F)(x, y, p_i) \partial_y(F_i)(x, y)}$ en conservant les notations du lemme précédent où ici $\partial_x(F) + p \partial_y(F) + r_p \cdot \partial_p(F) = (\partial_p(r_p) - t) \cdot F$ puisque $r = 1$.

Pour $1 \leq i \leq d$, on pose $\omega_i := \pi_i^*(\omega) = \varrho_i \partial_y(F_i)(dy - p_i dx) = \varrho_i dF_i$. Ce qui donne, dans ce cas, une *normalisation* des formes de Pfaff ω_i définissant le d -tissu $\mathcal{W}(d)$ non singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$. En effet, ce qui précède permet d'exhiber entre les ω_i et avec les notations déjà utilisées auparavant les $d-2$ relations indépendantes suivantes :

$$\sum_i^d \omega_i = 0, \quad \sum_i^d p_i \cdot \omega_i = 0, \quad \dots, \quad \sum_i^d p_i^{d-3} \cdot \omega_i = 0$$

d'après l'annulation des R_j pour $0 \leq j \leq d-2$ et puisque $X_i(F_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq d$. L'indépendance de ces relations provient d'un déterminant de Vandermonde puisque $p_i \neq p_j$ pour $1 \leq i < j \leq d$ d'après l'hypothèse de position générale.

Par ailleurs et pour $1 \leq i \leq d$, on vérifie que $d\omega_i = X_i(\varrho_i) \partial_y(F_i) dx \wedge dy$; ce qui donne dans ce cas particulier et avec les notations du lemme précédent

$$d\omega_i = \frac{t(x, y, p_i)}{\partial_p(F)(x, y, p_i)} dx \wedge dy.$$

Par exemple pour $d = 3$ et avec $r = b_3 = 1$ on a $t = t_2 \cdot p + t_3$, et l'on obtient d'après le système ci-dessus les deux relations suivantes : $\alpha_1 = R t_3$ et $\alpha_2 = R t_2$. Par conséquent on a

$$d\omega_i = \frac{A_1 + p_i A_2}{\partial_p(F)(x, y, p_i)} dx \wedge dy$$

pour $1 \leq i \leq 3$ où par définition les éléments $A_1 := R^{-1}\alpha_1$ et $A_2 := R^{-1}\alpha_2$ appartiennent à \mathcal{O} puisque $R(0) := R(F, \partial_p(F))(0) \neq 0$ par hypothèse.

On va voir ci-dessous que les éventuelles relations abéliennes du d -tissu non singulier $\mathcal{W}(d)$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$, défini par l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$, apparaissent comme l'annulation de traces, relativement au morphisme fini π , d'éléments particuliers de ω_S^1 . Plus précisément, le lemme précédent se particularise et permet d'établir le résultat suivant :

Lemme 2. *On suppose que $R(F, \partial_p(F))(0) \neq 0$ et l'on note $\mathcal{W}(d)$ le d -tissu non singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$ défini par l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$. Toute relation abélienne non triviale $(g_i(F_i))_i$ du tissu $\mathcal{W}(d)$ détermine une section locale $\omega = r \cdot \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)}$ de ω_S^1 , d -fermée avec $r \in \mathcal{O}[p]$ où $\deg r \leq d - 3$ et telle que l'on ait d'une part, la relation suivante :*

$$(*) \quad r \cdot (\partial_x(F) + p \partial_y(F)) + r_p \cdot \partial_p(F) = (\partial_x(r) + p \partial_y(r) + \partial_p(r_p)) \cdot F$$

où $r_p \in \mathcal{O}[p]$ avec $\deg r_p \leq d - 1$ et d'autre part

$$\text{Trace}_\pi(\omega) := \sum_{i=1}^d \pi_i^*(\omega) = \sum_{i=1}^d g_i(F_i) dF_i = 0.$$

Démonstration. Elle reprend pour l'essentiel la démonstration du lemme 1, mais du point de vue "inverse". Soit

$$\lambda := \sum_{i=1}^d \frac{g_i(F_i) \partial_y(F_i)}{p - p_i}, \quad \mu := \sum_{i=1}^d \frac{X_i(p_i) \cdot g_i(F_i) \partial_y(F_i)}{p - p_i} \quad \text{et} \quad \nu := \sum_{i=1}^d \frac{X_i(g_i(F_i)) \cdot \partial_y(F_i)}{p - p_i}.$$

On a $\nu = 0$ puisque $X_i(F_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq d$. De plus, on a également

$$\begin{aligned} r &:= F \cdot \lambda = (a_0 \cdot p^d + a_1 \cdot p^{d-1} + \dots + a_d) \cdot \sum_{i=1}^d \frac{g_i(F_i) \partial_y(F_i)}{p - p_i} \\ &= F \cdot \left\{ \frac{1}{p} \sum_{i=1}^d g_i(F_i) \partial_y(F_i) + \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^d p_i \cdot g_i(F_i) \partial_y(F_i) + \frac{1}{p^3} \sum_{i=1}^d p_i^2 \cdot g_i(F_i) \partial_y(F_i) + \dots \right\} \\ &= (a_0 \cdot R_0) \cdot p^{d-1} + (a_0 \cdot R_1 + a_1 \cdot R_0) \cdot p^{d-2} + \dots + a_0 \cdot R_{d-1} + \dots + a_{d-1} \cdot R_0 \end{aligned}$$

avec des éléments $R_j := \sum_{i=1}^d p_i^j \cdot g_i(F_i) \partial_y(F_i)$ dans \mathcal{O} pour $0 \leq j \leq d - 1$ où $R_0 = 0$ et $R_1 = 0$ puisque par

hypothèse $\sum_{i=1}^d g_i(F_i) dF_i = 0$, ce qui correspond aux deux relations

$$\sum_{i=1}^d g_i(F_i) \partial_y(F_i) = 0 = \sum_{i=1}^d p_i \cdot g_i(F_i) \partial_y(F_i).$$

Ainsi le degré en p de l'élément $r \in \mathcal{O}[p]$, défini ci-dessus, est au plus $d - 3$. Par ailleurs $r_p := F \cdot \mu$ est un élément de $\mathcal{O}[p]$ dont le degré en p est au plus $d - 1$ et comme dans la démonstration du lemme 1, on a d'après ce qui précède $\partial_x(\lambda) + p \partial_y(\lambda) + \partial_p(\mu) = \nu = 0$; ce qui permet également de vérifier que l'on a la relation $(*)$ de l'énoncé. En particulier, d'après les rappels précédents sur ω_S^1 la 1-forme $\omega := r \cdot \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)}$

définit un élément de ω_S^1 tel que $d\omega = 0$. Enfin, grâce à l'omniprésente formule d'interpolation de Lagrange, on a

$$\text{Trace}_\pi(\omega) := \sum_{i=1}^d \pi_i^*(\omega) = \sum_{i=1}^d g_i(F_i) dF_i = 0$$

puisque $\pi_i^*(\omega) = r(x, y, p_i) \cdot \frac{dy - p_i dx}{\partial_p(F)(x, y, p_i)} = g_i(F_i) dF_i$ pour $1 \leq i \leq d$. Ce qui démontre le lemme. \square

On vient de construire au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$, une application \mathbb{C} -linéaire, notée

$$T : \mathcal{A}(\mathcal{W}(d)) \longrightarrow \mathfrak{a}_F$$

où $\mathcal{A}(\mathcal{W}(d))$ est le \mathbb{C} -espace vectoriel des relations abéliennes du d -tissu non singulier $\mathcal{W}(d)$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$, défini par l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$, et où \mathfrak{a}_F est le \mathbb{C} -espace vectoriel défini de la manière suivante :

$$\mathfrak{a}_F := \left\{ \omega = r \cdot \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)} \in \omega_S^1 \text{ avec } r \in \mathcal{O}[p] \text{ où } \text{deg } r \leq d - 3 \text{ et telles que } d\omega = 0 \right\}.$$

Il suffit en effet, à l'aide de lemme qui précède et ses notations, de définir T par $T(g_i(F_i)) = \omega := r(x, y, p) \cdot \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)(x, y, p)}$.

Théorème 1. *Sous les hypothèses précédentes, l'application \mathbb{C} -linéaire*

$$T : \mathcal{A}(\mathcal{W}(d)) \longrightarrow \mathfrak{a}_F$$

définie ci-dessus est un isomorphisme.

Démonstration. L'application T est injective. En effet, si $T(g_i(F_i)) = r \cdot \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)} = 0$ on a par définition de r et puisque $a_0(0) \neq 0$, le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^d g_i(F_i) \partial_y(F_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^d p_i \cdot g_i(F_i) \partial_y(F_i) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^d p_i^{d-1} \cdot g_i(F_i) \partial_y(F_i) = 0 \end{array} \right.$$

et un déterminant de Vandermonde impose que la relation abélienne $(g_i(F_i))_i$ du tissu $\mathcal{W}(d)$, au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$, est triviale. L'application T est surjective. En effet, si $\omega \in \mathfrak{a}_F$ alors

$$\pi_i^*(\omega) = r(x, y, p_i) \cdot \frac{dy - p_i dx}{\partial_p(F)(x, y, p_i)} = \rho_i \cdot dF_i$$

puisque $X_i(F_i) = \partial_x(F_i) + p_i \partial_y(F_i) = 0$ et où l'on a posé pour simplifier l'écriture $\rho_i = \frac{r(x, y, p_i)}{\partial_p(F)(x, y, p_i) \partial_y(F_i)}$. Puisque $d\pi_i^*(\omega) = \pi_i^*(d\omega) = 0$, on a $d\rho_i \wedge dF_i = 0$ ce qui montre que $\rho_i = g_i(F_i)$ avec $g_i \in \mathbb{C}\{z\}$. En effet,

on a $\partial_x(\rho_i)\partial_y(F_i) - \partial_y(\rho_i)\partial_x(F_i) = 0$ d'où $X_i(\rho_i) = 0$ et par suite $\rho_i = g_i(F_i)$ puisque $dF_i(0) \neq 0$. Comme auparavant, on a

$$r = (a_0 \cdot R_0) \cdot p^{d-1} + (a_0 \cdot R_1 + a_1 \cdot R_0) \cdot p^{d-2} + \dots + a_0 \cdot R_{d-1} + \dots + a_{d-1} \cdot R_0$$

où les $R_j := \sum_{i=1}^d p_i^j \cdot \rho_i \partial_y(F_i)$ sont dans \mathcal{O} pour $0 \leq j \leq d-1$. Par hypothèse $\omega \in \mathfrak{a}_F$, ce qui donne les deux relations

$$R_0 = 0 = R_1$$

puisque $a_0(0) \neq 0$. Soit $\sum_{i=1}^d \rho_i \partial_y(F_i) = 0$ et $\sum_{i=1}^d p_i \cdot \rho_i \partial_y(F_i) = -\sum_{i=1}^d \rho_i \partial_x(F_i) = 0$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^d g_i(F_i) dF_i = 0$ puisque $\rho_i = g_i(F_i)$. Ce qui démontre le théorème. \square

On notera que la majoration classique du rang d'un d -tissu non singulier $\mathcal{W}(d)$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$, que les méthodes du prochain paragraphe permettent de retrouver, montre que la dimension du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathfrak{a}_F est au plus $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$.

4. Sur la description de \mathfrak{a}_F et quelques applications

La description du \mathbb{C} -espace vectoriel des relations abéliennes du d -tissu non singulier $\mathcal{W}(d)$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$, défini par l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$, revient d'après le théorème précédent à celle de \mathfrak{a}_F .

Par hypothèse, on rappelle que $F = a_0 \cdot p^d + a_1 \cdot p^{d-1} + \dots + a_d$ avec des a_i dans \mathcal{O} où $a_0(0) \neq 0$ et $\Delta(0) \neq 0$. Si $\omega = r \cdot \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)}$ est un élément de \mathfrak{a}_F on a

$$r = b_3 \cdot p^{d-3} + b_4 \cdot p^{d-4} + \dots + b_d$$

$$r_p = c_1 \cdot p^{d-1} + c_2 \cdot p^{d-2} + \dots + c_d$$

où de plus, le couple $(r, r_p) \in (\mathcal{O}[p])^2$ vérifie la relation (\star) puisque ω est d -fermée. Cette relation que l'on rappelle ci-dessous

$$(\star) \quad r \cdot (\partial_x(F) + p\partial_y(F)) + r_p \cdot \partial_p(F) = (\partial_x(r) + p\partial_y(r) + \partial_p(r_p)) \cdot F$$

entraîne par identification des coefficients des différentes puissances de p que l'on a exactement $2d-1$ relations entre les a_i, b_j, c_k et certaines de leurs dérivées partielles premières; ce système d'équations induit par la relation (\star) , sera noté (\star_d) .

Comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, pour $d=3$ et avec les notations précédentes on vérifie que le système (\star_3) équivaut au système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_0 & -a_0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & 0 & -2a_0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_2 & -a_1 & -3a_0 \\ a_2 & a_3 & 2a_3 & 0 & -2a_1 \\ a_3 & 0 & 0 & a_3 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x(b_3) \\ \partial_y(b_3) \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = b_3 \cdot \begin{pmatrix} \partial_y(a_0) \\ \partial_x(a_0) + \partial_y(a_1) \\ \partial_x(a_1) + \partial_y(a_2) \\ \partial_x(a_2) + \partial_y(a_3) \\ \partial_x(a_3) \end{pmatrix}$$

et l'on a également $R := R(F, \partial_p(F)) = -a_0 \cdot \Delta$ pour le déterminant de la matrice 5×5 ci-dessus, en vertu de la formule de Sylvester.

D'après les formules de Cramer et puisque $R(0) \neq 0$ le système (\star_3) équivaut au suivant :

$$(\star_3) \quad \begin{cases} \partial_x(b_3) + A_1 b_3 = 0 \\ \partial_y(b_3) + A_2 b_3 = 0 \\ c_1 + C_1 b_3 = 0 \\ c_2 + C_2 b_3 = 0 \\ c_3 + C_3 b_3 = 0 \end{cases}$$

où les A_j et les C_k sont des éléments de \mathcal{O} obtenus comme quotients de déterminants. On rappelle que l'expression *explicite* de A_1 et A_2 en fonction des coefficients de $F = a_0 \cdot p^3 + a_1 \cdot p^2 + a_2 \cdot p + a_3$ a déjà été donnée, à partir des déterminants α_1 , α_2 et R , dans le paragraphe 3.

Ce qui précède montre que le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathfrak{a}_F est uniquement déterminé par les solutions $b_3 \in \mathcal{O}$ du système différentiel linéaire $\mathcal{M}(3)$ suivant :

$$\mathcal{M}(3) \quad \begin{cases} \partial_x(b_3) + A_1 b_3 = 0 \\ \partial_y(b_3) + A_2 b_3 = 0 \end{cases}$$

qui, par construction, ne dépend que des coefficients $a_i \in \mathcal{O}$ de l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$. On notera que les conditions d'intégrabilité du système différentiel $\mathcal{M}(3)$ se réduisent, en tant qu'élément de \mathcal{O} , à l'*unique* condition

$$K := \partial_x(A_2) - \partial_y(A_1) = 0.$$

Soit \mathcal{D} l'anneau noethérien à gauche (et à droite) des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans \mathcal{O} . On note encore $\mathcal{M}(3)$ le \mathcal{D} -module à gauche associé au système différentiel linéaire du même nom. La matrice associée au système différentiel $\mathcal{M}(3)$ en tant que \mathcal{D} -module à gauche de présentation finie est la matrice ligne définie par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := (\partial_x + A_1, \partial_y + A_2)$ où plus simplement $\mathcal{M}(3) = \mathcal{D}/(\partial_x + A_1, \partial_y + A_2)$ en tant que quotient par un idéal à gauche.

La matrice "naïvement" associée aux symboles principaux du système différentiel $\mathcal{M}(3)$ est la matrice ligne (ξ, η) où (ξ, η) est le système des coordonnées cotangentes au système (x, y) des coordonnées de \mathbb{C}^2 . Ce qui montre, à l'aide de résultats de base de la théorie des \mathcal{D} -modules (*cf.* par exemple [G-M] ou [Hé1]), que le \mathbb{C} -espace vectoriel $Sol \mathcal{M}(3)$ des solutions analytiques du système différentiel $\mathcal{M}(3)$ est de dimension finie, au plus égal à 1.

Autrement dit, on retrouve la borne classique du rang des 3-tissus de $(\mathbb{C}^2, 0)$ puisque par définition et les résultats qui précèdent, on a

$$rg \mathcal{W}(3) := dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}(\mathcal{W}(3)) = dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a}_F = dim_{\mathbb{C}} Sol \mathcal{M}(3) \leq 1.$$

Plus précisément, l'idéal à gauche de \mathcal{D} correspondant au système différentiel linéaire $\mathcal{M}(3)$ est complètement décrit à l'aide de ses générateurs par

$$(\partial_x + A_1, \partial_y + A_2, \partial_x(A_2) - \partial_y(A_1)) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, K)$$

puisque d'une part $\partial_x \varepsilon_2 - \partial_y \varepsilon_1 = A_2 \varepsilon_1 - A_1 \varepsilon_2 + K$ dans \mathcal{D} et que d'autre part on peut, par dérivation, vérifier que si $K \neq 0$ dans \mathcal{O} alors, en fait, $1 \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2, K)$ dans \mathcal{D} ; ce qui permet de montrer que l'on a

$$rg \mathcal{W}(3) = \begin{cases} 0 & \text{si } K \neq 0 \\ 1 & \text{si } K = 0 \end{cases}$$

Cette dichotomie n'est pas une surprise d'après le théorème de structure rappelé dans le paragraphe 2. De plus, ce théorème est complété par le résultat explicite suivant :

Théorème 2. *On suppose que $R(0) \neq 0$ et l'on note $\mathcal{W}(3)$ le 3-tissu non singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$ défini par l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$. Alors la courbure $K_{\mathcal{W}(3)}$ de Blaschke du 3-tissu $\mathcal{W}(3)$ vérifie l'égalité suivante :*

$$K_{\mathcal{W}(3)} = K(x, y) dx \wedge dy.$$

Démonstration. On a vu dans le paragraphe 3 que la 1-forme particulière $\omega = \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)}$ permet de donner une normalisation des formes de Pfaff ω_i définissant le d -tissu $\mathcal{W}(d)$ non singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$ en posant $\omega_i := \pi_i^*(\omega) = \frac{dy - p_i dx}{\partial_p(F)(x, y, p_i)}$ pour $1 \leq i \leq 3$ puisque dans ce cas $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. De plus, on a également montré qu'avec les notations précédentes on a $d\omega_i = \frac{A_1 + p_i A_2}{\partial_p(F)(x, y, p_i)} dx \wedge dy$ pour $1 \leq i \leq 3$. Soit $\gamma := A_1 dx + A_2 dy$, on a $d\omega_i = \gamma \wedge \omega_i$ pour $1 \leq i \leq 3$ d'après ce qui précède et $d\gamma = K(x, y) dx \wedge dy$ par définition de K . Il suffit alors de se rappeler que par définition $K_{\mathcal{W}(3)} := d\gamma$. Ce qui démontre le théorème. \square

Remarque 2.

Si les feuilles de $\mathcal{W}(3)$ sont toutes des droites, on pose dans ce cas $\mathcal{L}(3) := \mathcal{W}(3)$ et avec la normalisation précédente, on a $\partial_x(F) + p \partial_y(F) = -t \cdot F = -(A_1 + p A_2) \cdot F$ d'après la remarque 1 et les observations du paragraphe 3 déjà utilisées ci-dessus. Après identification des coefficients des puissances de p^4 et p^3 dans la relation ci-dessus, un calcul montre d'après ce qui précède que la courbure $K_{\mathcal{L}(3)}$ de Blaschke du 3-tissu linéaire $\mathcal{L}(3)$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$ associé à l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$ où $F = a_0 \cdot p^3 + a_1 \cdot p^2 + a_2 \cdot p + a_3$ vérifie l'expression simple suivante :

$$K_{\mathcal{L}(3)} = \partial_y^2 \left(\frac{a_1}{a_0} \right) dx \wedge dy.$$

Cette formule peut être établie d'autres façons (cf. par exemple [Hé1], grâce à la notion de fonction d'un tissu due à W. Blaschke et également [M1], à l'aide de l'examen de la condition de fermeture hexagonale de G. Thomsen). On notera que l'annulation de $K_{\mathcal{L}(3)}$ correspond à la classique relation de Reiss caractérisant les courbes algébriques (cf. par exemple [Hé4]) puisqu'avec les notations du paragraphe 2, on a dans ce cas $F(x, y, p) = P(y - px, p)$.

Plus généralement pour $d \geq 3$, on obtient que le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathfrak{a}_F est uniquement déterminé par les solutions analytiques (b_3, b_4, \dots, b_d) du système différentiel linéaire suivant :

$$\mathcal{M}(d) \begin{cases} \partial_x(b_d) + A_{1,1} b_3 + \dots + A_{1,d-2} b_d = 0 \\ \partial_x(b_{d-1}) + \partial_y(b_d) + A_{2,1} b_3 + \dots + A_{2,d-2} b_d = 0 \\ \vdots \\ \partial_x(b_3) + \partial_y(b_4) + A_{d-2,1} b_3 + \dots + A_{d-2,d-2} b_d = 0 \\ \partial_y(b_3) + A_{d-1,1} b_3 + \dots + A_{d-1,d-2} b_d = 0 \end{cases}$$

où les $A_{i,j}$ sont des éléments de \mathcal{O} construits, grâce aux formules de Cramer, à partir de la matrice M associée au système (\star_d) . De plus et comme auparavant le *déterminant* de cette matrice M d'ordre $2d-1$, noté R comme précédemment, vérifie d'après la formule de Sylvester les égalités suivantes :

$$R := (-1)^{d+\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} R(F, \partial_p(F)) = \pm a_0 \cdot \Delta.$$

L'analyse algébrique du système $\mathcal{M}(d)$ reste à faire, notamment en ce qui concerne l'interprétation géométrique de ses conditions d'intégrabilité. Dans le travail en cours évoqué dans l'introduction, on a seulement dégagé pour l'instant que des conditions nécessaires et suffisantes assurant le rang maximal et ce, à l'aide de résultats de base de la théorie des \mathcal{D} -modules.

On rappelle que, grâce au théorème 1 et ce qui précède, la description du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathcal{W}(d))$ des relations abéliennes du d -tissu non singulier $\mathcal{W}(d)$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$ défini par l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$ revient, *via* \mathfrak{a}_F , à celle des solutions analytiques $Sol \mathcal{M}(d)$ du système $\mathcal{M}(d)$. Ce système $\mathcal{M}(d)$, comme celui de la résonance $\mathcal{R}(d)$ défini dans le paragraphe 2 représente, aux constantes près pour ce dernier, l'espace $\mathcal{A}(\mathcal{W}(d))$: l'un étant "global", l'autre "scindé". On notera que la complexité des

coefficients $A_{i,j}$ de la présentation de l'un compense largement, au moins du point de vue de l'effectivité et dès le cas $d = 3$ (cf. par exemple la complexité générale des calculs de [M1]), l'apparente simplicité de la présentation de l'autre.

Bibliographie

- [A-G] M.A. AKIVIS AND V.V. GOLDBERG, *Differential geometry of webs*, in Handbook of differential geometry, Ed. F.J.E. Dillen and L.C.A. Verstraelen, Elsevier, Amsterdam, 2000, 1-152.
- [Ba] D. BARLET, *Le faisceau ω_X^\bullet sur un espace analytique X de dimension pure*, in Fonctions de Plusieurs Variables Complexes III, Séminaire F. Norguet, Lect. Notes Math. **670**, Springer, Berlin, 1978, 187-204.
- [B] W. BLASCHKE, *Einführung in die Geometrie der Waben*, Birkhäuser, Basel, 1955.
- [B-B] W. BLASCHKE UND G. BOL, *Geometrie der Gewebe*, Springer, Berlin, 1938.
- [Bo] G. BOL, *Über ein bemerkenswertes Fünfgewebe in der Ebene*, Abh. Hamburg **11** (1936), 387-393.
- [C1] S.S. CHERN, *Web Geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 1-8.
- [C2] S.S. CHERN, *My Mathematical Education in S.S. Chern, a great geometer of the twentieth century*. Expanded edition, Ed. S.S. Chern and S.T. Yau, International Press, Hong Kong, 1998.
- [G1] P.A. GRIFFITHS, *Variations on a Theorem of Abel*, Invent. Math. **35** (1976), 321-390.
- [G2] P.A. GRIFFITHS, *On Abel's Differential Equations*, Algebraic Geometry, The Johns Hopkins Centennial Lectures, Ed. J.-I. Igusa (1977), 26-51.
- [G-M] M. GRANGER AND P. MAISONOBE, *A basic course on differential modules*, in \mathcal{D} -modules cohérents et holonomes, Travaux en cours **45**, Hermann, Paris, 1993, 103-168.
- [Hé1] A. HÉNAUT, *Introduction à la géométrie des tissus*, Publication de L'Ecole Doctorale de Mathématiques de Bordeaux, Université Bordeaux I, 1994.
- [Hé2] A. HÉNAUT, *Caractérisation des tissus de \mathbb{C}^2 dont le rang est maximal et qui sont linéarisables*, Compositio Math. **94** (1994), 247-268.
- [Hé3] A. HÉNAUT, *Systèmes différentiels, nombre de Castelnuovo et rang des tissus de \mathbb{C}^n* , Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. **31** (1995), 703-720.
- [Hé4] A. HÉNAUT, *Tissus linéaires et théorèmes d'algébrisation de type Abel-inverse et Reiss-inverse*, Geom. Dedicata **65** (1997), 89-101.
- [Hé5] A. HÉNAUT, *About Web Geometry*, Actes des Journées sur les Tissus, Toulouse, décembre 1996, à paratre en 2000.
- [Hé6] A. HÉNAUT, *Formes différentielles abéliennes, bornes de Castelnuovo et rang des tissus de \mathbb{C}^n* , Prépublication du Laboratoire de Mathématiques pures, Université Bordeaux I, 1999.
- [M1] G. MIGNARD, *Rang et courbure des 3-tissus du plan et applications aux équations différentielles*, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I, janvier 1999.
- [M2] G. MIGNARD, *Rang et courbure des 3-tissus de \mathbb{C}^2* , C. R. Acad. Sc. Paris **329** (1999), 629-632.
- [N] I. NAKAI, *Curvature of curvilinear 4-webs and pencils of one forms : Variation on a theorem of Poincaré, Mayrhofer and Reidemeister*, Comment.Math. Helv. **73** (1998), 177-205.
- [P-S] E. PICARD ET G. SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Tome I, Gauthier-Villars, Paris, 1897.
- [T] G. THOMSEN, *Un teorema topologico sulle schiere di curve e una caratterizzazione geometrica delle superficie isoterma-asintotiche*, Boll. Un. Mat. Ital. Bologna. **6** (1927), 80-85.
- [T96] ACTES DES JOURNÉES SUR LES TISSUS, Toulouse 1996, à paratre en 2000.