Natural Science Report, Ochanomizu University, Vol. 10, No. 1, 1959 7
お茶の水女子大学 自然科学報告 第10巻 第1号

Sur les points singuliers des équations différentielles ordinaires du premier ordre. VI.

Tizuko Matuda (松田千鶴子)

Institut des Mathématiques, Faculté des Sciences,
Université Ochanomizu, Tokyo

1. Introduction.

Soit une équation différentielle

(1) $$x\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

où $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont des polynomes en y sans facteur commun, leurs coefficients étant des fonctions régulières de x pour $x=0$. Nous étudions le comportement de la solution dans le voisinage de 0, en particulier lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Si l'on pose $x=e^t$, l'équation (1) devient

(1′) $$\frac{dy}{dt}=\frac{P(e^t,y)}{Q(e^t,y)}.$$

Nous appellerons l'équation différentielle

(2) $$\frac{dy}{dt}=\frac{P(0,y)}{Q(0,y)}$$

l'équation principale de l'équation (1′). Nous distinguons ici deux cas:

1° l'équation (2) admet une solution de période réelle;

2° elle n'ademt aucune solution de période réelle.

Dans le mémoire I, nous avons étudié le cas 2° pour une équation différentielle

(3) $$x^{\sigma+1}\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\qquad(\sigma>0)$$

et montré ou bien qu'une solution $y(x)$ de (3) converge vers une des racines de $P(0,y)=0$ quand x tend vers 0 par valeurs positives ou bien qu'il existe une suite décroissante de valeurs positives x_n, s'annulant pour $n\to\infty$ et telle que $y(x_n)$ converge vers une des racines multiples de $P'(0,y)=0$ où $P'(0,y)/Q'(0,y)$ est la fraction irréductible coïncidant avec $P(0,y)/Q(0,y)$. Dans les mémoires II–V, nous avons traité le cas 1° sous une certaine hypothèse. Le but de ce mémoire est de généraliser les résultats obtenus dans III–V, en supposant qu'une solution périodique de (2) décrit une courbe ne passant que par une des racines, d'ordre quelconque, de $Q(0, y)=0$, mais ne passant par aucune des racines de $P(0, y)=0$. On peut supposer, sans perdre la généralité, que cette racine de $Q(0, y)=0$ soit $y=0$ et de plus que $y=0$ annule $Q(x, y)$ identiquement.

Nous obtiendrons une série convergente qui nous permettre de discuter les valeurs initiales des solution qui s'approchent indéfiniment à une solution périodique de (2) pour $t\to-\infty$.

2. Hypothèses.

Précisons d'abord les hypothèses que nous supposons remplies.

i) On a

$$P(0,0)\neq 0\,,$$
$$Q(x,y)=y^{\nu}Q_1(x,y)\,,\quad Q_1(0,0)\neq 0$$

ν étant un entier positif.

ii) $\bar{\varphi}(t)$ est une branche périodique d'une solution $\varphi(t)$ avec la période réelle $\omega(>0)$ et le domaine de définition

$$\mathfrak{G}: 0\leqq \Im t\leqq \rho'$$

ρ' étant un nombre positif.

iii) $\bar{\varphi}(m\omega)=0$, $\bar{\varphi}(t)\neq 0$ pour $t\neq m\omega$.

iv) $P(0, \bar{\varphi}(t))\neq 0$. $Q_1(0, \bar{\varphi}(t))\neq 0$ pour $t\in\mathfrak{G}$ et $\Im t\neq\rho'$.

v) Soient Γ_0 et Γ_1 les courbes que décrit $\bar{\varphi}(t)$ pour $\Im t=0$ et $\Im t=\rho'$. Γ_1 est à l'intérieur de Γ_0.

Remarque: Dans un voisinage de $t=m\omega$, $\bar{\varphi}(t)$ s'écrit

$$\bar{\varphi}(t)=(t-m\omega)^{\frac{1}{\nu+1}}\mathfrak{P}((t-m\omega)^{\frac{1}{\nu+1}})$$

où $\mathfrak{P}(0)\neq 0$, $\mathfrak{P}$ désignant une série entière.

3. Variable normale $\chi(t)$.

Soit $\Psi(y, 0, \tau_0)$ une solution, qui est égale à τ_0 en $y=0$, de l'équation différentielle

$$\frac{dt}{dy}=\frac{Q(e^t, y)}{P(e^t, y)}$$

et soit E un voisinage de Γ_0:

$$\{y\,;\,\mathrm{dis}(\Gamma_0, y)<\rho_1\}$$

ρ_1 étant un nombre positif. Désignons par $f(\tau_0)$ la valeur que prend la solution $\Psi(y, 0, \tau_0)$ quand y revient à $y=0$ en décrivant la courbe Γ_0 au sens inverse. Si l'on pose

$$f(t)=t-\omega+f_1(e^t)\,,$$

$f_1(x)$ est une fonction régulière pour $x=0$: $f_1(x)=\sum_{j=1}^{\infty} f_j x^j$. En effet, d'après la condition iv) on a $P(e^t, y)\neq 0$ pour $y\in E$ et $|e^t|<\delta_1$ où δ_1 est un nombre positif assez petit. La solution de l'équation différentielle

$$\frac{dt}{dy}=\frac{Q(0, y)}{P(0, y)}$$

qui prend en $y=0$ la valeur τ_0, est

$$t=\tau_0+\int_0^y \frac{Q(0, y)}{P(0, y)}\, dy=\tau_0+\phi(y)\,.$$

Si l'on pose

$$\Psi(y, 0, \tau_0)=\zeta+\phi(y)+\tau_0\,,$$

ζ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d\zeta}{dy}=\frac{Q(e^t, y)}{P(e^t, y)}-\frac{Q(0, y)}{P(0, y)}$$

où $t=\zeta+\phi(y)+\tau_0$, et à la condition initiale $\zeta(0)=0$. On voit de là que ζ est une fonction holomorphe de e^{τ_0} contenant le terme e^{τ_0} comme facteur.

Considérons l'équation fonctionnelle en $\chi(t)$:

$$\chi(f(t))=\chi(t)-\omega\,.$$

Si l'on pose $e^{\chi(\log x)}=\psi(x)$, on obtient l'équation fonctionnelle de Schröder

(4) $$\psi(e^{f(t)})=e^{-\omega}\psi(e^t)\,.$$

Puisque $e^{-\omega}\neq 1$, l'équation (4) admet une solution régulière de e^t

$$\psi(e^t)=\sum_{j=1}^{\infty} r_j e^{jt}$$

où $r_1=1$, $r_2=f_1/(1-e^{-\omega})$, $r_n=g_n(f_1,\cdots, f_{n-2})+f_{n-1}/1-e^{-(n-1)\omega}$, g_n étant un polynome de $f_1,\cdots,f_{n-2}$. On obtient donc le développement de $\chi(t)$

$$\chi(t)=t+\frac{f_1}{1-e^{-\omega}}\, e^t+\cdots\,.$$

Soit f_k le premier coefficient non réel dans le développement de $f_1(x)$. $\Im\chi(t)$ a le même signe que $\Im f_k$ pour $t<-R$ pourvu que R soit assez grand. Si tous les coefficients f_j $(j=1, 2,\cdots)$ sont réels, $\chi(t)$ prend toujours des valeurs réelles. $\Im\chi(t)$ est une fonction croissante monotonement ou décroissante monotonement de la variable réelle t pour

$t<-R$ suivant que $\mathfrak{J}\chi(t)$ est positive ou négative. L'équation principale de l'équation différentielle obtenue de (1') par le changement $\chi(t)=s$ coïncide avec celle de l'équation (1'). On obtient donc la conclusion suivante.

Théorème 1. *Étant donnée une solution $\psi(t, \tau_0)$ de (1') égale à 0 pour $t=\tau_0$, on peut trouver un changement de variable $s=\chi(t)$ tel que si l'on pose*

$$\bar{\psi}(s, s_0)=\psi(\chi^{-1}(s), \tau_0)\,,$$

on ait

$$\bar{\psi}(s_0-m\omega, s_0)=0 \qquad (m=0, 1, \cdots)$$

où $s_0=\chi(\tau_0)$.

Nous appellerons $s=\chi(t)$ variable normale de (1') par rapport à la solution périodique $\bar{\varphi}(t)$.

4. Solution formelle.

Si l'on pose $x=e^t\varepsilon$, l'équation (1) devient

$$\frac{dy}{dt}=\frac{P(e^t\varepsilon, y)}{Q(e^t\varepsilon, y)} \tag{5}$$

Cherchons une solution formelle de la forme

$$y=\varphi(t)+\sum_{j=1}^{\infty}p_j(t)e^{jt}\varepsilon^j\,.$$

L'équation (5) entraîne alors

$$Q(0, \varphi)Q(e^t\varepsilon, \varphi+\sum p_je^{jt}\varepsilon^j)\sum\left(\frac{dp_j}{dt}+jp_j\right)e^{jt}\varepsilon^j$$
$$=Q(0, \varphi)P(e^t\varepsilon, \varphi+\sum p_je^{jt}\varepsilon^j)-P(0, \varphi)Q(e^t\varepsilon, \varphi+\sum p_je^{jt}\varepsilon^j)\,.$$

On obtient sans peine une équation en $p_n(t)$:

$$\{Q(0, \varphi)\}^2\frac{dp_n}{dt}=\Big[Q(0, \varphi)\frac{d}{d\varphi}P(0, \varphi)-P(0, \varphi)\frac{d}{d\varphi}Q(0, \varphi) \tag{6_n}$$
$$-n\{Q(0, \varphi)\}^2\Big]p_n+F_n(\varphi, p_1, \cdots, p_{n-1})\,,$$

où F_n est de la forme suivante

$$F_n(\varphi, p_1, \cdots, p_{n-1})=\varphi^\nu G_n(\varphi, p_1, \cdots, p_{n-1})+\sum_{j=1}^{n-1}p_jH_{j,n}(\varphi, p_1, \cdots, p_{n-1}) \tag{7}$$
$$+\varphi^\nu\sum_{k=1}^{n-1}\frac{dp_k}{dt}\left(\varphi^\nu K_k(\varphi)+\sum_{j=1}^{n-k}p_jL_{j,n-k+1}(\varphi, p_1, \cdots, p_{n-k})\right)\,,$$

G_n, $H_{j,n}$ et $L_{j,n}$ étant des polynomes de $\varphi, p_1, \cdots, p_{n-1}$ et K_k étant un polynome de φ.

5. Coefficient $p_n(t)$.

Pour $n=1$, l'équation (6_1) devient

$$(8_1)\qquad \frac{dp_1}{dt}=\frac{1}{\{Q(0,\varphi)\}^2}\Big[Q(0,\varphi)\frac{d}{d\varphi}P(0,\varphi)-P(0,\varphi)\frac{d}{d\varphi}Q(0,\varphi) -\{Q(0,\varphi)\}^2\Big]p_1+\frac{F_1(\varphi)}{\{Q(0,\varphi)\}^2}.$$

On voit d'après la remarque au n°2, que le coefficient de p_1 dans le second membre de (8_1) admet $t=0$ comme pôle du premier ordre où le résidu est égal à $-\dfrac{\nu}{\nu+1}$, et que $\varphi^{\nu+1}F_1(\varphi)/\{Q(0,\varphi)\}^2=\varphi^{2\nu+1}G_1(\varphi)/\{Q(0,\varphi)\}^2$ $=0$ pour $t=0$. Il existe donc une seule solution algébriquement régulière[1)] pour $t=0$ qui a comme expression

$$(9_1)\qquad p_1(t)=\frac{P(0,\varphi)e^{-t}}{Q(0,\varphi)}\int_0^t\frac{F_1(\varphi)e^t}{P(0,\varphi)Q(0,\varphi)}\,dt$$

et qui s'annule pour $t=0$. Cette solution peut s'écrire

$$p_1(t)=\varphi^{\nu+1}p_1'(t)$$

p_1' étant une fonction algébriquement régulière pour $t=0$. Supposons que les $p_j(t)$ satisfont pour $j<n$ aux conditions suivantes:

1) Elle est régulière dans le domaine

$$\mathfrak{D}_0:\ -\omega+\rho_0<\Re t<\omega-\rho_0,\quad -\rho_0'<\Im t<\rho_0'$$

ρ_0 et ρ_0' etant des nombre positifs assez petits,

2) Elle s'écrit

$$p_j(t)=\varphi^{\nu+1}p_j'(t)\,.$$

Pour n, l'équation (6_n) s'écrit

$$(8_n)\qquad \frac{dp_n}{dt}=\frac{1}{\{Q(0,\varphi)\}^2}\Big[Q(0,\varphi)\frac{d}{d\varphi}P(0,\varphi)-P(0,\varphi)\frac{d}{d\varphi}Q(0,\varphi) -n\{Q(0,\varphi)\}^2\Big]p_n+\frac{1}{\{Q(0,\varphi)\}^2}F_n(\varphi,p_1,\cdots,p_{n-1})\,.$$

Le coefficient de p_n dans le second membre de (8_n) admet $t=0$ comme pôle du premier ordre où le résidu est égale à $-\dfrac{\nu}{\nu+1}$. On voit d'après (7) que $\varphi^{\nu+1}F_n(\varphi,p_1,\cdots,p_{n-1})/\{Q(0,\varphi)\}^2$ s'annule pour $t=0$. Il existe donc une seule solution

1) Une fonction est dite algébriquement régulière en $x=0$, si elle est une fonction holomorphe d'une certain puissance fractionnaire de x dans un voisinage de 0.

$$(9_n) \qquad p_n(t)=\frac{P(0,\varphi)e^{-nt}}{Q(0,\varphi)}\int_0^t \frac{F_n(\varphi,p_1,\cdots,p_{n-1})e^{nt}}{P(0,\varphi)Q(0,\varphi)}dt$$

satisfaisant à la condition susdite.

6. Convergence de la solution formelle.

Si l'on pose

$$y(t)=\varphi(t)(1+z)+H_N(e^t\varepsilon,t)$$

où $H_N(e^t\varepsilon,t)=\sum_{j=1}^{N-1}p_j(t)e^{jt}\varepsilon^j$, l'équation (1') entraîne

$$P(0,\varphi)Q(e^t\varepsilon,\varphi(1+z)+H_N)(1+z)+\frac{dH_N}{dt}Q(0,\varphi)Q(e^t\varepsilon,\varphi(1+z)+H_N)$$
$$+\varphi\frac{dz}{dt}Q(0,\varphi)Q(e^t\varepsilon,\varphi(1+z)+H_N)=Q(0,\varphi)P(e^t\varepsilon,\varphi(1+z)+H_N)\,.$$

On obtient l'équation différentielle en z

$$(10) \qquad \frac{\{Q(0,\varphi)\}^2}{\varphi^{\nu-1}}\frac{dz}{dt}=\frac{1}{\varphi^\nu}\Big[\varphi Q(0,\varphi)\frac{d}{d\varphi}P(0,\varphi)-\varphi P(0,\varphi)\frac{d}{d\varphi}Q(0,\varphi)$$
$$-P(0,\varphi)Q(0,\varphi)\Big]z+R_N(e^t\varepsilon,t,z)\,.$$

Le coefficient de dz/dt est un polynome contenant $\varphi^{\nu+1}$ comme facteur, le coefficient de z dans le second membre est celui avec le terme constant non nul. On peut choisir des constantes $A, B_N, C_N, \delta_2, \rho_2$ de manière que l'on ait

$$(11) \qquad |R_N(\xi,t,z)|\leqq A|z|^2+B_N|z\xi|+C_N|\xi|^N$$

pour $|\xi|<\delta_2$, $|z|<\rho_2$.

Désignons par $\mathfrak{F}$ la famille des fonctions $\psi(\xi,t)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(i) $\psi(\xi,t)$ est une fonction régulière pour $|\xi|<\delta_3$, $t\in\mathfrak{D}_0$ un seul point critique $t=0$, δ_3 étant un nombre positif tel que $\delta_3\leqq\delta_2$ et $K\delta_3^N<\rho_2$.

(ii) $\psi(\xi,t)$ satisfait à l'inégalité

$$(12) \qquad |\psi(\xi,t)|\leqq K|\xi|^N$$

où N et K sont des constantes indépendantes de ψ.

Désignons par T la transformation qui fait correspondre à ψ la fonction $\Psi(\xi,t-\tau_0)=\Phi(\xi e^{-t+\tau_0},t-\tau_0)$ où

$$(13) \qquad \Phi(\varepsilon,t-\tau_0)=\frac{P(0,\varphi)}{\varphi Q(0,\varphi)}\int_{\tau_0}^t\frac{\varphi^\nu}{P(0,\varphi)Q(0,\varphi)}R_N(e^{t-\tau_0}\varepsilon,t-\tau_0,\psi(e^{t-\tau_0}\varepsilon,t-\tau_0))dt$$

φ désignant $\varphi(t-\tau_0)$ dans le second membre de (13). Démontrons, à l'aide du théorème d'existence des points invariants, qu'il existe dans $\mathfrak{F}$ une fonction $\psi(\xi, t-\tau_0)$ telle que $\psi(\xi, t-\tau_0)=\Psi(\xi, t-\tau_0)$. Nous démontrons d'abord que $\psi \in \mathfrak{F}$ entraîne $\Psi \in \mathfrak{F}$. $\Psi(\xi, t-\tau_0)$ est une fonction régulière pour $|\xi|<\delta_3$, $t-\tau_0 \in \mathfrak{D}_0$, un seul point critique $t=\tau_0$. En effet il est clair que $\Psi(\xi, t-\tau_0)$ admet une dérivée par rapport à t. Puisque R_N admet une dérivée par rapport à ε et que le module de

$$\frac{P(0, \varphi)}{\varphi Q(0, \varphi)} \int_{\tau_0}^{t} \frac{\varphi^\nu}{P(0, \varphi)Q(0, \varphi)} \frac{\partial R_N}{\partial \varepsilon} dt$$

est borné, $\Psi(\xi, t-\tau_0)$ admet une dérivée par rapport à ξ. Le module de $\Psi(\xi, t-\tau_0)$ satisfait à l'inégalité

$$|\Psi(\xi, t-\tau_0)| \leqq \frac{M}{\alpha' m m'^2} (AK^2\delta_3^N + B_N K\delta_3 + C_N)\delta_3^N$$

où m, M et m' sont des nombres positifs satisfaisant aux inégalités $m \leqq |P(0, \varphi)| \leqq M$ et $m' \leqq |Q(0, \varphi)/\varphi^\nu|$ pour $t-\tau_0 \in \mathfrak{D}_0$ et où α' est un nombre positif satisfaisant à $|\varphi^{\nu+1}| \geqq \alpha' |t-\tau_0|$ pour $t-\tau_0 \in \mathfrak{D}_0$. Pour que l'on ait l'inégalité (12) il suffit de déterminer N et K de manière que

$$AK^2\delta_3^N + B_N K\delta_3 + C_N < K.$$

Démontrons ensuit la continuité de la transformation T. Supposons qu'une suite $\{\psi_n\}$ extraite de $\mathfrak{F}$ converge uniformément vers ψ pour $|\xi|<\delta_3$, $t \in \mathfrak{D}_0$. Étant donné un nombre positif ε', on peut déterminer un nombre entier N' tel que, pour toute valeur de n égale ou supérieure à N', on ait

$$|\psi-\psi_n| < \varepsilon' |\xi|^N.$$

On obtient alors

$$|\Psi(\xi, t)-\Psi_n(\xi, t)| \leqq \left|\frac{P(0, \varphi)}{\varphi Q(0, \varphi)}\right| \int_0^t \left|\frac{\varphi^\nu}{Q(0, \varphi)P(0, \varphi)}\right| \{R_N(e^t\varepsilon, t, \psi(e^t\varepsilon, t)$$

$$-R_N(e^t\varepsilon, t, \psi_n(e^t\varepsilon, t))\}| dt \leqq \frac{M}{mm'^2} \frac{t}{\varphi^{\nu+1}} A'\varepsilon' |\xi|^N \leqq \frac{A'M\varepsilon'\delta_3^N}{\alpha' m m'^2}$$

où A' est une constante indépendante de n. Par suite $\Psi_n(\xi, t)$ converge uniformément vers $\Psi(\xi, t)$ pour $|\xi|<\delta_3$, $t \in \mathfrak{D}_0$. Il est évident que la famille $\mathfrak{F}$ est fermée, convexe et normale.

Par conséquent il existe une fonction $\psi(\xi, t-\tau_0)$ telle que $\psi(\xi, t-\tau_0) = \Psi(\xi, t-\tau_0)$. $\psi(e^{t-\tau_0}\varepsilon, t-\tau_0)$ est alors une solution de l'équation différentielle (10). Elle est une seule solution bornée pour $t \to \tau_0$, car $t=\tau_0$ est un point singulier de Briot et Bouquet de (10). Si l'on pose $\varepsilon = e^{\tau_0}$,

$$\overline{\psi}(e^t, t-\tau_0) = \varphi(t-\tau_0) + \sum_{j=1}^{N-1} p_j(t-\tau_0)e^{jt} + \varphi(t-\tau_0)\psi(e^t, t-\tau_0)$$

est indépendant de N. On a donc le développement

$$\bar{\psi}(e^t, t-\tau_0) = \varphi(t-\tau_0) + \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t-\tau_0)e^{jt}$$

uniformément convergent pour $|e^t| < \delta_3$, $t-\tau_0 \in \mathfrak{D}_0$.

On obtient donc le théorème suivante:

Théorème 2. *La solution de* (1′) *égale à* 0 *pour* $t=\tau_0$ *est développable en une série uniformément convergente*

$$y(t) = \varphi(t-\tau_0) + \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t-\tau_0)e^{jt} \tag{14}$$

pour $|e^t| < \delta_3$, $t-\tau_0 \in \mathfrak{D}_0$, *où les* $p_j(t)$ *sont des fonctions holomorphes sauf en point* 0 *qui est un point critique algébrique.*

7. Périodicité des coefficients $p_j(t)$.

Si l'on pose que l'équation différentielle (1′) admette la solution qui prend la valeur $y=0$ en $t=\tau_0-m\omega$ $(m=0, 1, 2, \cdots)$, on peut remplacer τ_0 par $\tau_0-m\omega (m=1, 2, \cdots)$ dans le théorème 2. Les p_j dépendant alors de m, on l'écrit $p_j\,(t-\tau_0+m\omega, m)$. Désignons par $\mathfrak{D}_0'$ l'ensemble suivant

$$\mathfrak{D}_0' = \{t: 0 \leqq \Im t \leqq \rho_0', \ -\omega+\rho_0 \leqq \Re t \leqq \omega-\rho_0, \ t \in \mathfrak{G}\}.$$

On obtient la solution

$$y(t) = \bar{\varphi}(t-\tau_0) + \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t-\tau_0+m\omega, m)e^{jt}$$

régulière pour $|e^t| < \delta_3$ et $t-\tau_0+m\omega \in \mathfrak{D}_0'$ oú $\bar{\varphi}(t-\tau_0) = \bar{\varphi}(t-\tau_0+m\omega)$. La relation (9_n) devient pour $n=1$

$$p_1(t-\tau_0+m\omega, m) = \frac{P(0, \varphi)e^{-t}}{Q(0, \varphi)} \int_{\tau_0-m\omega}^{t} \frac{F_1(\varphi)e^t}{P(0, \varphi)Q(0, \varphi)}\, dt$$

et

$$p_1(t+\omega-\tau_0+(m-1)\omega, m-1) = \frac{P(0, \varphi)e^{-t-\omega}}{Q(0, \varphi)} \int_{\tau_0-(m-1)\omega}^{t+\omega} \frac{F_1(\varphi)e^t}{P(0, \varphi)Q(0, \varphi)}\, dt$$

$$= \frac{P(0, \varphi)e^{-t}}{Q(0, \varphi)} \int_{\tau_0-m\omega}^{t} \frac{F_1(\varphi)e^t}{P(0, \varphi)Q(0, \varphi)}\, dt,$$

ce qui entraîne

$$p_1(t-\tau_0+m\omega, m) = p_1(t+\omega-\tau_0+(m-1)\omega, m-1)$$

pour $t-\tau_0+m\omega \in \mathfrak{D}_0'$ et $t-\tau_0+(m-1)\omega \in \mathfrak{D}_0'$. On en déduit que l'on a

$$y(t) - \{\bar{\varphi}(t) + p_1(t-\tau_0+m\omega, m)e^t\} = O(e^{2(\tau_0-m\omega)}) \qquad (m \to \infty)$$

pour $t-\tau_0+m\omega \in \mathfrak{D}_0'$ et

$$y(t) - \{\bar{\varphi}(t) + p_1(t-\tau_0+(m+1)\omega, m+1)e^t\} = O(e^{2(\tau_0-m\omega)}) \qquad (m \to \infty)$$

pour $t-\tau_0+(m+1)\omega \in \mathfrak{D}_0'$. Il en résulte que

$$\{p_1(t-\tau_0+m\omega, m)-p_1(t-\tau_0+(m+1)\omega, m+1)\}e^t=O(e^{2(\tau_0-m\omega)}) \qquad (m\to\infty)$$

pour $t-\tau_0+m\omega\in\mathfrak{D}_0'$ et $t-\tau_0+(m+1)\omega\in\mathfrak{D}_0'$. En remplaçant $t+m\omega$ par t, on obtient

$$\{p_1(t-\tau_0, 0)-p_1(t+\omega-\tau_0, 0)\}e^t=O(e^{2(\tau_0-m\omega)}) \qquad (m\to\infty)$$

pour $t-\tau_0\in\mathfrak{D}_0'$, et $t-\tau_0+\omega\in\mathfrak{D}_0'$. Le premier membre étant indépendant de m, on a

$$p_1(t-\tau_0, 0)=p_1(t+\omega-\tau_0, 0)$$

pour $t-\tau_0\in\mathfrak{D}_0'$, et $t-\tau_0+\omega\in\mathfrak{D}_0'$. Cette relation montre la périodicité de $p_1(t-\tau_0, 0)$. Nous l'écrirons donc $\bar{p}_1(t-\tau_0)$. On peut démontrer de même la périodicité de $p_j(t-\tau_0)$ $(j=2, 3,\cdots)$.

Par conséquent on obtient le théorème suivant:

Théorème 3. *S'il existe une solution* (1′) *telle que* $y(\tau_0-m\omega)=0$ $(m=0, 1, 2,\cdots, \omega>0)$ *et si* $\Re\tau_0$ *est négatif et assez grand en module, cette solution est développable en une série*

$$y(t)=\bar{\varphi}(t-\tau_0)+\sum_{j=1}^{\infty}\bar{p}_j(t-\tau_0)e^{jt} \tag{15}$$

uniformément convergente pour $|e^t|<\delta_3$, $t-\tau_0\in\mathfrak{D}=\{t\,;\,0\leqq\Im t\leqq\rho_0', t\in\mathfrak{G}\}$ *où les* $\bar{p}_j(t-\tau_0)$ *sont des fonctions avec la période réelle* ω, *et holomorphe dans* $\mathfrak{D}$ *sauf aux points* $\tau_0-m\omega$ *qui sont des points critiques algébriques.*

8. Ensemble *H*.

Soit F un domaine:

$$|y-r_j|\geqq\epsilon \ (j=1, 2,\cdots, l), \ |y|\leqq M$$

r_j étant des racines de $P(0,y)=0$ ou $Q_1(0,y)=0$. Étant donnée une valeur t_0 négative et assez grande en module, nous désignons par H l'ensemble des valeurs $\eta\in F$ telles que la solution de (1′) prenant η en $t=t_0$ décrive une courbe passant par 0 pour une valeur de t inférieure à t_0, en restant toujours dans F, et par H_0 l'ensemble analogue défini pour l'équation (2). Soit Γ la courbe décrit par la solution multiforme $\varphi(t)$ de (2) lorsque t parcourt l'intervalle $(0, \infty)$. Γ_0 est alors une branche de Γ. H_0 est formée des arcs maximaux de Γ issue de 0 et contenus dans F. Si l'on pose

$$E_0=\{y\,;\,\mathrm{dis}(H_0, y)\leqq\rho_1, y\in F\}$$

on a l'inclusion $H\subset E_0$ quand t_0 est négatif et assez grand en module. Il s'agit donc seulement des valeurs η dans E_0. Posons $s=\chi(t)$ et $\zeta=\chi(t_0)$ et désignons par $\psi(\zeta, s, 0)$ l'une quelconque des valeurs pour $t=t_0$ de la solution de (1′) qui prend en t une valeur initiale 0. On peut alors écrire

$$H=\{\eta\,;\,\eta=\psi(\zeta, s, 0),\ \eta\in E_0,\ t\leqq t_0\}\,.$$

D'après le théorème 2 $\psi(\zeta, s, 0)$ est développable en une série

$$\varphi(\zeta-s)+\sum_{j=1}^{\infty}p_j(\zeta-s)e^{j\zeta} \tag{16}$$

pour $|e^{\zeta}|<\delta_3$, $\zeta-s\in\mathfrak{D}_0$. $\psi(\zeta, s, 0)$ décrit alors une courbe voisine de celle que décrit $\varphi(\zeta-s)$ pour $t\leqq t_0$ et $s=\chi(t)$. De plus, d'après le théorème 3 une branche de $\psi(\zeta, s, 0)$ est développable en une série

$$\bar{\varphi}(\zeta-s)+\sum_{j=1}^{\infty}\bar{p}_j(\zeta-s)e^{j\zeta} \tag{17}$$

pour $|e^{\zeta}|<\delta_3$, $\zeta-s\in\mathfrak{D}$. Les autres branches sont voisines respectivement des autres branches de $\varphi(\zeta-s)$ autant que $\psi(\zeta, s, 0)$ appartient à E_0. Nous distinguons les trois cas ; $\mathfrak{J}\chi(t)>0$, $\mathfrak{J}\chi(t)=0$ et $\mathfrak{J}\chi(t)<0$.

(i) Le cas $\mathfrak{J}\chi(t)>0$. On obtient l'inégalité

$$0\leqq\mathfrak{J}(\chi(t_0)-\chi(t))=\mathfrak{J}(\zeta-s)\leqq\rho'$$

pour $t\leqq t_0$. $\mathfrak{J}\chi(t)=\mathfrak{J}s$ tend vers 0 quand $t\to-\infty$. $\bar{\varphi}(\zeta-s)$ décrit une courbe fermée C_0 pour s réel. Pour $t\leqq t_0$ et $s=\chi(t)$, elle décrit donc une spirale C_0' qui s'enroule de la courbe fermée C_0. De même, l'expression (17) décrit une courbe fermée C pour s réel. Pour $t\leqq t_0$ elle décrit donc une spirale C' qui est voisine de la courbe C_0' et qui s'enroule autour de la courbe fermée C.

(ii) Le cas $\mathfrak{J}\chi(t)=0$. $\bar{\varphi}(\zeta-s)$ décrit une courbe fermée C_0 pour $t\leqq t_0$ et $s=\chi(t)$. De même l'expression (17) décrit une courbe fermée C qui est voisine de la courbe C_0.

(iii) Le cas $\mathfrak{J}\chi(t)<0$. On obtient l'inégalité $\mathfrak{J}(\zeta-s)<0$ pour $t<t_0$. On a donc $\zeta-s\notin\mathfrak{D}$. D'après le développement (16) $\psi(\zeta, s, 0)$ décrit alors une courbe voisine de celle que décrit $\varphi(\zeta-s)$ pour $\mathfrak{J}(\zeta-s)<0$ et $\zeta-s\in\mathfrak{D}_0$. De plus pour $\mathfrak{R}(\zeta-s)\leqq-\omega+\rho_0$, $\psi(\zeta, s, 0)$ décrit une courbe voisine de celle que décrit $\varphi(\zeta-s)$ pour $\mathfrak{R}(\zeta-s)\leqq-\omega+\rho_0$ autant que $\psi(\zeta, s, 0)$ appartient à E_0.

9. L'ensemble des valeurs initiales telles que les solutions s'approchent d'une solution périodique de l'équation principale.

Cherchons l'ensemble des valeurs initiales η telles que la solution $\psi(s, \zeta, \eta)$ de (1') s'approche d'une solution périodique de (2) pour $t\to-\infty$, où $\psi(s, \zeta, \eta)$ prend une valeur initiale η en $\zeta=\chi(t_0)$.

D'abord nous demontrons le lemme suivant.

Lemme. *Soient c', c'' des nombre négatifs tels que $\mathfrak{J}\chi(t_0)>c''>c'$ Si C' et C'' sont les courbes fermées que la valeur* (17) *décrit lorsque s parcourt respectivement les droites $\mathfrak{J}s=c'$ et $\mathfrak{J}s=c''$, C' est à l'intérieur de* *la courbe* C''.

Il n'existe pas de point d'intersection des courbes C' et C''. En effet soit α le point d'intersection des courbes C' et C''. Une solution $\psi(s, \zeta, \alpha)$ s'annule pour $s=s_1-m\omega$ et $s=s_2-m\omega$ $(m=0, 1,\cdots)$ sur les lignes $\mathfrak{J}s=c'$ et $\mathfrak{J}s=c''$ respectivement. D'après les conditions $\mathfrak{J}\chi(t_0)>c''$ et $0>c''>c'$, on a les inégalités $\mathfrak{J}(s-s_1)>0$ et $\mathfrak{J}(s-s_2)>0$ où $s=\chi(t)$. Une branche de $\psi(s, \zeta, \alpha)$ admet donc deux développements

$$\bar{\varphi}(s-s_1)+\sum_{j=1}^{\infty}\bar{p}_j(s-s_1)e^{js}$$

et

$$\bar{\varphi}(s-s_2)+\sum_{j=1}^{\infty}\bar{p}_j(s-s_2)e^{js}.$$

Elle s'approche des solution $\bar{\varphi}(s-s_1)$, et $\bar{\varphi}(s-s_2)$ de (2) pour $t\to-\infty$. C'est absurde puisque (1′) admet une seule solution qui est égale à α en $t=t_0$ pour $t_0\geqq t$. Si t_0 est assez grand on obtient l'inégalité

$$|\bar{\varphi}(\zeta-s)+\sum\bar{p}_j(\zeta-s)e^{j\zeta})-\bar{\varphi}(\zeta-s)|=|\sum\bar{p}_j(\zeta-s)e^{j\zeta}|<\varepsilon.$$

C' est donc à l'intérieur de C''.

Soit $s'=\chi(t')$ la valeur de $s=\chi(t)$ telle que la solution $\psi(s, \zeta, \eta)$ s'annule pour $\chi(t')-m\omega$ $(m=0, 1,\cdots)$ et $\Re t'\leqq t_0$. D'après le théorème 3, si $s-s'$ appartient à $\mathfrak{D}$ pour $\Re(s-s')\leqq 0$, la solution $\psi(s, \zeta, \eta)$ s'approche indéfiniment de $\bar{\varphi}(s-s')$ quand t tend vers $-\infty$, et si $s-s'$ n'appartient pas à $\mathfrak{D}$ pour une valeur $s=\chi(t)$ telle que $\Re(s-s')<0$, cette solution s'écarte de $\bar{\varphi}(s-s')$ pour $t<t'$.

(i) Le cas $\mathfrak{J}\chi(t)>0$: Soit E' la fermeture de l'intersection de E_0 et de l'intérieur de la courbe C. Si η appartient à E', on obtient l'inégalité $\mathfrak{J}(s-s')>0$ d'après la condition $\mathfrak{J}\chi(t)=\mathfrak{J}s>0$ et le lemme. Il est clair que $\zeta-s'\in\mathfrak{D}$. $s-s'$ appartient donc à $\mathfrak{D}$ pour $t\leqq t_0$. Inversement, si $\psi(s, \zeta, \eta)$ s'approche indéfiniment d'une solution périodique de (2) pour $t\to-\infty$, $s-s'$ appartient à $\mathfrak{D}$ pour $\Re(s-s')\leqq 0$. $\mathfrak{J}\chi(t)=\mathfrak{J}s$ tend vers 0 pour $t\to-\infty$. On obtient donc $\mathfrak{J}s'\leqq 0$. Il est nécessaire que η appartient à E' autant que η appartient à E_0. E' est donc l'ensemble des valeurs initiales η contenues dans E_0 et telles que la solution $\psi(s, \zeta, \eta)$ s'approche d'une solution périodique de (2).

(ii) Le cas $\mathfrak{J}\chi(t)<0$: Si $\mathfrak{J}(\zeta-s')\geqq 0$, $\mathfrak{J}(s-s')>0$ pour $t\leqq t_0$ et s'il existe la valeur $t_1(<t_0)$ telle que $\mathfrak{J}\chi(t_1)=\mathfrak{J}s_1=\mathfrak{J}s'$, $\mathfrak{J}(s-s')>0$ pour $t<t_1$. En effet $\mathfrak{J}s=\mathfrak{J}\chi(t)$ est la fonction décroissante monotonement de la variable réelle t. Désignons pas $\mathfrak{D}'$ la réunion de $\{s' : \mathfrak{J}(s'-\zeta)\leqq 0, \Re\zeta\leqq\Re s'\leqq\Re\zeta+\omega\}$ et de l'ensemble entre la courbe $s'=\chi(t)$ et la courbe $s'=\chi(t)+\omega$ pour $t\leqq t_0$. Soit E'' la fermature de l'intersection de E_0 et l'ensemble des valeurs $\eta=\psi(\zeta, s', 0)$ pour $s'\in\mathfrak{D}'$ et $s-s'\in\mathfrak{D}$ pour $\mathfrak{J}(s-s')\geqq 0$ et soit E' la réunion de E'' et l'ensemble H. Si $\eta\in E'$, $s-s'\in\mathfrak{D}$ pour $t\leqq t_0$ ou pour $t\leqq t_1$, ou il existe une valeur réelle

t telle que $s=s'$. $\psi(s, \zeta, \eta)$ s'approche alors d'une solution périodique de (2). Inversement, si $\psi(s, \zeta, \eta)$ s'approche indéfiniment d'une solution périodique de (2) pour $t \to -\infty$, $s-s' \in \mathfrak{D}$ pour $\mathfrak{J}(s-s')>0$ ou il existe une valeur réelle t telle que $s=s'$ et $s-s' \in \mathfrak{D}$ pour $\mathfrak{R}(s-s') \leqq 0$ et $s-s'$ appartient à un autre feuillet de la surface de Riemann de $\varphi(t)$ pour $\mathfrak{R}(s-s')>0$. Dans le premier cas il est nécessaire ou bien que $s-s' \in \mathfrak{D}$ pour $t<t_0$ ou bien que le signe de $\mathfrak{J}(s-s')$ se change du moins au plus pour $0 \leqq \mathfrak{R}(s'-s) \leqq \omega$ quand t décroit. s' appartient donc à $\mathfrak{D}'$. On a la conclusion que η appartient à E' autant que $\eta \in E_0$.

(iii) Le cas $\mathfrak{J}\chi(t)=0$: Soit E'' la fermature de l'intersection de E_0 et de l'intérieur de la courbe C et E' la réunion de E'' et l'ensemble H. Il est plus facile de voir que E' est l'ensemble cherche.

Par conséquent

Théorème 4. *L'ensemble E' défini comme ci-dessus est l'ensemble de valeurs initiales η contenues dans E_0 et telles que la solution $\psi(s, \zeta, \eta)$ de (1′) s'approche d'une solution périodique de (2) pour $t \to -\infty$ où t_0 et t sont réels.*

(*Received April 1, 1959*)