Sur les Points Singuliers des Equations Différentielles Ordinaires du Premier Ordre. II

Tizuko Katō (加藤千鶴子)
Institut des Mathématiques, Faculté des Sciences,
Université Ochanomizu, Tokyo

Soit donnée une équation différentielle

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\,, \tag{1}$$

où $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont des polynomes de y sans facteur commun, leurs coefficients étant des fonctions régulières de x pour $|x|<\Delta$. Posons

$$P(0,y)=P_0(y),\quad Q(0,y)=Q_0(y),$$

et

$$P(x,y)=P_0(y)+P_1(x,y),\quad Q(x,y)=Q_0(y)+Q_1(x,y)\,.$$

Nous supposons de plus que $P_0(y)$ et $Q_0(y)$ n'ont pas de facteur commun, et que l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt}=\frac{P_0(y)}{Q_0(y)} \tag{2}$$

admet une solution périodique $\varphi(t)$ holomorphe pour $\tau_1<\Im t<\tau_2$ et admettant une période réelle ω. L'ensemble D des valeurs que prend la solution dans $\tau_1<\Im t<\tau_2$ est ouvert.

Le but de notre présent mémoire est à démontrer le théorème suivant.

Théorème. *Soit E un ensemble quelconque fermé et borné dans D. Si $t_0=\log x_0$ (<0) est assez grand en module, toute solution de* (1) *prenant une valeur y_0 dans E pour $x=x_0$ est développable pour $t=\log x$ réelle en série convergente ordonnée suivant les puissances entières de x, avec des coefficients périodiques, le premier terme étant $\varphi(t+c)$.*

Si l'on pose $x=e^t\varepsilon$, l'équation différentielle (1) devient

$$\frac{dy}{dt}=\frac{P_0(y)}{Q_0(y)}+e^t\varepsilon\, G(e^t\varepsilon,y)\,, \tag{3}$$

où

$$G(\xi,\eta)=\xi^{-1}\left\{\frac{P_0(\eta)+P_1(\xi,\eta)}{Q_0(\eta)+Q_1(\xi,\eta)}-\frac{P_0(\eta)}{Q_0(\eta)}\right\}\,.$$

Soit F un ensemble fermé et borné contenu dans D et contenant E à son intérieur. Si Δ_0 est assez petit, on a le développement

$$G(\xi,\eta)=\xi^{-1}\left\{\frac{P_1(\xi,\eta)}{Q_0(\eta)}+\frac{P_0(\eta)+P_1(\xi,\eta)}{Q_0(\eta)}\sum_{j=1}^{\infty}\left(-\frac{Q_1(\xi,\eta)}{Q_0(\eta)}\right)^j\right\}$$

pour $|\xi|<\Delta_0$, $\eta\in F$. On peut supposer que $\varphi(t)$ appartient à F pour $\tau_1+\delta\leqq\Im t\leqq\tau_2-\delta$ quelque petit que soit $\delta>0$.

Cherchons d'abord une solution formelle telle que

$$(4)\qquad y=\sum_{j=0}^{\infty}p_j(t)e^{jt}\varepsilon^j,\quad p_0(t)=\varphi(t)\,.$$

On obtient pour déterminer $p_n(t)$ une équation de la forme

$$(5)\qquad \frac{dp_n(t)}{dt}=\left\{\left[\frac{d}{dy}\frac{P_0(y)}{Q_0(y)}\right]_{y=\varphi}-n\right\}p_n(t)+G_n(p_0,p_1,\cdots,p_{n-1})\,,$$

où G_n est un polynome de $p_1,p_2,\cdots,p_{n-1}$, ses coefficients étant des fonctions holomorphes dans D. La solution de l'équation différentielle (5):

$$p_n(t)=\frac{P_0(\varphi)}{Q_0(\varphi)}e^{-nt}\int_{-\infty}^{t}\frac{Q_0(\varphi)}{P_0(\varphi)}G_n(p_0,p_1,\cdots,p_{n-1})e^{nt}dt$$

est holomorphe pour $\tau_1+\delta<\Im t<\tau_2-\delta$ et admet la même période réelle ω en même temps que $p_0(t),\cdots,p_{n-1}(t)$. On en conclut que tous les coefficients de (4) admettent la période ω. Il est à démontrer la convergence de (4).

Soit

$$(6)\qquad \frac{dz}{dt}=R_N(e^t\varepsilon,t,z)$$

l'équation en $z=y-H_N(e^t\varepsilon,t)$, où

$$H_N(e^t\varepsilon,t)=\varphi(t)+\sum_{j=1}^{N-1}p_j(t)e^{jt}\varepsilon^j\,.$$

Nous pouvons choisir des constantes $A, B_N, \Delta_1(\leqq\Delta_0), \rho_1$ de manière que l'on ait

$$(7)\qquad |R_N(\xi,t,z)|\leqq A|z|+B_N|\xi|^N$$

pour $|\xi|<\Delta_1$, $|z|<\rho_1$, $\tau_1+\delta\leqq\Im t\leqq\tau_2-\delta$.

Désignons par $\mathfrak{F}$ la famille des fonctions $\psi(\xi,t)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $\psi(\xi,t)$ est une fonction holomorphe de (ξ,t) pour $|\xi|<\Delta_2$, $\tau_1+\delta<\Im t<\tau_2-\delta$, admettant la période réelle ω par rapport à t, où Δ_2 est un nombre positif satisfaisant à $\Delta_2\leqq\Delta_1$, $K\Delta_2^N<\rho_1$;

2) $\psi(\xi,t)$ satisfait à l'inégalité

$$(8)\qquad |\psi(\xi,t)|\leqq K|\xi|^N\,,$$

où N et K sont des constantes indépendantes de ψ.

Posons

$$(9)\qquad \Phi(\varepsilon,t)=\int_{-\infty}^{t}R_N(e^t\varepsilon,t,\psi(e^t\varepsilon,t))dt$$

et

$$\Psi(\xi,t)=\Phi(\xi e^{-t},t)\,,$$

Désignons par T la transformation qui fait correspondre à ψ la fonction Ψ. Nous démontrerons, à l'aide du théorème d'existence des points invariants,[1] qu'il existe dans $\mathfrak{F}$ une fonction ψ telle que $\psi(\xi, t)=\Psi(\xi, t)$ pour $|\xi|<\Delta_2$, $\tau_1+\delta<\Im t<\tau_2-\delta$.

D'abord, $\psi\in\mathfrak{F}$ entraîne $\Psi\in\mathfrak{F}$. En effet, $\Psi(\xi, t)$ est une fonction holomorphe de (ξ, t) pour $|\xi|<\Delta_2$, $\tau_1+\delta<\Im t<\tau_2-\delta$, puisqu'on voit facilement la convergence uniforme de l'intégrale (9). La périodicité de $\Psi(\xi, t)$ par rapport à t est aussi facile à vérifier. L'inégalité (7) entraîne

$$|\Phi(\xi e^{-t}, t)|=|\Psi(\xi, t)|\leqq\frac{AK+B_N}{N}|\xi|^N .$$

Donc, pour que l'on ait

$$|\Psi(\xi, t)|\leqq K|\xi|^N ,$$

il suffit de déterminer N et K de manière que

$$AK+B_N\leqq NK .$$

Puis démontrons la continuité de la transformation T. Supposons qu'une suite $\{\psi_n\}$ extraite de $\mathfrak{F}$ converge uniformément vers ψ pour $|\xi|<\Delta_2$, $\tau_1+\delta<\Im t<\tau_2-\delta$. Il suffit de montrer que la suite correspondante $\{\Psi_n\}$, converge uniformément vers la correspondante Ψ de ψ. D'après la condition (8), on peut faire correspondre à deux nombres positifs quelconques ε', $\Delta'(<\Delta_2)$, un entier N' tel que

$$|\psi-\psi_n|<\varepsilon'|\xi|^N \quad \text{pour } n>N', \quad |\xi|<\Delta', \quad \tau_1+\delta<\Im t<\tau_2-\delta.$$

On obtient

$$|\Psi(\xi, t)-\Psi_n(\xi, t)|\leqq\int_{-\infty}^{\Re t}A'|\psi(\xi, \sigma+i\tau)-\psi_n(\xi, \sigma+i\tau)|d\sigma$$
$$\leqq\frac{A'\varepsilon'|\xi|^N}{N},$$

ou A' est une constante indépendente de n et $t=\sigma+i\tau$. Par suite $\Psi_n(\xi, t)$ converge uniformément vers $\Psi(\xi, t)$ pour $|\xi|<\Delta_2$, $\tau_1+\delta<\Im t<\tau_2-\delta$. Il est évident que la famille $\mathfrak{F}$ est fermée, convexe et normale.

Par conséquent, il existe une fonction $\psi(\xi, t)$ telle que $\psi(\xi, t)=\Psi(\xi, t)$. $\psi(e^t\varepsilon, t)$ est alors une solution de l'équation différentielle (6). C'est une seule solution satisfaisant à la condition $z=O(e^{Nt})$ pour $\Re t\to-\infty$, $\Im t=0$. On en conclut que la solution de (3) :

$$\overline{\varphi}(e^t\varepsilon, t)=H_N(e^t\varepsilon, t)+\psi(e^t\varepsilon, t) ,$$

est indépendante de N. $\overline{\varphi}(\xi, t)$ étant holomorphe par rapport à (ξ, t) pour $|\xi|<\Delta_2$, $\tau_1+\delta<\Im t<\tau_2-\delta$, on a le développement convergent

$$\overline{\varphi}(\xi, t)=\sum_{j=0}^{\infty}p_j(t)\xi^j$$

[1] cf. 福原滿洲雄：常微分方程式.

pour $|\xi|<\Delta_2,\ \tau_1+\delta<\Im t<\tau_2-\delta$.

L'équation (3) reste invariable si l'on remplace t et ε par $t+c,\ e^{-c}$. Donc $y=\overline{\psi}(e^t, t+c)$ représente la solution pour $|e^t|<\Delta_2,\ \tau_1+\delta<\Im(t+c)<\tau_2-\delta$.

Il nous rests à montrer que l'on peut déterminer c de manière que

$$y_0=\overline{\psi}(e^{t_0}, t_0+c)\ .$$

La valeur de t telle que $\varphi(t)\in E$ appartient à une bande B: $(\tau_1+\delta<)\tau_1'\leqq\Im t\leqq\tau_2'(<\tau_2-\delta)$. Il existe une valeur t_1 telle que $t_1\in B,\ \varphi(t_1)=y_0,\ |t_1-t_0|<\frac{1}{2}\omega$. Soient d'autre part $\rho,\ \rho'$ et L des constantes positifs telles que l'on ait $\rho\leqq\left|\frac{P_0(y)}{Q_0(y)}\right|\leqq\rho'$, $\left|\frac{P_0(y)}{Q_0(y)}-\frac{P_0(y_0)}{Q_0(y_0)}\right|\leqq L|y-y_0|$ pour $y\in F$. Si $t_1\in B,\ |t-t_1|\leqq d(\tau_1'-\tau_1-\delta,\ \tau_2-\delta-\tau_2')$, on a

$$\begin{aligned}|\varphi(t)-\varphi(t_1)|&=\left|\int_{t_1}^{t}\varphi'(t)\,dt\right|\\&=\left|\frac{P_0(y_0)}{Q_0(y_0)}(t-t_1)+\int_{t_1}^{t}\left[\frac{P_0(\varphi(t))}{Q_0(\varphi(t))}-\frac{P_0(y_0)}{Q_0(y_0)}\right]dt\right|\\&\leqq\rho|t-t_1|-\frac{L\rho'}{2}|t-t_1|^2.\end{aligned}$$

Si R est assez grand, on a

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}p_j(t)\,e^{jt_0}\right|<\frac{1}{2}\rho d$$

pour $\tau_1'-d\leqq\Im t\leqq\tau_2'+d,\ \Re t\leqq-R+\frac{1}{2}\omega,\ \Re t_0\leqq-R$. Nous supposons d assez petit de sorte que

$$\rho-\frac{L\rho' d}{2}\geqq\frac{\rho}{2}\ .$$

On a alors

$$|y_0-\varphi(t)|>\left|\sum_{j=1}^{\infty}p_j(t)\,e^{jt_0}\right|$$

sur la circonférence $|t-t_1|=d$. Puisque l'équation en t

$$y_0-\varphi(t)=0$$

est satisfaite pour $t=t_1$, l'équation en t

$$\overline{\psi}(e^{t_0}, t)=y_0$$

admet, d'après le théorème de Rouché, une racine $t=t_0+c$ dans le cercle $|t-t_1|<d$. La solution

$$y=\overline{\psi}(e^t, t+c)$$

prend la valeur y_0 pour $t=t_0$. C.Q.F.D.

En terminant ce mémoire, je remercie Professeur Masuo Hukuhara de la bienveillance sincère en me donnant de diverses suggestions profitables.

(Received Jan. 30, 1953)