Über die negativen Fundamentaldiskriminanten mit der Klassenzahl Zwei

Kanesiroo Iseki (伊關兼四郎)
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Ochanomizu University

(*Received Dec. 10, 1951*)

Kleine lateinische Buchstaben bedeuten ganze rationale Zahlen.

Es sei $-\Delta$ eine negative Fundamentaldiskriminante, d.h. eine negative ganze durch kein ungerades Primzahlquadrat teilbare Zahl mit der Kongruenzbedingung

$$-\Delta \equiv 1 \pmod 4) \text{ oder } \equiv 8 \pmod{16} \text{ oder } \equiv 12 \pmod{16}.$$

Man bezeichne mit $h = h(-\Delta)$ die Anzahl der nicht-äquivalenten Klassen von positiv-definiten quadratischen Formen $ax^2+bxy+cy^2$ mit der Diskriminante $-\Delta = b^2-4ac$.

Dickson[1] zeigte, dass es genau neun Werte von $\Delta < 15\times 10^5$ mit $h(-\Delta)=1$ gibt, nämlich

$$3,\ 4,\ 7,\ 8,\ 11,\ 19,\ 43,\ 67,\ 163.$$

Ich habe das entsprechende Problem für den Fall der Klassenzahl 2 mit der Dicksonschen Methode behandelt und das folgende Resultat gewonnen:

Es gibt genau 18 *Werte von* $\Delta < 6000$ *mit* $h(-\Delta)=2$, *nämlich*

$$(1)\qquad \begin{cases} 15,\ 20,\ 24,\ 35,\ 40,\ 51,\ 52,\ 88,\ 91,\ 115, \\ 123,\ 148,\ 187,\ 232,\ 235,\ 267,\ 403,\ 427. \end{cases}$$

Im folgenden werde ich mich der Kürze halber auf die Werte von $\Delta < 1000$ beschränken und die obigen 18 Zahlen auffinden. Bis auf weiteres soll aber Δ keiner weiteren Bedingung unterworfen sein, als dass $-\Delta$ eine negative Fundamentaldiskriminante sei.

Für die Form $ax^2+bxy+cy^2$ werden wir hinfort die abgekürzte Schreibweise $[a, b, c]$ gebrauchen. Eine Form $[a, b, c]$ der Diskriminante $-\Delta$ soll dann und nur dann **reduziert** heissen, wenn

$$(2)\qquad -a < b \leqq a < c \quad \text{oder} \quad 0 \leqq b \leqq a = c$$

ist. Bekanntlich liegt dann in jeder der Formenklassen unter Betrachtung genau eine reduzierte Form, so dass die Klassenzahl gleich der Anzahl der reduzierten Formen ist. Ferner gibt es für jedes gegebene Δ eine einzige reduzierte Form mit $a=1$ (die sogenannte Hauptform),

---

[1] L. E. Dickson: On the negative discriminants for which there is a single class of positive primitive binary quadratic forms; Bull. Amer. Math. Soc., Bd. **17** (1911), S. 534-537

nämlich $[1, 1, (\Delta+1)/4]$ für ungerades Δ und $[1, 0, \Delta/4]$ für gerades Δ.

Satz 1: *Für eine reduzierte Form ist stets* $a \leqq \sqrt{\frac{\Delta}{3}}$.

Dies ist ein wohlbekannter Satz aus der Theorie der quadratischen Formen.

Die folgenden drei Sätze sind einfache Konsequenzen bekannter Tatsachen aus der Idealtheorie der quadratischen Körper; der Einheitlichkeit der Methode halber habe ich aber hier Beweise im Rahmen der quadratischen Formen vorgezogen.

Satz 2: *Ist* Δ *durch genau eine Primzahl teilbar, so ist* $h(-\Delta)$ *eine ungerade Zahl.*

Vorbemerkung: In der Folge bedeutet p (mit oder ohne Index) stets eine Primzahl.

Beweis: Wenn 2 der einzige Primteiler von Δ ist, so muss $\Delta=4$ oder 8, also $h=1$ nach Satz 1 sein. Ist aber $p>2$ der einzige Primteiler von Δ, so ist offenbar $\Delta=p$ und h gleich der Lösungszahl von $4ac-b^2=p$ mit der Nebenbedingung (2).

Hier sei zuerst der Fall $0 \leqq b \leqq a=c$ betrachtet. Dann ist $p=4a^2-b^2=(2a-b)(2a+b)$, also $2a-b=1$, $2a+b=p$, daher $p-3=4(b-a) \leqq 0$, also $p=3$, so dass $h(-\Delta)=h(-3)=1$ nach Satz 1 wird.

Folglich darf im folgenden $p>3$ angenommen werden. Dann ist h gleich der Lösungszahl von $4ac-b^2=p$ $(-a<b \leqq a<c)$. Ist nun $b=a$, so wird $p=a(4c-a)$, wo $4c-a>4a-a>a$. Also muss $a=1$ und $[a, \mathrm{b}, c]$ die Hauptform sein. Umgekehrt ist für die Hauptform $[1, 1, (p+1)/4]$ tatsächlich $-a<b=a<c$. Folglich ist die Lösungszahl von $4ac-b^2=p$ $(-a<b<a<c)$ gleich $h-1$. Hierin kann b unmöglich gerade sein, also ist insbesondere $b \neq 0$; somit ist $h-1$ gerade, was zu beweisen war.

Satz 3: *Ist* Δ *ungerade und* $h(-\Delta)=2$, *so ist* $\Delta=p_1p_2$, wo $2<p_1<p_2$ *ist.*

Beweis: Nach Satz 2 besitzt Δ wenigstens zwei verschiedene Primteiler. Andererseits ergibt sich leicht, dass Δ höchstens zwei verschiedene Primteiler hat. Denn wäre $\Delta=p_1p_2p_3t$ mit $p_1<p_2<p_3$, so ergäbe sich wegen $\Delta \equiv 3 \pmod 4$

$$p_1+p_2p_3t \equiv p_2+p_1p_3t \equiv 0 \pmod 4.$$

Dann wären $[p_1, p_1, (p_1+p_2p_3t)/4]$ und $[p_2, p_2, (p_2+p_1p_3t)/4]$ gegen Voraussetzung voneinander und von der Hauptform verschiedene reduzierte Formen, da $3p_1<p_2p_3t$ und $3p_2<p_1p_3t$ ist. Folglich hat Δ genau zwei verschiedene Primteiler und ist nach Definition ausserdem quadratfrei.

Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 4: *Ist* Δ *gerade und* $h(-\Delta)=2$, *so ist* $\Delta=4p$ *oder* $8p$ *mit* $p>2$.

Beweis: Zuerst folgt leicht, dass $\Delta/4$ unmöglich drei voneinander verschiedene Primteiler besitzt. Denn wäre $\Delta/4=p_1p_2p_3t$ mit $p_1<p_2<p_3$, so wären wegen $p_1<p_2p_3t$ und $p_2<p_1p_3t$ die zwei reduzierten Formen

$[p_1, 0, p_2p_3t]$ und $[p_2, 0, p_1p_3t]$ sowohl voneinander als auch von der Hauptform verschieden.

Also hat $\Delta/4$ höchstens zwei verschiedene Primteiler. Andererseits ist $\Delta/4$ nach Definition quadratfrei. Wäre nun $\Delta/4=p_1p_2$ mit $2<p_1<p_2$, so wären $[p_1, 0, p_2]$ und $[2, 2, (p_1p_2+1)/2]$ gegen Voraussetzung voneinander und von der Hauptform verschiedene reduzierte Formen. Folglich muss $\Delta/4=2$ oder p oder $2p$ $(p>2)$ sein. Der Fall $\Delta=8$ wird aber nach Satz 2 ausgeschlossen. Das beweist den Satz.

Satz 5: *Es sei Δ ungerade und $h(-\Delta)=2$. Entweder Δ ist dann gleich einer der vier Zahlen*

$$15, \quad 35, \quad 51, \quad 91, \tag{3}$$

oder Δ hat eine der folgenden Gestalten $(m\geqq 0)$:

$$120\,m+n \quad (n=43,\ 67,\ \textit{oder}\ 115),$$

$$3(120\,m+n) \quad (n=1,\ 41,\ 49,\ \textit{oder}\ 89).$$

Ist andererseits Δ eine beliebige aus den vier Zahlen (3), *so ist tatsächlich $h(-\Delta)=2$.*

Beweis: Man setze für ungerades Δ und beliebiges $j\geqq 0$

$$T_j=((2j+1)^2+\Delta)/4=T_0+j(j+1).$$

Ist nun $[a, b, c]$ eine beliebige reduzierte Form der Diskriminante $-\Delta=b^2-4ac$, so ist b ungerade; setzt man also $|b|=2j+1$, so wird $ac=T_j$. Umgekehrt folgt aus $|b|=2j+1$, $ac=T_j$ und der Bedingung (2), dass $[a, b, c]$ eine reduzierte Form der Diskriminante $-\Delta$ ist.

Es werde nun $\Delta\equiv 7 \pmod 8$ angenommen, so dass $T_0=(\Delta+1)/4$ gerade ist. Für $\Delta=7$ wird h ungerade nach Satz 2. Fürs nächstkleinste $\Delta=\mathbf{15}$ wird $a\leqq 2$ nach Satz 1, also $b=\pm 1$ und $j=0$, $T_0=4$. Die reduzierten Formen sind folglich $[1, 1, 4]$ und $[2, 1, 2]$, also ist $h(-15)=2$. Ist aber $\Delta>15$, so ist $T_0>4$; es gibt also drei verschiedene reduzierte Formen $[1, 1, T_0]$ und $[2, \pm 1, T_0/2]$, so dass $h>2$ wird.

Nach dem obigen braucht im folgenden nur der Fall $\Delta\equiv 3 \pmod 8$ betrachtet zu werden. Man setze $\Delta=8k+3$.

1) Es sei $k=3t$, also $\Delta=3(8t+1)$, $T_0=6t+1$. Nach Satz 3 darf hier $8t+1$ prim angenommen werden, also $t\equiv 0$ oder $2 \pmod 3$.

11) Ist $t\equiv 2 \pmod 5$, so ist $T_1=6t+3\equiv 0 \pmod 5$. Für $t=2$ wird speziell $\Delta=3\times 17=\mathbf{51}$, $a\leqq 4$ nach Satz 1, $|b|\leqq 3$, $j\leqq 1$, $T_0=13$, $T_1=15$; die einzigen reduzierten Formen sind $[1, 1, 13]$ und $[3, 3, 5]$; also ist $h(-51)=2$. Sonst ist $t\geqq 7$, $T_1\geqq 45$; wegen $[5, \pm 3, T_1/5]$ ergibt sich also $h(-\Delta)>2$.

12) Ist $t\equiv 3 \pmod 5$, so wird $25\leqq 8t+1\equiv 0 \pmod 5$, und folglich $8t+1$ nicht prim.

13) Ist $t\equiv 4 \pmod 5$, so wird $T_0=6t+1\equiv 0 \pmod 5$. Für $t=4$ ist $8t+1=33$ nicht prim. Sonst ist $t\geqq 9$ und $T_0\geqq 55$; wegen $[5, \pm 1, T_0/5]$ wird dann $h>2$.

14) Folglich darf $t\equiv 0$ oder 1 (mod 5) angenommen werden. Ausserdem wurde oben $t\equiv 0$ oder 2 (mod 3) angenommen, also muss $t\equiv 0$, 5, 6, oder 11 (mod 15) sein. Daher ist $8t+1=120m+n$, $\Delta=3(120m+n)$, wo $m\geqq 0$ und $n=\mathbf{1}$, $\mathbf{41}$, $\mathbf{49}$, oder $\mathbf{89}$ ist.

2) Es sei $k=3t+1$, also $\Delta=24t+11$, $T_0=6t+3$. Satz 2 schliesst den Fall $t=0$ aus. Ist $t=1$, so wird $\Delta=\mathbf{35}$, $a\leqq 3$, $j\leqq 1$, $T_0=9$, $T_1=11$; die einzigen reduzierten Formen sind somit [1, 1, 9] und [3, 1, 3]; also ist $h(-35)=2$. Ist $t\geqq 2$, so wird $T_0\geqq 15$, und wegen der Formen $[3, \pm 1, T_0/3]$ ist $h>2$.

3) Schliesslich sei $k=3t+2$, also $\Delta=24t+19$, $T_0=6t+5$.

31) Zuerst sei $t=5m$. Satz 2 schliesst $t=0$ aus. Also sei $t\geqq 5$, $35\leqq T_0\equiv 0$ (mod 5); wegen $[5, \pm 1, T_0/5]$ ist dann $h>2$.

32) Es sei $t=5m+1$. Dann wird $\Delta=120m+\mathbf{43}$.

33) Es sei $t=5m+2$. Dann wird $\Delta=120m+\mathbf{67}$.

34) Es sei $t=5m+3$, also $T_1=6t+7=30m+25$. Ist $t=3$, so wird $\Delta=\mathbf{91}$, $a\leqq 5$, $j\leqq 2$, $T_0=23$, $T_1=25$, $T_2=29$; die einzigen reduzierten Formen sind [1, 1, 23] und [5, 3, 5]; also wird $h(-91)=2$. Sonst ist $t\geqq 8$, $T_1\geqq 55$, und wegen $[5, \pm 3, T_1/5]$ wird $h>2$.

35) Es sei $t=5m+4$. Dann wird $\Delta=120m+\mathbf{115}$.

Hiermit ist Satz 5 in allen Einzelheiten bewiesen.

Satz 6: *Die ungeraden* $\Delta<1000$ *mit* $h(-\Delta)=2$ *sind genau die folgenden elf Zahlen:*

15, 35, 51, 91, 115, 123, 187, 235, 267, 403, 427.

Beweis: Nach Satz 5 braucht man nur die $\Delta<1000$ der folgenden Gestalten nachzuprüfen:

$$120m+n \quad (n=43,\ 67,\ \text{oder } 115;\ 0\leqq m\leqq 7),$$

$$3(120m+n) \quad (n=1,\ 41,\ 49,\ \text{oder } 89;\ 0\leqq m\leqq 2).$$

1) $\Delta=120m+43$. Satz 2 schliesst $m=0$ ($\Delta=43$), $m=1$ ($\Delta=163$), $m=2$ ($\Delta=283$), $m=4$ ($\Delta=523$), $m=5$ ($\Delta=643$), $m=7$ ($\Delta=883$) aus.

(Von jetzt an bedienen wir uns einer etwas abgekürzten Schreibweise.)

$m=3$, $\Delta=\mathbf{403}$, $a\leqq 11$, $j\leqq 5$; $T_0=101$, $T_1=103$, $T_2=107$, $T_3=113$, $T_4=121$, $T_5=131$; diese T_j sind prim ausser T_4; [1, 1, 101], [11, 9, 11]; $h=2$.

$m=6$, $\Delta=763$, $T_5=221=13\times 17$; $[13, \pm 11, 17]$; $h>2$.

2) $\Delta=120m+67$. Satz 2 schliesst $m=0$ ($\Delta=67$), $m=2$ ($\Delta=307$), $m=4$ ($\Delta=547$), $m=6$ ($\Delta=787$), $m=7$ ($\Delta=907$) aus.

$m=1$, $\Delta=\mathbf{187}$, $a\leqq 7$, $j\leqq 3$; $T_0=47$, $T_1=49$, $T_2=53$, $T_3=59$; [1, 1, 47], [7, 3, 7]; $h=2$.

$m=3$, $\Delta=\mathbf{427}$, $a\leqq 11$, $j\leqq 5$; $T_0=107$, $T_1=109$, $T_2=113$, $T_3=119=7\times 17$, $T_4=127$, $T_5=137$; ausser T_3 sind diese T_j prim; [1, 1, 107], [7, 7, 17]; $h=2$.

$m=5$, $\Delta=667$, $T_4=187=11\times 17$; $[11, \pm 9, 17]$; $h>2$.

3) $\Delta=120m+115=5(24m+23)$. Satz 3 schliesst $m=3$ $(\Delta=5^2\times 19)$, $m=4$ $(\Delta=5\times 7\times 17)$ und $m=5$ $(\Delta=5\times 11\times 13)$ aus.

$m=0$, $\Delta=5\times 23=\mathbf{115}$, $a\leqq 6$, $j\leqq 2$; $T_0=29$, $T_1=31$, $T_2=35$; $[1, 1, 29]$, $[5, 5, 7]$; $h=2$.

$m=1$, $\Delta=5\times 47=\mathbf{235}$, $a\leqq 8$, $j\leqq 3$; $T_0=59$, $T_1=61$, $T_2=65$, $T_3=71$; $[1, 1, 59]$, $[5, 5, 13]$; $h=2$.

$m=2$, $\Delta=5\times 71=355$; $T_1=91=7\times 13$; $[7, \pm 3, 13]$; $h>2$.

$m=6$, $\Delta=5\times 167=835$; $T_0=209=11\times 19$; $[11, \pm 1, 19]$; $h>2$.

$m=7$, $\Delta=5\times 191=955$; $T_2=245=5\times 7^2$; $[7, \pm 5, 35]$; $h>2$.

4) $\Delta=3(120m+1)$. Ist $m=0$, so ist $\Delta=3$, $h(-3)=1$. Satz 3 schliesst $m=1$ $(\Delta=3\times 11^2)$ aus. Ist $m=2$, so ist $\Delta=3\times 241=723$, $T_2=187=11\times 17$, $h>2$.

5) $\Delta=3(120m+41)$. Satz 3 schliesst $m=1$ $(\Delta=3\times 7\times 23)$ aus.

$m=0$, $\Delta=3\times 41=\mathbf{123}$, $a\leqq 6$, $j\leqq 2$; $T_0=31$, $T_1=33$, $T_2=37$; $h=2$.

$m=2$, $\Delta=3\times 281=843$, $T_2=217=7\times 31$, $h>2$.

6) $\Delta=3(120m+49)$. Satz 3 schliesst $m=0$ $(\Delta=3\times 7^2)$, $m=1$ $(\Delta=3\times 13^2)$, $m=2$ $(\Delta=3\times 17^2)$, also alle drei Fälle aus.

7) $\Delta=3(120m+89)$. Satz 3 schliesst $m=1$ $(\Delta=3\times 11\times 19)$, $m=2$ $(\Delta=3\times 7\times 47)$ aus. Ist $m=0$, so ist $\Delta=3\times 89=\mathbf{267}$, $a\leqq 9$, $j\leqq 4$; $T_0=67$, $T_1=69=3\times 23$, $T_2=73$, $T_3=79$, $T_4=87=3\times 29$; $h=2$.

Damit ist alles bewiesen.

Satz 7: *Es sei Δ gerade und $h(-\Delta)=2$. Entweder Δ ist dann gleich einer der drei Zahlen*

$$20, \quad 24, \quad 40, \tag{4}$$

oder Δ hat eine der folgenden vier Gestalten $(m\geqq 0)$:

$$4(60m+13),\ 4(60m+37),\ 8(30m+11),\ 8(30m+29).$$

Ist andererseits Δ eine beliebige aus den Zahlen (4), *so ist tatsächlich $h(-\Delta)=2$.*

Beweis: Man setze für gerades Δ und beliebiges $j\geqq 0$

$$U_j=j^2+\Delta/4.$$

Ist nun $[a, b, c]$ eine beliebige reduzierte Form der Diskriminante $-\Delta=b^2-4ac$, so muss b gerade sein; setzt man also $|b|=2j$, so wird $ac=U_j$. Umgekehrt folgt aus $|b|=2j$, $ac=U_j$ und der Bedingung (2), dass $[a, b, c]$ eine reduzierte Form der Diskriminante $-\Delta$ ist.

Nach Satz 4 sind nur die $\Delta=4p$ oder $8p$ $(p>2)$ nachzuprüfen.

1) Es sei $\Delta=4p$, $p>2$. Dann ist $p\equiv 1 \pmod 4$. Ist hier $p\equiv 2 \pmod 3$, so wird $U_1=p+1\equiv 0 \pmod 3$. Ist speziell $p=5$, so wird $\Delta=\mathbf{20}$, $a\leqq 2$, $j\leqq 1$; $U_0=5$, $U_1=6$; also ist $h=2$. Ist $p>5$, so wird $p\geqq 11$, $U_1\geqq 12$, $h>2$.

Folglich kann $p\equiv 1 \pmod 3$, also $p\equiv 1 \pmod{12}$ angenommen werden. Ist $p\equiv 1 \pmod 5$, so wird $p\geqq 61$, $U_2=p+4\equiv 0 \pmod 5$,

$U_2 \geqq 65$, $h>2$. Ist aber $p \equiv 4 \pmod 5$, so wird $U_1=p+1\equiv 0 \pmod 5$, $p>49$, $U_1>50$, $h>2$. Ist $p\equiv 2$ oder 3 (mod 5), so wird wegen $p\equiv 1$ (mod 12) $p\equiv 13$ oder 37 (mod 60). Dann wird aber $\Delta=4p=4(60m+\mathbf{13})$ oder $4(60m+\mathbf{37})$.

2) Es sei $\Delta=8p$, $p>2$. Ist $p=3$, so wird $\Delta=\mathbf{24}$, $a\leqq 2$, $j\leqq 1$, $U_0=6$, $U_1=7$, $h=2$. Ist $p\equiv 1 \pmod 3$, so wird $p\geqq 7$, $15\leqq U_1=2p+1\equiv 0 \pmod 3$, $h>2$.

Daher darf im folgenden $p\equiv 2 \pmod 3$ angenommen werden. Ist $p=5$, so wird $\Delta=\mathbf{40}$, $a\leqq 3$, $j\leqq 1$, $U_0=10$, $U_1=11$, $h=2$.

Ist nun $p\equiv 2 \pmod 5$, so wird $U_1=2p+1\equiv 0 \pmod 5$. Wegen $p\equiv 2$ (mod 3) ist hier $p\equiv 2 \pmod{15}$, also $p\geqq 17$, $U_1\geqq 35$, folglich $h>2$.

Ist $p\equiv 3 \pmod 5$, so ist $U_2=2p+4\equiv 0 \pmod 5$. Das kleinste p ist 23 wegen $p\equiv 2 \pmod 3$, und dann ist $U_2\geqq 50$, also $h>2$.

Ist schliesslich $p\equiv 1$ oder 4 (mod 5), so ist wegen $p\equiv 2 \pmod 3$ $p\equiv 11$ oder 14 (mod 15), also $p\equiv 11$ oder 29 (mod 30), da p ungerade ist. Dann wird aber $\Delta=8(30m+\mathbf{11})$ oder $8(30m+\mathbf{29})$.

Damit ist Satz 7 in allen Einzelheiten bewiesen.

Satz 8: *Die geraden* $\Delta<1000$ *mit* $h(-\Delta)=2$ *sind genau die folgenden sieben Zahlen:*

$$20,\quad 24,\quad 40,\quad 52,\quad 88,\quad 148,\quad 232.$$

Beweis: Nach Satz 7 braucht nur die $\Delta<1000$ der folgenden Gestalten nachgeprüft zu werden ($0\leqq m\leqq 3$):

$$4(60m+13),\quad 4(60m+37),\quad 8(30m+11),\quad 8(30m+29).$$

1) $\Delta=4(60m+13)$.

$m=0$, $\Delta=\mathbf{52}$, $a\leqq 4$, $j\leqq 2$; $U_0=13$, $U_1=14$, $U_2=17$; $h=2$.

$m=1$, $\Delta=4\times 73$, $U_2=77=7\times 11$, $h>2$.

$m=2$, $\Delta=4\times 133=4\times 7\times 19$, ausgeschlossen nach Satz 4.

$m=3$, $\Delta=4\times 193$, $U_4=209=11\times 19$, $h>2$.

2) $\Delta=4(60m+37)$.

$m=0$, $\Delta=4\times 37=\mathbf{148}$, $a\leqq 7$, $j\leqq 3$; $U_0=37$, $U_1=38$, $U_2=41$, $U_3=46$; $h=2$.

$m=1$, $\Delta=4\times 97$, $U_1=98=7\times 14$, $h>2$.

$m=2$, $\Delta=4\times 157$, $U_2=161=7\times 23$, $h>2$.

$m=3$, $\Delta=4\times 217=4\times 7\times 31$, ausgeschlossen nach Satz 4.

3) $\Delta=8(30m+11)$.

$m=0$, $\Delta=\mathbf{88}$, $a\leqq 5$, $j\leqq 2$; $U_0=22$, $U_1=23$, $U_2=26$; $h=2$.

$m=1$, $\Delta=8\times 41$, $U_3=91=7\times 13$, $h>2$.

$m=2$, $\Delta=8\times 71$, $U_1=143=11\times 13$, $h>2$.

$m=3$, $\Delta=8\times 101$, $U_1=203=7\times 29$, $h>2$.

4) $\Delta=8(30m+29)$.

$m=0$, $\Delta=8\times 29=\mathbf{232}$, $a\leqq 8$, $j\leqq 4$; $U_0=58$, $U_1=59$, $U_2=62$, $U_3=67$, $U_4=74$; $h=2$.

$m=1$, $\Delta=8\times 59$, $U_1=119=7\times 17$, $h>2$.

$m=2$, $\Delta=8\times 89$, $U_2=182=13\times 14$, $h>2$.

$m=3$, $\Delta=8\times 119=8\times 7\times 17$, ausgeschlossen nach Satz 4.

Damit sind alle nötigen Fälle nachgeprüft.

Satz 9: *Die* $\Delta<1000$ *mit* $h(-\Delta)=2$ *sind genau die in* (1) *angegebenen* 18 *Zahlen.*

Beweis: Klar nach Satz 6 und Satz 8.

Zum Schluss äussere ich Prof. Suetuna und Herrn Tatuzawa den besten Dank für ihre wertvollen Ratschläge.

Nachtrag: Ich habe gefunden, dass D. H. Lehmer zeigte: Es gibt genau neun $\Delta<5\times 10^9$ mit $h(-\Delta)=1$. (On imaginary quadratic fields whose class-number is unity; Bull. Amer. Math. Soc., Bd. **39** (1933), S. 360.)