数学の活用に関する一考察
－ゲーム理論の授業から－

数学科　三　橋　一　行

１．はじめに

これまで、1 年生の総合の時間に、私は数学活用を目指したゲーム理論の授業を行ってきた。この授業を行うきっかけは、次のような、私の授業に対する期待によるものである。

① 数学は現実に役立つこと（数学の有用性）を学ばせたい。
② 数学を用いることの良さや数学的発想が味わえる学習をさせたい。
③ 出来るだけ多くの数学の学習内容と関連させたい。
④ 身近な問題が扱え、具体的であるものを用いたい。

ゲーム理論自体は、身近なものを扱うことができ、しかも興味深い話題が多い。自分だけの利得の最大化を目指すのではなく、相手の行動も考慮に入れている点で他の数学の考え方と発想を異にしている。そこで使われている数学はかなり専門的で厳密には相当の数学力を要するが、ゲームの参加人数や戦略を絞って扱うことによって中学や高校 1 年生程度の数学で充分理解できる。一次関数、期待値や行列など比較的広い範囲の数学を用いている。こういった点でゲーム理論を題材にすると数学活用の授業としては、面白いものになっているのではないかと考えている。

ここまでの内容は、日数教の全国大会で発表し、本校の公開教育研究会では数学Ⅱの内容と関連させて、実際の授業例をご覧いただいたこともあるものである。

今回は、この授業の中で、囚人のジレンマを取り扱った場合の生徒の解答例をもとに数学の活用について考察を深めていきたいと考えている。

２．ゲーム理論を基にした授業より（混合戦略を用いた解法）

ここでは、本校の研究授業で用いた例題をとりあげ、具体的に説明したいと思う。このゲームは「２人ゼロ和ゲーム」である。つまり、参加者（プレーヤー）が２名で、他方の得点が相手の失点、あるいは失点が相手の得点となるようなゲームである。したがって従って両プレイヤーの得点の和がつねに０となるのが、「ゼロ和」の意味である。利得表という戦略と得点を表した表を用いて有効な戦略を分析する。表から明らかに求まる戦略を純戦略、計算により戦略の選択を確率で行うものが混合戦略である。

＜問題＞

箱①と箱②があります。B さんが、A さんにわからない様に、どちらかの箱にボールを入れます。それを、A さんが当てるゲームを考えます。もし、A さんが当てられたら賞金として４万円もらえます。しかし、①の箱をあけるのに２万円、②の箱を開けるのに１万円を B さんに支払わねばなりません。A さんはどちらを選ぶのが良いのでしょうか。また、このゲームを多数回繰り返す場合、(①をあける回数) : (②をあける回数）は、どんな比にするとよいでしょうか。

①　　　　　②

当れば４万円

コスト ２万円　　　コスト　１万円

1　この問題を解決する為に右のような利得表（行列）をつくる、プレーヤーA、プレーヤーBがどのように戦略を取ればよいか考えて見る。この場合の戦略とは①、②のどちらの箱を選べばよいかということになる。Aは得点を正の出来るだけ大きな数にしようとし、Bは得点を負の出来るだけ小さな数にしようとするものとする。

		B	
		①	②
A	①	2	－２
	②	－１	3

2　このような利得表での分析で解決してしまう場合もあるが、今回はそうはいかない。Aが①を選んでくるとわかれば、Bは②を選び始める。Aがそれを知れば、②を選択し始め、Bは①を選択するようになる。かくして状況はもとにもどり、堂々巡りが生じる。

3　ここで確率を導入する。Aが①を選択する確率を P とし、②を選択する確率をとおく。同様にBが①を選択する確率を Q とし、②を選択する確率を $1-Q$ とするとそれぞれの戦略の確率分布は右の通りになる。確率の積の法則を用いて求める。

		B	
		①	②
A	①	PQ	$P(1-Q)$
	②	$(1-P)Q$	$(1-P)(1-Q)$

4　以上のことから期待値 E を考える。

$$E = 2PQ - 2P(1-Q) - (1-P)Q + 3(1-P)(1-Q)$$

となり、２変数のため、手の出しようがない式に見える。しかし、展開し、整理すると

$$E = 8PQ - 5P - 4Q + 3$$

$$= 8\left(PQ - \frac{5}{8}P - \frac{1}{2}Q\right) + 3$$

$$= 8\left(P - \frac{1}{2}\right)\left(Q - \frac{5}{8}\right) - \frac{5}{2} + \frac{6}{2}$$

$$= 8\left(Q - \frac{5}{8}\right)\left(P - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

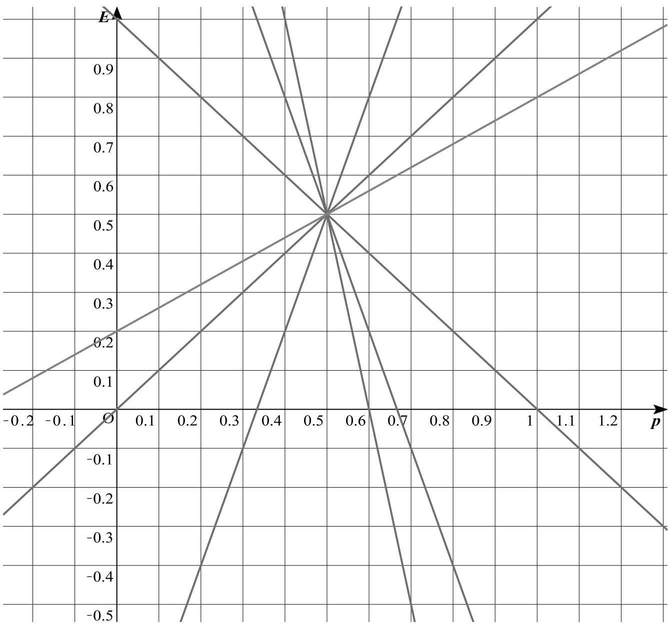
と変形する事が出来る。Q の値はプレーヤーAにとって如何ともしがたいものであるので、これを操作する事はあきらめる。しかし、

$8\left(Q - \frac{5}{8}\right) = m$　とおいて、これを与えられた「傾き」と考えて

$E = m\left(P - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$　なる直線のグラフを考える。

試しに　$m = 1,\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ 0$　などを代入した式をつくり、グラフをかかせる。

すると不動点が見つかる。（下のグラフを参照のこと）



⑤　その不動点の解釈をしてみる。

「Ｂがどのような確率で攻めてこようと、つまり、傾き m をどのように変えてきたとしても不動点にあたる P の値を取っている限り、Ｂの戦略に左右されず安定した期待値を得ることができる。」すなわち、「Ｂのいかなる戦略も封じるために $P=\frac{1}{2}$ をとってＡのコントロールできる項を０にする。そうすることで m がいかなる値をとっても、つまりＢのいかなる戦略も０（無効）にしていまうことが出来る。」と解釈できる。結果として E を最大にすることを考えるのではなく、相手の出方によらず、安定した利益を得ようとする戦略を取っているのである。この発想は今までの数学における最大化問題とは全く異なる発想である。

ヒントは必要であるが、このように解釈できたとき数学の面白さが伝わるのである。

３．囚人のジレンマ

囚人のジレンマとは次のようなものである。「ＣとＤが共犯の疑いで逮捕され、それぞれ別室で取り調べを受けている。２人とも黙秘をするなら世間を騒がせた罪でそれぞれ３年の懲役、２人とも白状すれば有罪が確定してともに８年の懲役、一方が白状し他方が黙秘するなら、白状したほうは直ちに釈放され、黙秘した方は10年の懲役、と申し渡された。それぞれの犯人たちは、白状して釈放されたいが、相手も白状してしまうと８年の刑を喰ってしまう。相棒が黙秘してくれるなら自分も黙秘して３年の懲役で済ませたいところだが、相棒が裏切って白状してしまうと自分が10年の刑を喰ってしまう。それなら、こちらから裏切って‥‥」と堂々めぐり。これが囚人のジレンマである。

		Ｄ	
		黙秘	白状
Ｃ	黙秘	3，3	10，0
	白状	0，10	8，8

ゼロ和ゲームではないので、表の中に（Ｃ、Ｄ）の形で、双方の得点（今は、懲役の年数が入ることになる。（白状、白状）の戦略が最も良いように思えるが、（黙秘、黙秘）の方が両者にとってより得なのである。しかし、相手の裏切りが怖いためにその戦略をとることが出来ないのである。このようなジレンマは社会のいろいろな場面で見いだされる。たとえば、核の保有なども当てはまる。核を全世界が手放せば、核戦争の脅威がなくなり世界平和に大きく貢献するだろう。しかし、ある国が裏切ってこっそり保有するかもしれないという裏切りを恐れるため、どの国も核を保有することで均衡を保つしかないということになる。他にも、企業の価格競争においてもこの手のジレンマに悩むという。

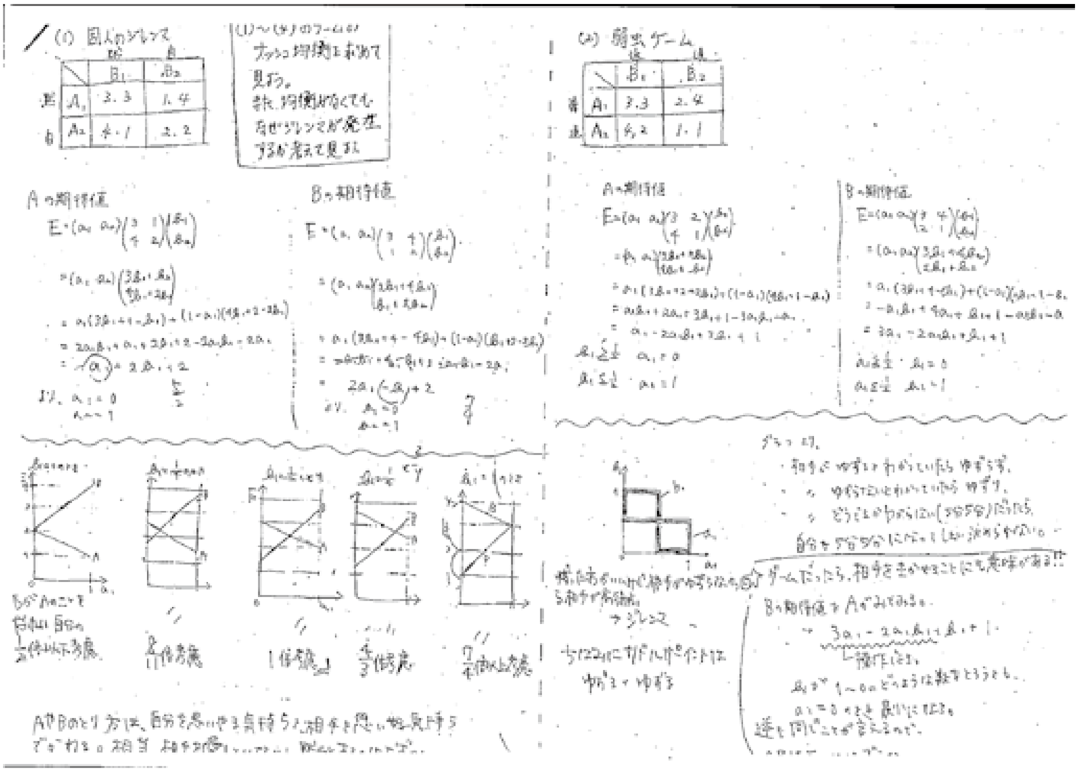
４．生徒の活用

囚人のジレンマはゼロ和ゲームではない。さらに、混合戦略による方法でも、完全

な解は得られない（両者白状の場合は利得表からも明らかに求まるが・・・）。解けないからこそジレンマなのである。だが、果敢にもこうすれば解けると主張してきた生徒がいた。

解けない問題を何とか解いてやろう、意欲のあらわれだと思われる。

以下に実際の解答（図１の左側の部分である）を示し、その考え方を説明する。



＜図１＞

まず、利得表を右のように書き換える。損得の感覚を得るためと、利得行列を１～４で表現することで、他の問題と比較しやすくするためである。このように利得表を操作しても本質的にはゲームの様子は変わらない。

		D	
		黙秘	白状
C	黙秘	３，３	１，４
	白状	４，１	２，２

表から（黙秘、黙秘）が両者にとって最も良い結果をもたらすのであるが、裏切りが怖いので（白状、白状）の手を打って被害を最小限に食い止めるしかないのである。しかも、（白状、白状）の状態に陥ると、先に手を変えた方が損をするので、ここからは動けない。ここが均衡点である。が、最も良い均衡点ではない。

ここで、混合戦略の方法をとってみる。

Ｃについて期待値を計算する。

$$E = 3PQ + P(1-Q) + 4(1-P)Q + 2(1-P)(1-Q)$$

$$= -P + 2Q + 2$$ ・・・・①

同様にＤについて期待値を計算する

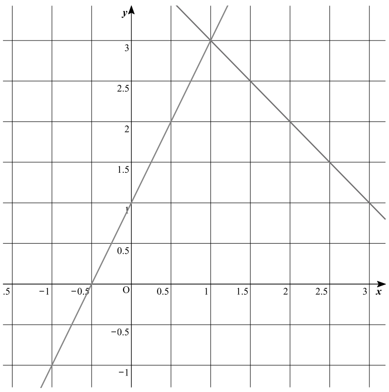
$$E = 3PQ + P(1-Q) + 4(1-P)Q + 2(1-P)(1-Q)$$

$$= 2P - Q + 2$$ ・・・・②

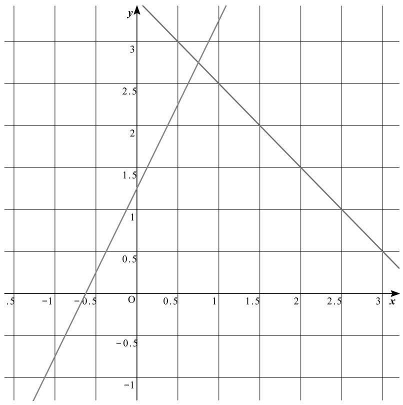
①、②より、$0 \leq P \leq 1$、Ｑ＝０、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{2}$、１として　Ｑの値について、分類をする

つまり、互いに相手のことを考える信頼度によって、結果を場合分けしたグラフを描き、解いている。（軸が x、y となってるが横軸が P で、縦軸が E、Q がパラメータと考えていただきたい。）

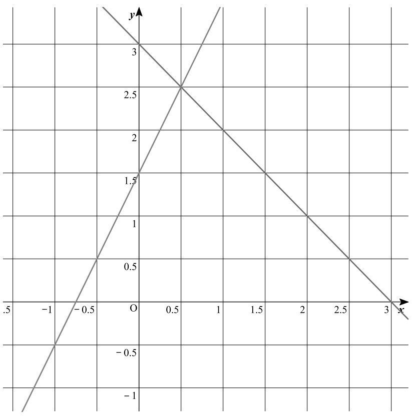
Ｑ＝１の場合



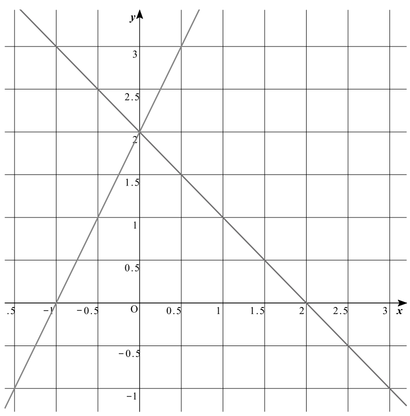
Ｑ＝１／４の場合



Ｑ＝１／２の場合



Ｑ＝０の場合



すなわち、相手が自分のことを深く考えてくれているなら、P＝１で黙秘。相手が自分のことを深く考えていないならP＝０で白状。相手が自分のことを半分程度にしか考えてくれないときは、確率１／２で白状か黙秘を決める（コインを投げるなどして)。あとは、相手が自分をどの程度考えているかに応じて、黙秘か、白状かの割合を決定して、それに応じて戦略を決める。以上が生徒の解答である。

この解答の面白いところは、相手が自分をどの程度考えているか（生徒は、相手に対する思いやり、愛と表現していた）によって場合分けをしているところである。この生徒は、P= 1/ ２のところでのＣとＤのＥの値の比によってその度合いを表現していた。それは、P= 1/ ２のときにＥの値が一致するときを五分五分ととらえて考え出したものと思われる。しかし、Ｑの取る値が、すでにＰに対する信頼度のあらわれであると考えられる。ゲーム理論のはじめのルールは、与えられた条件のなかで出来るだけ利益を上げられるようプレーヤーが合理的に判断することを前提としている。この生徒は、ある意味このルールを無視しているのであるが、進んだゲーム理論の中には、相手と手を結ぶ、協調戦略やゲームのルールの変更を考えるメカニズムデザインなどの話題がある。この生徒の発想はそれらにつながるものである。

この解答は、Ｑの値がわからなければ、結局のところゲームの解ではないといえるが、次の点で優れている

- 解けないと言われている問題に挑戦した。
- これまでの学習をもとに考えを進めている。
- 相手を出し抜くという発想ではなく、思いやりを考えに入れている点。
- 考え方がしっかりしているので、正解とは行かなくともかなり良い線まで来ている。

ゲーム理論の授業自体が数学の活用を目指したものであるが、それをもとにさらに、活用を深めていってくれたことは、教師としては嬉しい限りである。このような活用の連鎖が数学の応用力を高めてくれるのである。

５．活用について

数学の活用というと、状況に応じて適切な数学を正しく活用し、数学の有用性を実感するというイメージがある。しかし、生徒が数学の活用を行う場合には、往々にして失敗がつきものである。その中には数学的には間違いでも、活用に対する意欲や関心の点で、一概に「間違っている」というだけで片づけ難いものがある。そういった間違いの中にある「何とかして解決してみよう」という態度が、数学の探究力をより一層強めると思われる。また、そこで用いられた方法は、別な場面では立派に通用することもあるかもしれない。したがって、数学の活用を学習する際には、自由な発想で活用させてみて、その正誤もまた学習教材として生徒に判断させるような学習が考えられ、教師の評価の観点としては、発想の視点や意欲など、単に数学的な正誤より、チャレンジ精神や発想力を評価する準備が大切である。

活用にはレベルがある。それに応じて教師の指導法や評価方法も変えるべきである。例えば、次のような分類も可能であろう。

① 問題解決場面で、既習概念や公式をあてはめる。

② 問題解決場面で、発見や条件整備などを自分で行い問題の咀嚼を行ってから考えや公式を当てはめる。

③ 定義、仮説など根本条件を変更してまで、考えや公式を当てはめる。

６．今後の数学活用に向けて

生徒の数学の活用が一見して間違っているように見える場合がある。そのようなとき、単に、「駄目だ」というのではなく、じっくり分析してみる必要がある。一見、無茶な解法であっても、新しい解法につながる発想の基になっていることもある。正解に行き着いていないから間違いだと判断をするのではなく、活用にチャレンジした意欲を評価できる心構えをもって、授業に臨むことが活用を目指す教師にとって大切である。