# 数学②コース 「不動点の秘密」

数学科　内　藤　ま　り
阿　部　真由美

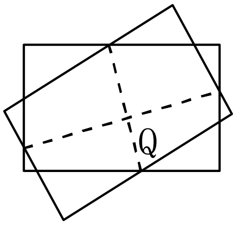
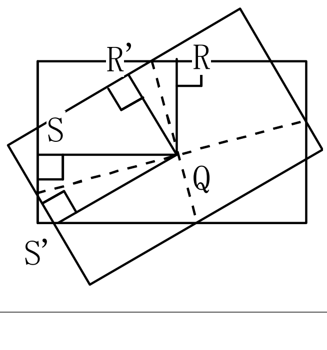
## 1　はじめに

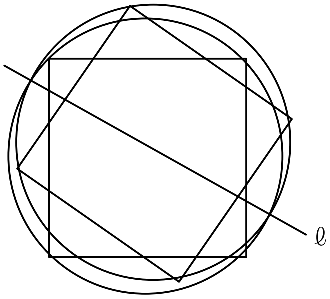
西山の定理（エレガントな不動点の作図法）からヒントを得、幾何学的な美の根拠を探求してほしく、授業を試みた。おおまかな流れ、生徒の様子を以下に示す。

## 2　授業について

※書画カメラ、OHP シート、トレーシングペーパーを使用する。

| 授業の流れ | 生徒の様子 |
|---|---|
| ①　ランダムドットが印刷された２枚の合同な正方形（ドットも重なる）をぴったり重ね、少しずらすと不動点が浮かび上がる（北極星のように)。このような点を、作図により見つけることが今日の目標である。 | 不動点が分かるランダムドット 1000 個を書画カメラで見せると皆興味深く見た。「連想するものは？」の問いかけに「星座」と答える。他のすべて（999 個）の点が動いても動かない点として不動点を説明。 |
| ②　2 つの長方形が離れた（重ならない）状態で、不動点（回転の中心）はどこにあるか考える。対応する点を結んだ線分の垂直二等分線の交点となる。<br>→ 「垂直二等分線」という考え方に気付けば十分。正確な作図はしなくてもよいが図の上で位置を確認。実際に不動点となっていることを確認して点を取る。 | 長方形の方が対応する辺がわかりやすいため、長方形で考える。<br>回転の中心を予想するが、書画カメラで見えたはずの存在しない円の弦を、なかなか発想できない。コンパスで黒板に円をかくとやっと「弦」が 、さらにかなり誘導してやっと「垂直二等分線」がでた。 |
| ③　2 枚の長方形 A,B が重なった状態のとき、不動点の位置を考え作図する。予め長方形 A を貼った印刷された紙と、合同な長方形 B を用いて、画鋲などを使って、実際にまわしてみて、不動点の位置を見つける。適当にやってもうまくいかない。②の考え方が必要なことを体感させる。 | 不動点を見つける難しさを画鋲を用いて画用紙上で体感。<br>２本の垂直二等分線の交点として不動点を画用紙上に作図。この作図が目標ではなかったのだが、ここでかなり手間取る。作図した後実際に回転して重なることを確認。不動点の位置を長方形上に後の作業で使えるように記入。（この点を P とする。） |

| | |
|---|---|
| ④　不動点を求めるための別解を、考えさせる。新たな紙（長方形Aが貼ってある）に長方形Bを③と同じ位置関係になるように写し考えさせる。<br>気が付かなければこちらから提示。<br>対応する辺の交点（各２点存在）をとり、向かい合った点を結んだ２直線の交点（Qとする）が不動点になる。<br><br> | 点Pと一致するQを見つける方法を考えるわけだが、ヒントなしでは手がでない。平行でない２直線の交点として１点が定まることをいうと、何本も線を引き始める。どのような２直線の交点かを見つける作業である。<br>不動点候補を見つけては、回転させることを繰り返し、１０分ほどで１人（３年生）が発見する。この生徒の図を書画カメラで全員にみせ、実際に２点P、Qが一致することを確認。<br>この解法の方が楽であることも、実感。<br>対応する辺の設定は２通りあるが、これは正方形で扱う際に考えることとする。 |
| ⑤　なぜ、④の方法で不動点Qが作図できるか考えさせる。<br>生徒の様子によって適宜、ヒントを与える。　点Qから対応する辺に下ろした垂線の足をそれぞれS、S’、R、R’とおくと、点Qと各点までの距離がそれぞれ一致し（QR=QR’、QS=QS’）、対応する垂線の回転角が一致すること（∠RQR’＝∠SQS’）、この２つが証明のポイントとなるので、確認する。<br><br> | 結論を示すには、まずどこを目標にするかを考えるが意見はでない。そこで、合同や相似になりそうな三角形を探して、自由に言わせてみる。玉石混交の意見を楽しむ。前へ出て発言する生徒もあった。直角三角形の合同条件、相似条件（未習生徒用には拡大・縮小）などを確認しながら、核となる部分は提示。<br>納得できたようだが、かなり疲れた様子なので、持ち帰り用に用意したランダムドットセット（正方形）を配布。実際に動かしてみるとまた元気が出た。このセットでさらに次のステップへの足掛かりとする。 |

| | | |
|---|---|---|
| ⑥ | ⑥同様にして、２つの合同な正方形 C,D を用いて不動点を作図する。正方形の場合は、不動点が４点存在する。正方形 C,D の位置関係を同じにして､別の紙に作図させる。トレーシングペーパーを用いて、その４点を写し取る。４点の位置関係を見る。書画カメラを用いて生徒が作図したものを見せたかったが、時間の関係で予め用意したものを見せた。これらの４点を通る１本の直線がかける（直線 $\ell$ とおく)。この直線は何を意味するか考えてみる。 | 対応する辺として、長方形と同様の位置関係しか発想できない。対応する辺のとり方をもう１つ示すと、あとの２通りもわかった。<br>ここで、長方形の場合にもどり、不動点が２個あることを確認してから、正方形の場合を作図（直線を２本引くのみである)。対応の仕方によっては、辺を延長して交点を求めることが必要だが、ここも難しかったようだ。<br>４点を目標時間内に仕上げた生徒はいなかった。各自確認することを指示。 |
| ⑦ | 円がかかれた OHP シートを正方形 C の外接円となるように置き、⑥で求めた４点を回転の中心として回転させてみると、正方形 D の外接円になる。直線 $\ell$ 上の別の点を中心に円を回転させても、正方形 D の外接円になることから、直線 $\ell$ がどんな直線なのか想像させる。（授業はここまで) | <br>直線 $\ell$ 上に不動点が並ぶ |

直線 $\ell$ は、正方形 C,D それぞれの外接円の交点を通る直線となっている。２つの円は、互いに直線 $\ell$ に関して対称である。したがって、対応する点は、直線 $\ell$ 上の任意の点から等しい距離にある。

まとめ

予想以上に時間がかかったのは、垂直二等分線を引く作業であった。垂直を作る際に、作図と異なり三角定規を用いることも是としたが、それでも手間取っていた。実際に手を動かすことに慣れることへの大切さを感じた。

ランダムドットを見せることで､中学生にとっては難しい証明の後も､意気が上がって取り組んでいた。実感、体感の重要性を再確認した。