数学①コース「超初級！中高生の数学とゲーム理論」

数学科　三　橋　一　行

１．＜はじめに＞

このテーマで３年前にも理数体験授業を行っている。今回は前回の反省を生かし、内容を精選することにより詰め込み過ぎになるのを避け、ポイントを絞って理解を深めることに力を入れた。この授業は次のようなコンセプトを基につくったものである。

数学の学習において重要なのは、学習に対する意欲である。意欲を高めるためには、与えられた課題が生徒にとって魅力を持っている必要がある。数学学習において導入に用いられる課題は、学年が進むにつれ「数学らしい」ものが多くなる。身近な現象でありながら、数学の良さを多く持ち、数学を活用して解決するという課題はなかなか見つけにくいものである。そこで、ジャンケンによるゲームや身近な競合場面を題材にして、経済学などで使われているゲーム理論のアイディアにより問題を解決するというのがこの授業の流れである。ゲーム理論は数学の研究対象でもあり、そこで用いられている数学はなかなか興味深いものである。その数学を中学・高等学校の数学を活用する形で解決し、数学活用の価値と数学の面白さを味わってもらおうというのがこの授業の根底にあるコンセプトである。

なお、この授業の対象生徒は中学１年〜３年生である。

２．＜授業について＞

①　ゲーム理論概要
②　確率、確率の積の法則、期待値
③　純戦略と混合戦略
④　混合戦略の場合のゲームの解法
⑤　より簡便に解を求めるには
⑥　ゼロ和２人ゲーム（各プレーヤーが２通りの戦略をもつ場合）
⑦　ゼロ和２人ゲーム（各プレーヤーが３通りの戦略を持つ場合）
⑧　囚人のジレンマ

以上のような流れで授業を進めていった。予定では⑨として⑦の結果をカードを用いて実際に検証してみようということが用意されていたが残念ながら時間切れとなってしまった。幾つか内容を整理してコンパクトにしようと努力したが、実際の検証までは手がまわらなかった。説明の時間が長すぎたと思われる。ゲーム理論には様々なエピソードがあり、興味を惹こうと話題を広げすぎてしまったようだ。

この授業のヤマは何と言っても④の部分である。ここでは、それまで当然のように思われていた「自分の利得を最大にする」というアダム・スミスに由来する考えを捨てて、相

手の手を封じる戦略を選択する。しかも相手がとるいかなる戦略にもよらず、安定した利得を得られる戦略を数学的に導き出すという部分である。いわば「利益最大化をすて、惨敗を回避する」とう考えを用いるのである。それを実現するために関わってくるのは、中学校と高等学校の授業で登場する「期待値、確率の積の法則、因数分解、１次関数のグラフ（傾き、交点)、連立方程式」である。本格的には、このあたりは確率論と線形代数学を用いて体系的にまとめられている。これ自体でも大学生や社会人にとっては、数学の応用の価値を感じられる内容なのであるが、それを噛み砕いて、中学校・高等学校での数学で説明したというところが、この授業のポイントである。以前、全日本数学教育学会においてこの授業プランを発表したところ、アドヴァイザーを務めていた大学の先生から「使っている数学が（中高生に分かりやすい）絶妙なもので良い。」との講評をいただいた。それらの数学学習の内容を活用してゲームの解が不動点として求まるのである。パソコンを利用し説明を視覚化したが、まだ未習の分野がある生徒もいて「なるほど」という反応もあったが、「難しい」と感じた生徒もいたようだ。中にはほぼ完璧に授業で教えた解法をマスターした生徒もいた。

④の内容をもう少し具体的に以下に示す。なお、例に用いた問題は、準備はしていたが、今回は使用しなかった問題を取り上げる。その理由は２つある、１つは、この原稿が本校のＨＰに載るとのことなので、今回の授業に参加した方への、復習用のサービス問題とするためである。よって問題文を読んだらその先を見ずに解答に取り組んで見て欲しい。２つ目は、以下に上げる例題は別の研究授業で用いたものである。その際、新たな研究テーマを見つけたのでそれについて言及するためである。これについては、３＜まとめと今後の課題＞をお読みいただきたい。

＜問題１＞

箱①と箱②があります。Ｂさんが、Ａさんにわからない様に、どちらかの箱にボールを入れます。それを、Ａさんが当てるゲームを考えます。もし、Ａさんが当てられたら賞金として４万円もらえます。しかし、①の箱をあけるのに２万円、②の箱を開けるのに１万円をＢさんに支払わねばなりません。Ａさんはどちらを選ぶのが良いのでしょうか。また、このゲームを多数回繰り返す場合、(①をあける回数)：（②をあける回数）を、どんな比にするとよいでしょうか。

①　　　　　　　②

当れば４万円

コスト　２万円　　　　コスト　１万円

＜解答＞

この問題を解決する為に右のような利得表（行列）をつくり、プレーヤーA、プレーヤーBがどのように戦略を取ればよいか考えて見る。

この場合の戦略とは①、②のどちらの箱を選べばよいかということになる。Aは得点を正の出来るだけ大きな数にしようとし、Bは得点を負の出来るだけ小さな数にしようとするものとする。

		B	
		①	②
A	①	2	－２
	②	－１	3

このような利得表での分析で解決してしまう場合もあるが、今回はそうはいかない。Aが①を選んでくるとわかれば、Bは②を選び始める。Aがそれを知れば、②を選択し始め、Bは①を選択するようになる。かくして状況はもとにもどり、堂々巡りが生じる。

ここで確率を導入する。Aが①を選択する確率をPとし、②を選択する確率を$1-P$とおく。同様にBが①を選択する確率をQとし、②を選択する確率を$1-Q$とするとそれぞれの戦略の確率分布は右の表の通りになる。これは、確率の積の法則を用いている。

		B	
		①	②
A	①	PQ	$P(1-Q)$
	②	$(1-P)\,Q$	$(1-P)(1-Q)$

以上のことから期待値Eを考える。

$$E=2PQ-2P(1-Q)-(1-P)Q+3(1-P)(1-Q)$$

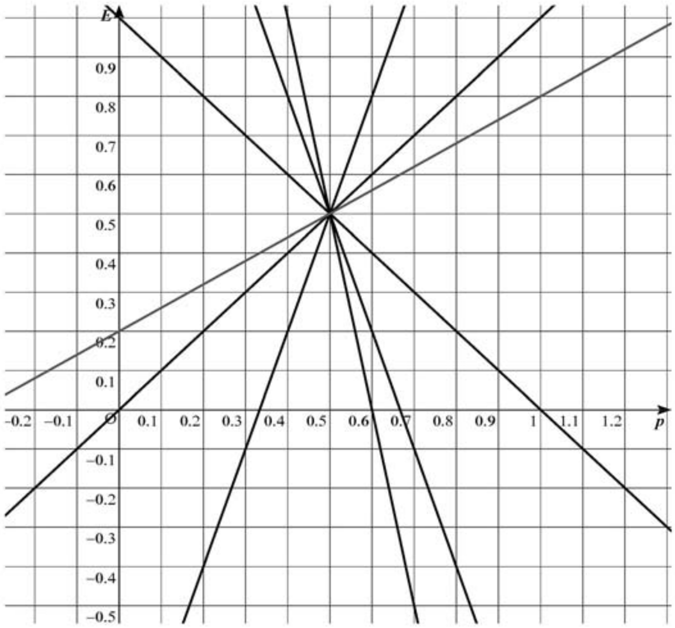
となり、２変数のため、手の出しようがない式に見える。しかし、展開し、整理すると

$$\begin{aligned}E&=8PQ-5P-4Q+3\\&=8\left(PQ-\frac{5}{8}P-\frac{1}{2}Q\right)+3\\&=8\left(P-\frac{1}{2}\right)\left(Q-\frac{5}{8}\right)-\frac{5}{2}+\frac{6}{2}\\&=8\left(Q-\frac{5}{8}\right)\left(P-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

と変形する事が出来る。Qの値はプレーヤーAにとって如何ともしがたいものであるので、これを、操作する事はあきらめる。しかし、$8\left(Q-\frac{5}{8}\right)=m$とおいて、これを与えられた「傾き」と考えて

$E=m\left(P-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$なる直線のグラフを考える。

試しに $m=1,\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ 0$ などを代入した式をつくり、グラフを描いてみると不動点が見つかる。（次のグラフを参照のこと）



不動点の解釈をしてみる。

「Ｂがどのような確率で攻めてこようと、つまり、傾きmをどのように変えてきたとしても不動点にあたるPの値を取っている限り、Ｂの戦略に左右されず安定した期待値を得ることができる。」すなわち、「Ｂのいかなる戦略も封じるために $P=\frac{1}{2}$ をとってＡのコントロールできる項を０にする。そうすることでmがいかなる値をとっても、つまりＢのいかなる戦略も０（無効）にしてしまうことが出来る。」と解釈できる。結果としてEを最大にすることを考えるのではなく、相手の出方によらず、安定した利益を得ようとする戦略を取っているのである。この発想は今までの数学における最大化問題とは全く異なる発想である。

ヒントは必要であるが、このように解釈できたとき数学の面白さが伝わるのである。

３．＜まとめと今後の課題＞

授業修了後のアンケートからすると数学の応用に興味を持ってくれたようである。期待値や確率の積の法則などは、具体例を用いて分かりやすさを心がけたが、この時間に初めて学ぶ生徒も多く、捉え切れてはいないかも知れない。しかし、大まかに概念を捉えて使っていくうちに実感を強めるということは大切なことである。細部にこだわるより、数学の

活用という目標に向けて思考をすすめることが、この授業では優先されるべきであろう。また、活用という面では、生徒にヒントを与えすぎている。本来の活用とは、問題に対して自ら既知の数学を使っていくことである。そういった面では今回の授業は活用の一例を紹介したという方がふさわしいかも知れない。この点に関しては、授業の展開や発問など、授業のやり方の工夫を重ねたいと思っている。最後に、先ほど述べた新たな研究テーマとは、次のような、研究会で出た次の質問に由来するものである。「Aの戦略が $P=\frac{1}{2}$ となるなら、このように難しく考えなくても良いのではないか」との質問である。確かに、そのとおりである。不思議なことに、わかり易い得点の表（利得表）を設定にすると必ず（証明が必要であるが）$\frac{1}{2}$ となってしまうのである。さらに、ゲーム理論による $P=\frac{1}{2}$ は、ただ、２つの戦略を五分五分にを選ぶという意味だけでなく、どちらを取り易いかという傾向を相手に気付かれるな、という意味もあるのではないかとも思われる。つまり戦略が２つの場合は、半々の確率で相手を攪乱するのが混合戦略ではベストなのではないかという予想である。これは、興味をそそられる問題であり、今後の研究テーマの１つとしている所である。いずれにせよさらなる分析と研究が必要である。

最後に、時間切れのためカードによる解の検証が出来なかったのは大変残念である。２人で各々カードをシャッフルして同時に１枚出すことにより、グー・ チョキ・パーを３分の１ずつ均等に出す場合より、解の示す戦略（割合）で出す方が勝率が良いことを実証する実験を行うはずであった。これについては、次の機会にぜひ、実践してみたい。また、授業の流れとして、このような実験から考察を深めていく理科的な授業展開も考えられるのではないかと思われる。

ともかく、様々なアレンジや発展が考えられるので、この授業実践を継続してき、より良い数学活用の授業となるよう研究を進めて行きたいと考えている。