

数学③コース：円錐の切り口の図形を描こう

数学科 阿 部 真由美

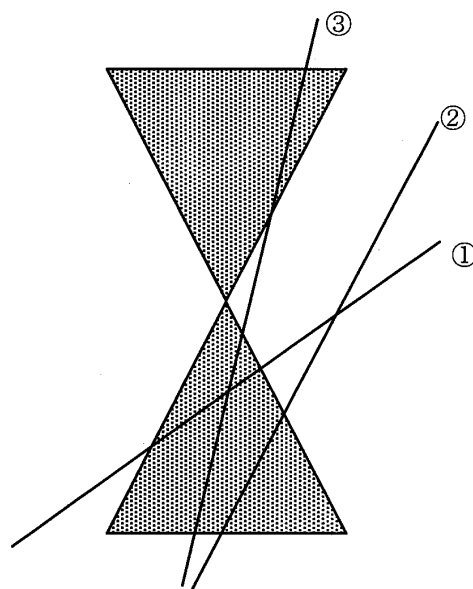
円錐の切り口の図形は、円錐曲線と呼ばれ、高等学校では数学Cの二次曲線分野で扱われる。ただし、数学Cでは、曲線の方程式を主に扱うため、立体の切り口という性質や証明まであまり扱われない。本校の教養基礎「数学I」（第1学年で履修）の授業の中では、虹が描く曲線が円錐の切り口であることに触れ、点の軌跡としてそれらを扱う。今回の体験授業でも、方程式は扱わず、点の軌跡として円錐曲線を描き、また、楕円については立体模型を用いて証明をした。

参加者は、中学1年生から3年生まで幅広く、「放物線」も未習の生徒がいたが、作業を通して図形の定義を理解し、それらの性質に気付くことができた。

1. 円錐の立体模型を用いて、切り口の図形の概形を確認

円錐をいくつかの方向から切断したときの切り口を想像してもらい、立体模型を用いて、①楕円・②放物線・③双曲線の3つの図形が現れることを確認した。

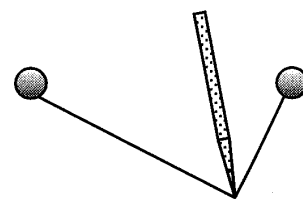
楕円は全員の参加者が分かったが、放物線や双曲線の形が現れるのはなかなか想像できなかったようである。また、切り口の図形が、中学1年で習う「(直角) 双曲線」と同じ図形であることは、少し驚いていた。



2. 楕円を描く

画鋸2つと、ひもを用いて、楕円を描いた。楕円の定義は「2定点からの距離の和が等しい点の軌跡」である。

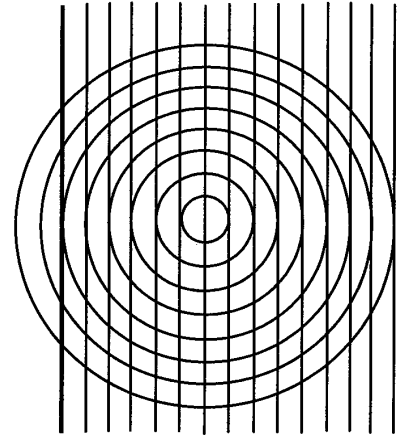
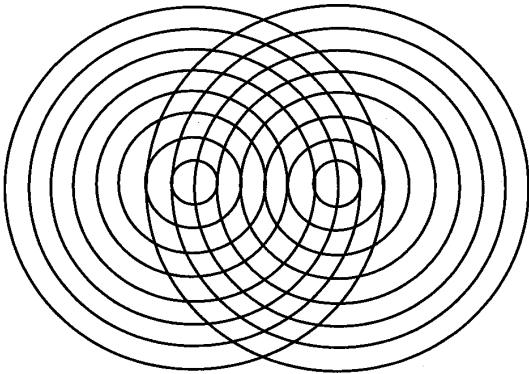
2定点（焦点）の間隔を変えずにひもの長さを短くするとつぶれた楕円が描けた。また、ひもの長さを変えずに2定点の間隔を狭くすると、楕円の形が円に近くなった。



3. 同心円を用いて楕円・双曲線・放物線を描く

下のようなワークシートを使って描いた。まず最初に、楕円は、画鋸とひもで描いたときの定義を思い出してもらい、同心円の中心が画鋸の位置、円の半径の幅を1として、ひもの長さを8にしたらどんな楕円になるか、前の作業と比較させて考えながら描いた。だんだんと意味を理解するにつれて、点を取るのも速くなり、同じシートにいくつも楕円を書くことができた人もいた。双曲線の定義は「2定点

からの距離の差が等しい点の軌跡」、放物線は、「1つの定点と、1つの定直線から等距離にある点の軌跡」ということを用いて、同じように作業した。



4. 切り口が楕円になることの証明

透明のプラシートを円錐状に丸め、その中に、大きさの違う2つの発泡スチロールの球を内接させ、その2つの球に接するような平面が円錐を切り取る図形を考えた。つまり、楕円のような図形になることは、最初に確かめたが、本当に、楕円の定義「2定点からの距離の和が等しい点の軌跡」を満たしているのかを模型を使って考えた。立体なので見方が難しく、苦勞していたが、少しずつヒントを与えていった結果、証明を完成させることができた。みな真剣に考え、最後に証明できたときにはとても感動してくれた。論理的に考えることのおもしろさを共感してくれたようで、本当に良かったと思う。

証明に使った性質は次のようなものである。

- ・球の外側の1点からその球に引いた接線の長さは同じ。
- ・それぞれの球と円錐の接点の集合は円になる。
- ・円錐の母線を1本引くと2つの球と接する（P、Qとする）。

2つの接点の間の長さPQはどの母線も同じ。

証明を終え、次のようなことが分かった。

「2つの球と切断面の接点A、Bが楕円の焦点であり、楕円の周上の点とA、Bからの距離の和は母線と球の接点の間の距離PQと同じ長さなので、一定である。」

