数学の授業より

茶　圓　幸　子

はじめに

教科書はどの会社のものも大変よくできていて、たくさんの内容を含んでいてまとまっている。

たくさんのことが含まれ過ぎていて一つ一つの説明が十分でなく、なぜここにこの問題が必要なのかの説明が省略されていたりするので、補わなければならない、もっと説明しておこうと思うことがある。

省略されている部分を補ったり、自分が生徒に伝えたいことを付け加えたりして生徒の数学への興味・関心を喚起し、やる気を起こさせ、数学を好きにさせ、自分で解く力をつけるようにさせるのが授業だと思っている。

普段の生活の中の数学に気づくこと、自然の中に存在する数学的な規則などに目を向けること、その規則の美しさを感じることなどができるようになってほしい、数学は机の上や本の中の計算だけではない身近に存在していることをわかってほしいと思いながら授業をしている。

自分が教科書に付け加えたこと、授業で工夫をしたことなどをまとめておこうと考えた。

I　三角関係

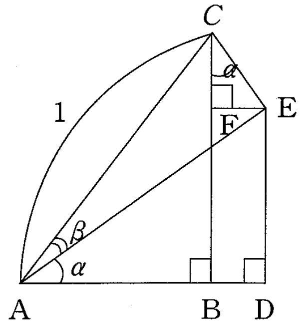
1．加法定理

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

加法定理の証明の方法はいろいろある。教科書では座標の2点間の式を使って証明するものが多いが、その他の方法を紹介し、三角比や平面幾何のトレミーの定理などの復習を兼ねて考えさせる。

①三角比・図形を使う方法1



$AE=AC\cos\beta=\cos\beta$

$CE=AC\sin\beta=\sin\beta$

$EF=CE\sin\alpha=\sin\beta\sin\alpha$

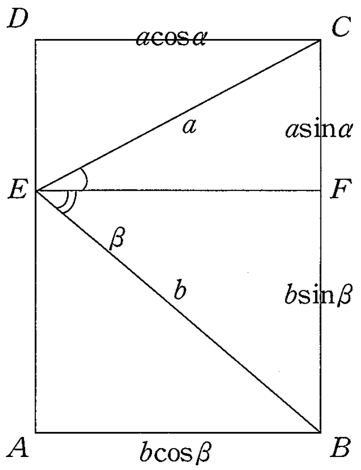
$AD=AE\cos\alpha=\cos\beta\cos\alpha$

$AB=AD-BD=AD-EF$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\alpha\sin\beta$

$$BC = BF + FC = DE + FC$$
$$= AE \sin \alpha + CE \cos \alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

②三角比・図形を使う方法２



▱$ABCD$ の面積

$FC \cdot CD + BF \cdot AB = 2 \cdot \triangle EBC$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} EC \cdot EB \sin \angle BEC$$

よって

$a \sin \alpha \cdot b \cos \beta + b \sin \beta \cdot a \cos \alpha$

$= ab \sin(\alpha+\beta)$

両辺を ab で割り、

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

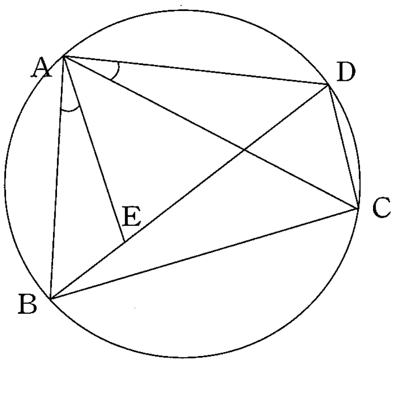
③トレミー（Ptolemy）の定理

トレミーの定理は、数学Ａの教科書に取り上げられていることが多い。この定理は円周角や、三角形の相似を使う大切な定理なので、その年に使っている教科書に載っていないときにも、とりあげて教えている。

三角関数の単元でトレミーの定理をもう一度復習をかねて証明する。

トレミーの定理は、三角関数のいろいろの定理の証明のための定理で、三角関数と密接に関係している定理である。数Ａで取り上げる時は、三角関数との関数についてあまり述べられていないので、ここでもう一度取り上げることによって三角関数と一緒に定着させたいと思う。

トレミーの定理



BD 上に $\angle BAE = \angle CAD$ となる点Eをとる。

$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$

よって $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BE}{CD}$　$AC \cdot BE = AB \cdot CD$

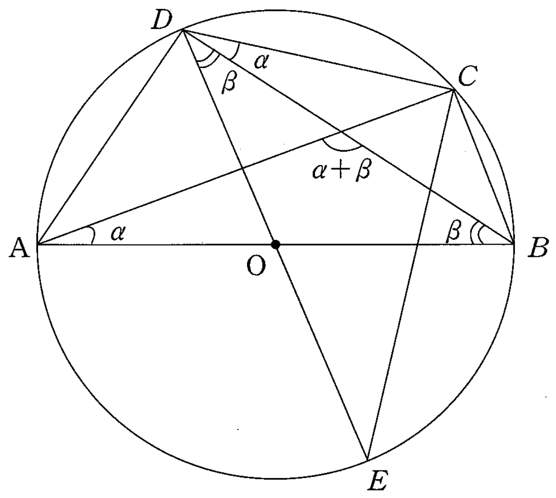
$\triangle AED \backsim \triangle ABC$

よって $\dfrac{ED}{BC} = \dfrac{AD}{AC}$　$AC \cdot ED = AD \cdot BC$

$AC \cdot BD = AC \cdot (BE + ED) = AC \cdot BE + AC \cdot ED$

$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$

トレミーの定理１



四角形 $ABCD$ は、直径１の円 O に内接する四角形。

AB，DE は直径。　$\angle CAB=\alpha$，$\angle DBA=\beta$ とおく。

すると、$\angle BDC=\alpha$，$\angle BDE=\beta$ となる。

$AC=\cos\alpha$，$BC=\sin\alpha$，$BD=\cos\beta$，$AD=\sin\beta$

トレミーの定理　$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$　に代入すると、

$1\cdot CD=AC\cdot BD-AD\cdot BC$ ……①

$=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\sin\alpha$

一方、$\triangle CDE$ において、$\angle BAC=\angle BDC=\alpha$

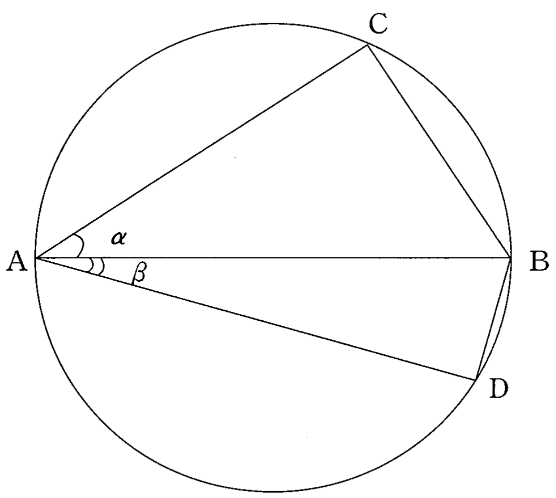
$\angle OBD=\angle ODB=\beta$

よって　$\angle CDE=\angle CDB+\angle BDE=\alpha+\beta$

ゆえに　$CD=\cos(\alpha+\beta)$ ……②

②を①に代入して　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

トレミーの定理２



円 O の直径　$AB=1$

$\angle BAC=\alpha$，$\angle BAD=\beta$ とする。

$AC=\cos\alpha$，$BC=\sin\alpha$

$AD=\cos\beta$，$BD=\sin\beta$　となる。

トレミーの定理より

$AB\cdot DC=AD\cdot BC+AC\cdot BD$

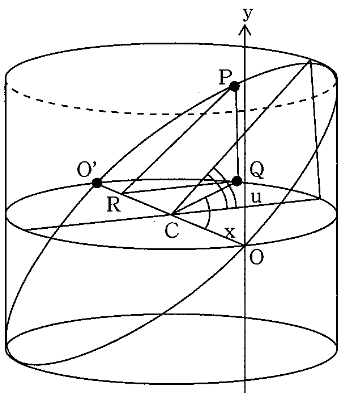
$1\cdot\sin(\alpha+\beta)=\cos\beta\cdot\sin\alpha+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

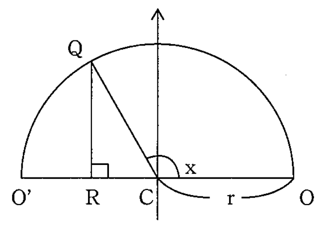
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

2．円筒の切り口

円筒の底面に平行な断面の円の中心をC、半径をｒとする。

Cを通り、底面とのなす角ｕでこの円筒を切り、この断面と円Cとの交点をO，O' とする。円弧O，Q，O' をｘ軸、Oを通る底面に垂直な直線をｙ軸とする。



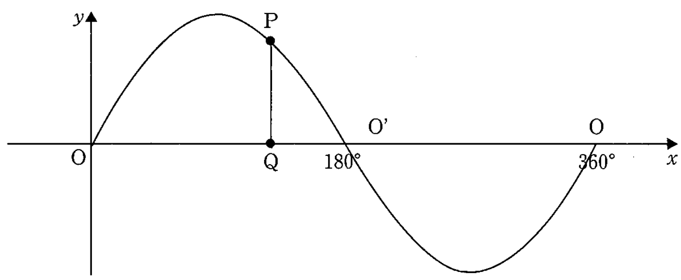


$PQ = RQ \tan u$　　$\tan u = k$（一定値）

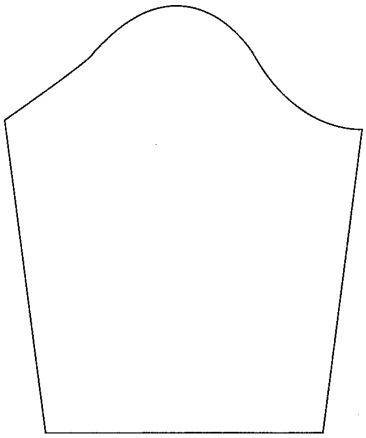
$= CQ \sin x \cdot \tan u$

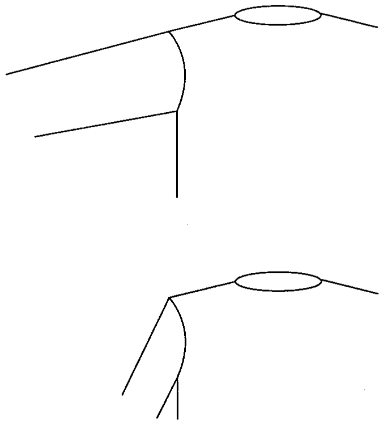
$= r \tan u \cdot \sin x$

$= kr \sin x$



円筒を切断すると、その切り口は円あるいは楕円になることは生徒はすぐにわかるのだが、それを切り開くとその切り口は正弦曲線になることを知っている生徒は少ない。トイレットペーパーの芯を使って切って見せると驚き、喜ぶ。また、ある年の教育実習生の作ってくれた模型を使い、上記の式を考えさせたり、説明したりすると、数学の自分たちが習ってきたことだけでそのことを証明できたことに大変満足する。





洋服の型紙の袖付けの部分は、腕の筒状の部分を切った切り口の曲線なので、基本的には正弦曲線である。実際は、手の動きが前側には大きく動き、後ろ向きには少ないのでその動きも考慮しなければならないが、上図の角 u を小さくとれば袖は身頃から離れ、いわゆる T シャツのようになり、u を大きくとれば袖は身頃に近づいてくる。

このように、被服などの日常の生活にも応用されていること、数学は机の上だけの学問ではないことを常に認識させたいと思う。

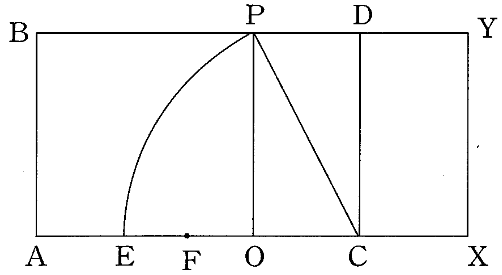
3．正五点星

正 5 点星、正 6 点星、正 7 点星、正 9 点星、正11点星を折り紙から切り抜く方法が英語雑誌 NCTM（National Council of Teachers of Mathematics）にのっていたので、それを英語で読み、実際に切り抜く作業を行わせる。作業をして、上手に切り抜けるときれいな星ができ楽しい。

しかし、正 5 点星、正 6 点星以外は近似値を使ったもので正確ではない。

正確な正 5 点星と正 6 点星について、その折り方で正確に折れることを証明させる。6 角形の証明は割合に簡単にできる。この紙上では 5 角形について証明する。

1.



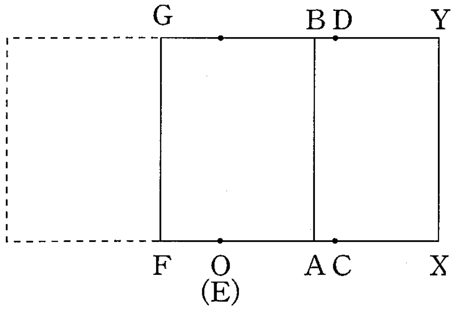
1．正方形の紙を AX で折り、半分の形にする。

C は OX の中点。

CP＝CE となる AX 上の点 E にしるしをつける。

OA＝OX＝1 とする。

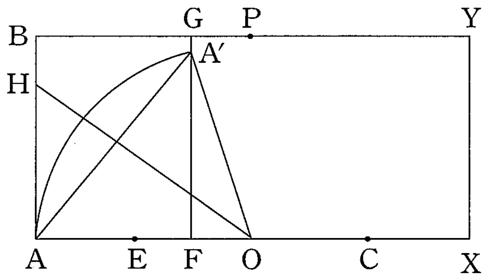
2.



2．E を O に重ねて折り、折り線 FG をつける。

（折り線をつけてもう一度ひらいておく。）

3．



3．Aを線分 FG 上に OA＝OA' となるように重ねて折り、折り線 OH とする。

∠AOH＝36° となる。

1．$OA=OX=1$ とする。

$$CP=\sqrt{CO^2+PO^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}=CE$$

2．$OF=\dfrac{OE}{2}=\dfrac{1}{2}(CE-CO)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\triangle OFG$ において　$\cos\angle A'OF=\dfrac{OF}{OA'}=\dfrac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{1}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

よって　$\angle A'OF=72°$

$$\angle HOA=\frac{\angle A'OA}{2}=36°$$

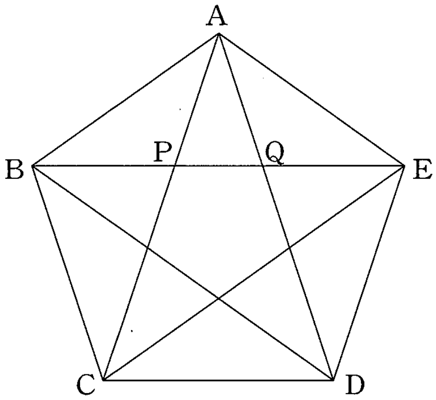
この作業をさせて、正５点星を切り取った後に、梅組の梅を切り取ったり、桜の花を切り取ったりして遊ぶ。また、正６点星を切り取った後には、雪の結晶を自分の創作で切り取らせる。大喜びで切り抜き、「飾ってほしい人は前に持ってきて黒板に飾ってください」というと、高校生でも喜んで飾りに前に出て来る。

その後に、正確に正５角形になっていることを証明させる。

その前準備として、後に述べる cos 72° の求め方、黄金比の話しをしておく。

4．cos 72°，sin 18° の求め方

①図形を使用した場合



$\triangle APQ \backsim \triangle ACD \backsim \triangle CPB$

（頂角 36°，底角 72°の２等辺三角形）

$AC=AD=1$

$AB=BC=CD=x$ とおく

$\triangle ACD \backsim \triangle CPB$ より

$$\frac{AC}{CP}=\frac{CD}{PB}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$$

よって　$x^2=1-x$　より

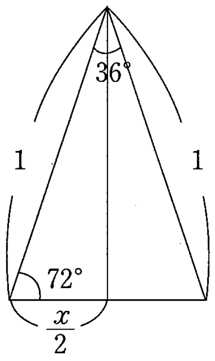
$$x^2+x-1=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$0<x<1$ より、$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$\cos 72°=\sin 18°=\frac{\frac{x}{2}}{1}=\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

＊この２等辺三角形の辺の比



$1:\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ は黄金比である。

②$\theta=18^\circ$ とおき、$5\theta=90^\circ$ を使う場合

よって　$\cos 2\theta=\cos(5\theta-3\theta)=\cos(90^\circ-3\theta)=\sin 3\theta$

$\cos 2\theta=\sin 3\theta$ より

$\cos^2\theta-\sin^2\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$1-2\sin^2\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$4\sin^3\theta-2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$

$\sin\theta=t$ とおくと

$4t^3-2t^2-3t+1=(t-1)(4t^2+2t-1)=0$

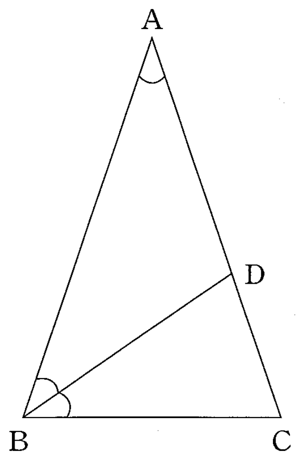
$t=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$-1\leqq t\leqq 1$ より $t=1,\ \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

よって　$\cos 72^\circ=\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

5．黄金三角形

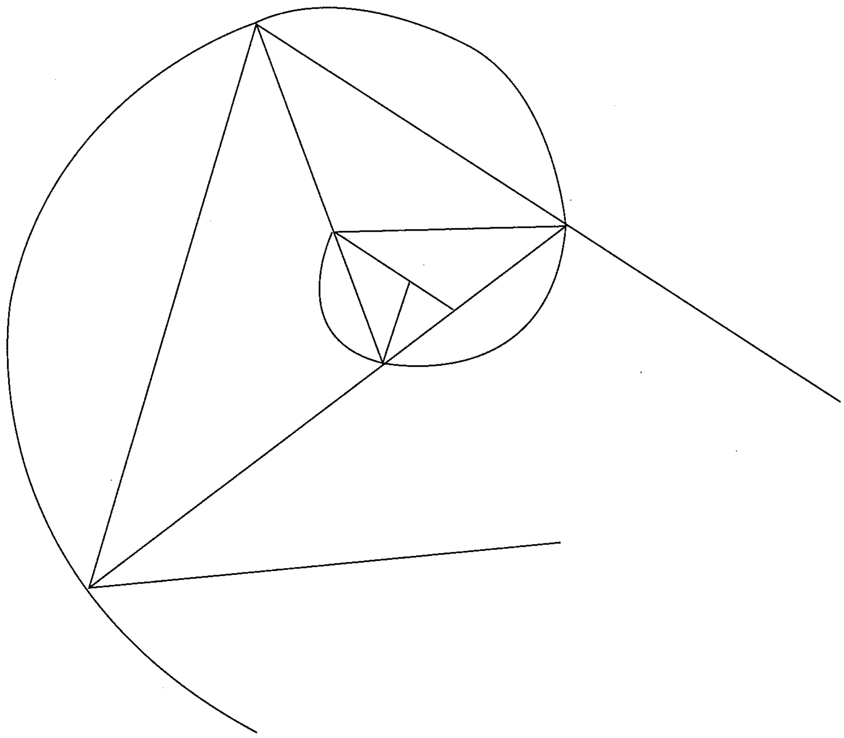
星型にできる三角形、頂角 36°，底角 72° の 2 等辺三角形はとても面白く、その等辺と底辺の比は黄金比である。



また、この底角Bの 2 等分線 BD を引くとまたもとの三角形 △ABC と相似な三角形 △BCD ができる。

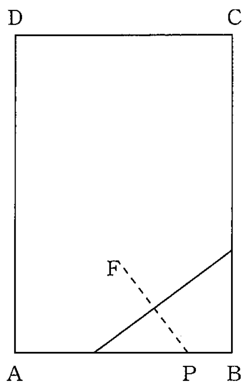
すぐわかるようにその相似比は $1:\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ の黄金比となる。

この相似な三角形を次々結ぶと螺旋ができる。



II．紙を折って作る２次曲線

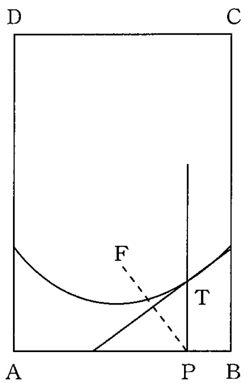
１．放物線



定点Ｆに辺AB上の任意の点Ｐを重ねて折り線をつける。

点Ｐを動かしていく。

この折線群の作る図形を考える。



Ｐからの垂線と折り線の交点Ｔをとする。

FT＝PT

よって、点Ｔは定直線 l と定点Ｆからの距離が等しいので点Ｔの軌跡は放物線になる。

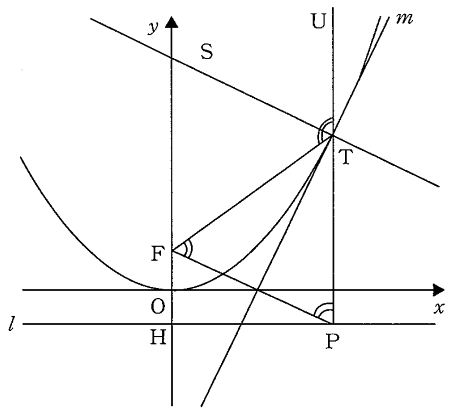
この証明はいろいろな方法があるが、ここでは、図形的な方法で行う。

TF＝TP

∴∠TPF＝∠TFP

頂角Ｔの２等分線を m とし、

Ｔにおける m の垂線を TS とすると



TS∥FP

∠UTS＝∠TPF（同位角）

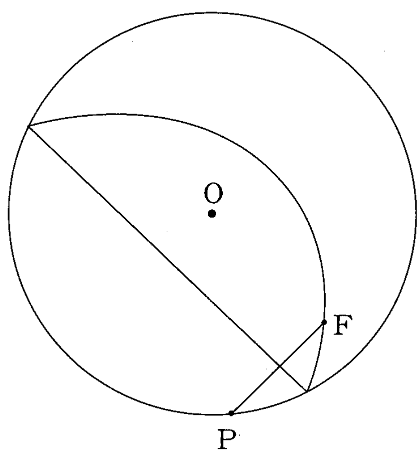
＝∠TFP（2等辺三角形の底角）

＝∠FTS（錯角）

∴∠UTS＝∠FTS

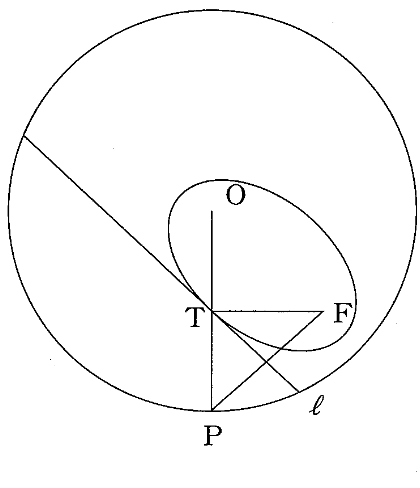
∴y軸に平行な直線UTはTで反射しTFとなる。y軸に平行な光線は放物面Tで反射しFを通る。この原理を使っているパラボナアンテナにもふれて、数学がいろいろの場面で役立っていることに気づかせるようにする。

2．楕円



中心O，半径rの円内の定点Fに周上の任意の点Pを重ねて折る。

この折り線群の作る図形を考える。



折り線ℓとOPの交点をTとおく。

TP＝TF

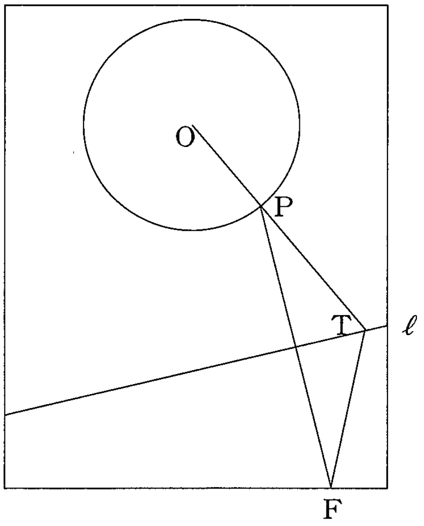
∴OT＋TF＝OT＋TP＝OP＝r（一定）

よって、点Tは2点O，Fからの距離の和が一定なので、点Tの軌跡は2点O，Fを焦点とする楕円となる。また、Fから出た光線は楕円面Tで反射しOを通る。

3．双曲線

中心O，半径rの円外の定点Fに周上の任意の点Pを重ねて折る。

この折り線群の作る図形を考える。



折り線ℓとOPの交点Tをとおく。

TP＝TF

∴OT－TF＝OT－TP＝OP＝r（一定）

よって、点Tは2点O，Fからの距離の差が一定なので、点Tの軌跡は2点O，Fを焦点とする双曲線となる。また、Fから出た光線は双曲線Tで反射しOを通る。

H14年卒業生が2年の夏休みの自由研究の課題に、証明はわからないまま、折り線で楕円を作り提出した。

その後、放物線と双曲線を作る折り線を加えて授業で扱うことを考えた。

作業が入ると生徒は一生懸命に取り組み、曲線ができるとその不思議な結果を喜ぶ。

数学Cの範囲となる、放物線、楕円、双曲線の定義も教え、図形的な証明を考えさせ、指導することができる。図形的には、上に示したように割合簡単に証明できる。

証明方法は図形的な方法以外にも、実数の存在範囲から証明する方法、微分方程式を使うなどいろいろある（添付資料参照）ので、その発達段階で、いろいろな証明方法を考えさせることができ、どのようにも応用できるので、教材として幼稚園生から大学生までのどの段階でも取り上げることができる。

2002年2月、アフガニスタン女性指導者来日の際にも紹介した。

2002年8月の現職研修で発表した際に出席していた駒場幼稚園からの要請で、2002年11月に、駒場幼稚園で園児と卒園生（年長生、小学1・2年生）とその保護者を対象にした会で話した。保護者用には、証明として添付資料を配布した。小学生は放物線を、点Fが辺から遠いと「浅いお皿」、点Fが辺に近いと「深いどんぶり」と表現した。直線の集まりが曲線になる面白さと不思議さに気づいて、その上、放物線を高校生やわれわれが考えないような言葉で表したことなど、興味深かった。

2003年、2004年の理数1日体験授業でもこの教材を扱っている。
対象が中学生なので放物線は、点Fが辺から遠いとなだらかな曲線、辺に近いと急な曲線になることを確かめた。（研究紀要第48号参照）

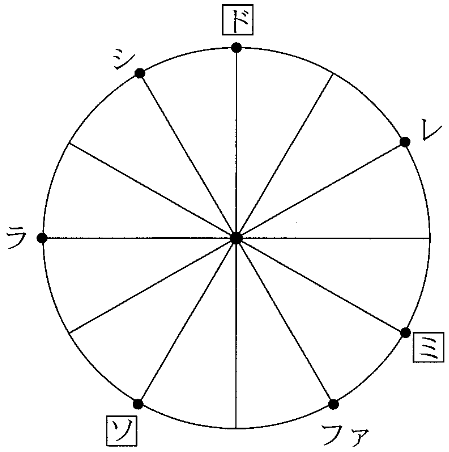
楕円では、点Fが円周から遠く円の中心に近いと円に近い楕円、円周に近いと横に広い楕円になること、円の中心OとFを結んだ直線と楕円の交点をAA′とするとAA′＝（円の半径）となることなど、図形の特徴を調べる授業を行った。（紀要参照）

毎年1年生に放物線、楕円、双曲線の話しをして、図形的な証明を行うのだが、2年生になり、「図形と方程式」を学習した後の夏休みの課題「普段は忙しくてできない研究をする」で、その放物線の表す方程式を考えて提出してきた生徒がいた。1年で学習したことを覚えていて、自分の習った新しい知識を応用してくれたことを大変うれしく思った。(研究紀要第49号7.夏休み課題「普段は忙しくてできない研究をする」参照)

この2年間、教養基礎「数学Ⅰ」では「虹の数学」の一部として包絡線の話の中で取り入れている。

Ⅲ. 音階と指数・対数

1. ピタゴラスと音



ピタゴラスは音についての研究をいろいろしている。

ピタゴラスは「三平方の定理」で有名だが、直角三角形を作る3, 4, 5の数字にもこだわっていた。

1オクターブを半音ずつにわけると12の間ができる。

基本の和音ドミソのお互いの間の数を数えると4, 3, 5になっている。

和音シレソのお互いの間の数は3, 5, 4

和音ドファラのお互いの間の数は5, 4, 3

5, 4, 3は和音、快い音と関係が深いのである。

その他、ピタゴラスは音に関して、いろいろの発見をしている。

・弦の長さと音階　(第一学習社　数学B教科書より)

数学Bで使っている教科書に調和数列についての次のような説明のページがあった。

弦の長さの比が1:2, 2:3, 3:4など整数比のとき、快く響く。

ある音に対して、その音の1番目として、高いほうへ8番目の音の弦の長さをもとの長さの$\frac{2}{3}$にし、ある音を1番目として、低いほうへ6番目の音も弦の長さをもとの弦の長さの$\frac{4}{3}$にする。ある音を1番目として高いほうへ13番目の音、すなわち1オクターブ高い音の弦の長さはもとの音から高いほうへ6番目の音から高いほうへ8番目になるので、もとの音の弦の長さの$\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$となる。

この音階の作り方で考えると、快い響きのドソドの弦の長さは1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$で、この逆数の

$1:\frac{2}{3}$, 2は公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列になる。

ファドファの弦の長さは $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ で、逆数 $\frac{4}{3}$, 2, $\frac{8}{3}$ は公差 $\frac{2}{3}$ の等差数列ラミラの弦の長さは $\frac{32}{27}$, $\frac{64}{81}$, $\frac{16}{27}$ で、逆数 $\frac{27}{32}$, $\frac{81}{64}$, $\frac{27}{16}$ は公差 $\frac{27}{64}$ の等差数列

このように逆数が等差数列になる数列を調和数列という。

2. 平均律とピタゴラスの音階

教科書では、調和数列の説明だったが、そこにピタゴラスが考えた方法で計算したドレミファソラシドの弦の長さが載っていた。

ソ	ラ	シ	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド	レ	ミ	ファ	ソ
$\frac{4}{3}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{256}{243}$	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$

(表①)

また、平均律長音階の周波数と弦の長さを調べた表を用意した。

	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
基音（ド）に対する周波数比	1	$2^{\frac{2}{12}}$	$2^{\frac{4}{12}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{9}{12}}$	$2^{\frac{11}{12}}$	2
基音（ド）に対する弦の長さの比	1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{12}}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{12}}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{12}}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{12}}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{9}{12}}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{11}{12}}$	$\frac{1}{2}$
ピタゴラスの音階	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

(表②)

平均律長音階とピタゴラスの音階の弦の長さを $\log_{10} 2=0.3010$ と $\log_{10} 3=0.4771$ だけを用いて計算し比較することで、指数・対数の指導をすることにした。

音楽が好きな生徒が多く音感のある生徒も多いので、音楽と数学の関わりを知ってほしい、音楽に結びつけたら興味がわくのではないかと考えた。

平均律長音階の弦の長さ（x）

ド　$\left(\frac{1}{2}\right)=2^{0}=1$

レ　$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{12}}=2^{-\frac{2}{12}}=2^{-0.167}$

ミ　$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{12}}=2^{-\frac{5}{12}}=2^{-0.417}$

ファ　$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{12}}=2^{-\frac{7}{12}}=2^{-0.583}$

ソ　$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{12}}=2^{-\frac{7}{12}}=2^{-0.583}$

シ　$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{11}{12}}=2^{-\frac{11}{12}}=2^{-0.917}$

ド　$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{12}}=2^{-\frac{12}{12}}=2^{-1}$

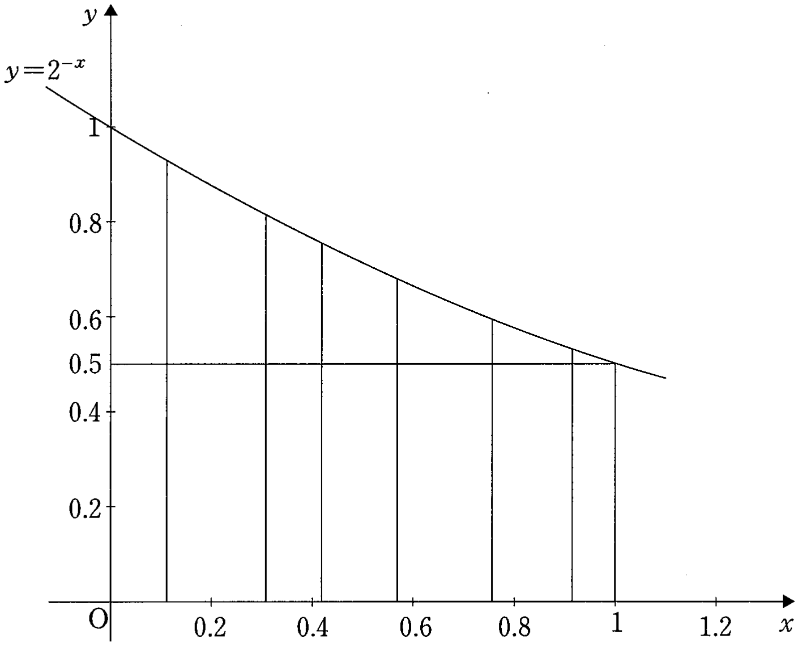
ピタゴラスの音階の弦の長さをxとおき、底が2の対数をとってを求める。

	x	$\log_2 x$	
ド	1	$\log_2 1=0$	$x=1$
レ	$\frac{8}{9}$	$\log_2 \frac{8}{9}=\log_2 2^3-\log_2 3^2$	
		$=3-2\log_2 3$	
		$=3-2\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$	
		$=-0.1701$	$x=2^{-0.1701}$
ミ	$\frac{64}{81}$	$\log_2 \frac{64}{81}=\log_2 2^6-\log_2 3^4$	
		$=6-4\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$	
		$=6-6.3402=-0.3402$	$x=2^{-0.3402}$
ファ	$\frac{3}{4}$	$\log_2 \frac{3}{4}=\log_2 3-\log_2 2^2$	
		$=\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}-2$	
		$=1.585-2=-0.415$	$x=2^{-0.415}$
ソ	$\frac{2}{3}$	$\log_2 \frac{2}{3}=\log_2 2-\log_2 3$	
		$=1-\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$	
		$=1-1.585=-0.585$	$x=2^{-0.585}$
ラ	$\frac{16}{27}$	$\log_2 \frac{16}{27}=4-3\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$	
		$=4-4.755=-0.755$	$x=2^{-0.755}$
シ	$\frac{128}{243}$	$\log_2 \frac{128}{243}=7-5\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$	
		$=7-7.925=-0.925$	$x=2^{-0.925}$
ド	$\frac{1}{2}$	$\log_2 \frac{1}{2}=-1$	$x=2^{-1}$

平均律とピタゴラスの音階の弦の長さの比較表

	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
平均律	2^0	$2^{-0.17}$	$2^{-0.3}$	$2^{-0.417}$	$2^{-0.583}$	$2^{-0.75}$	$2^{-0.916}$	2^{-1}
ピタゴラス	2^0	$2^{-0.170}$	$2^{-0.340}$	$2^{-0.415}$	$2^{-0.585}$	$2^{-0.755}$	$2^{-0.925}$	2^{-1}

(表③)



レ、ミ、ソ、ラ、シは平均律のほうが弦の長さが長いので低い音になる。

ファの音のみ平均律のほうが弦の長さが短く高い音になっている。

授業では、まずピタゴラスの音階を実際に計算させ、教科書の表（表①）を確かめさせて、その後に平均律と比べるために底が2の指数で表すようにする。(表③)

$y=2^{-x}$ のグラフで、その表の値をいれて、どちらの弦が長いのかを考えさせる。

これらの一連の計算・作業で、指数・対数・そのグラフなどの意味を考えることができ、復習・まとめになるのではないかと思う。

また、数学ソフトのMathematicaで音を作り、生徒に聴かせてみた。

あまりはっきりはわからなかったが、ファとソのあたりに両方の音に違いが感じられた。ファとソの間の間隔が一番長くなるためであろう。

周波数、弦の長さの計算には指数・対数が使われていること、音階と数学には大変密接な関係があることを示すことができたと思う。

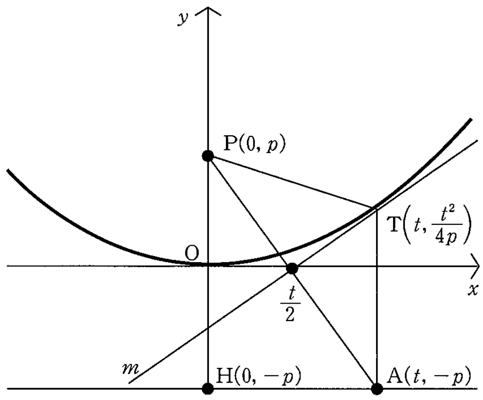
終わりに

授業は教師と生徒で創りあげるものであり、同じ授業になることはない。
興味を持ってもらえることを探して、生徒の反応をみながら教科書の合間にいろいろのことを数学で考えてみた。時には自分だけが面白がっているのではないか、生徒はちっとも面白いとは思っていないのではないかと心配になることもあった。しかし、教える自分が面白くなかったら、教わる生徒はもっと面白くないだろうと思い、自分が面白いと思うことを探して、それを生徒に伝えればよいと考え、授業をしてきた。

少しでも、数学を面白い、美しいと感じる生徒が増えていたらうれしいと思う。

折り線で作る曲線

茶　圓　幸　子



定点Pから辺 l への垂線PH　→ y 軸

PHの垂直二等分線　→ x 軸

Pの座標を(0, p)

辺 l 上の点A(t, $-p$)　とおくと　H(0, $-p$)

折り線 m　は　APの垂直二等分線

解1）

点Aを通る辺 l の垂線と折り線 m の交点をTとする

TA=TP

Tは定点Pまでの距離と定直線 l までの距離が等しい点

ゆえに　Tは放物線を描く（3年数Cで扱われる放物線の定義）

解2）

解1　における　Tの軌跡を求める

PAの傾き　$-\dfrac{2p}{t}$

PAの中点M　$M\left(\dfrac{t}{2},\ 0\right)$

折り線 m はMを通り、傾き　$\dfrac{t}{2p}$　の直線

$m:\ y-0=\dfrac{t}{2p}\left(x-\dfrac{t}{2}\right)$　より

$$y=\frac{t}{2p}x-\frac{t^2}{4p}$$

よって　$T\left(t,\ \dfrac{t^2}{4p}\right)$

Tの軌跡

$x=t$　→①

$y=\dfrac{t^2}{4p}$　→②

①②より　Tの軌跡は　$y=\dfrac{1}{4p}x^2$

解3）

APの傾き　$-\dfrac{2p}{1}$ $\Rightarrow$ mの傾き　$\dfrac{t}{2p}$

APの中点　$\left(\dfrac{t}{2},\ 0\right)$　を通る

m　：$y=\dfrac{t}{2p}\left(x-\dfrac{t}{\cdot 2}\right)$

$t^2-2xt+4py=0$　　for $\forall$ t　　$\to$①

m　の通る領域

$\dfrac{D}{4}=x^2-4py\geq 0$ $\Rightarrow$ $y\leq\dfrac{1}{4p}x^2$

解4）

①が包絡線となる図形

①を t で微分　　$2t-2x=0$　　$\therefore$　$x=t$　$\to$②

①　②より t を消去

$x^2-2x^2+4py=0$　　　　$\therefore$　$y=\dfrac{1}{4p}x^2$

②寄り①の式は　　$y=\dfrac{1}{4p}x^2$　の　$x=t$　における接線