夏休み課題：「普段は忙しくてできない研究をする」

茶　圓　幸　子

1.　はじめに

毎年２年生の夏休みに、「普段は忙しくてできない研究をする」という課題をだす。

その時点までに習っていることをもとに、数学に関する研究課題を自分で考え、レポートにまとめて提出させる。

自由研究なので、生徒がどのようなことに興味を持つのかがわかって面白い。

自分の興味のあることを研究し、数学が日常生活の中に生きていることを知り、身近に存在する不思議なおもしろいことであることを知ってほしいと思い、この課題を出すことを続けている。

毎年、生徒会誌「お茶の水」に面白いものを掲載するが、今年は公開教育研究会の授業でいくつかを発表させようと準備をした。

2.　準　　備

公開教育研究会の授業で発表する生徒を決めるために、提出された作品の一覧を作成し（添付資料２参照）生徒に配布し、お互いの提出物は、プリント、回覧などで、みることができるようにしたうえで、生徒に「発表を聞きたいもの」のアンケートをとった。

アンケートをとることにより、また、生徒の興味を持ち、面白いと考えることがわかってくる。

発表者以外の生徒の作品は、内容をプリントして回覧するもの、会誌「お茶の水」に掲載するもの、折り紙や立体などの、プリントにできないものは実物を回覧するよう３通りにわけて、生徒たちお互いが、お互いのものを見ることができるように心がけた。

3.　夏休みの課題

本校の２年生のカリキュラムを下に記す。

２年生　「数学II・B」

教科書　高等学校　数学II　竹之内脩　編　文英堂

　　　　高等学校　数学B　竹之内脩　編　文英堂

２年次数学

数学II　３単位（HRのクラス単位で行う）

数学B　２単位（習熟度別　A、B、Cの３クラスで行う）

カリキュラム

	数学II	数学B
１学期	第１章　図形と方程式 §１　点の座標 §２　直線 §３　円 §４　軌跡と領域	第１章　ベクトル §１　ベクトル §２　ベクトルと図形 §３　ベクトルと空間座標
２学期	第２章　三角関数 §１　三角関数 §２　加法定理 第３章　指数関数・対数関数 §１　指数関数 §２　対数関数	第２章　複素数と複素数平面 §１　複素数と方程式 §２　高次方程式
３学期	第４章　微分と積分 §１　微分係数と導関数 §２　導関数の利用 §積分法	§３　複素数平面

１学期の終わりに「図形と方程式」が終了するので、添付資料１の夏の課題「普段は忙しくてできない研究をする」をだす。添付資料１参照

自分で研究の課題を考えることができないという生徒のために、ヒントとして例１、例２をつけておく。

例１は、指示どおりのグラフを同一座標平面上に描くと、それぞれ「ドラえもん」と「ミッキーマウス」が描ける。(「ミッキーマウス」は平成９年の２年生徒の作品）添付資料１参照

例２は、グラフの移動。ｔの値を０から１まで動かすと、グラフは $y=f(x)$ から $y=g(x)$ へと移動する。アニメーションなどにも使われている技法である。

教科書の問題を解くだけでなく、習ったことをもとにして、少しでも自分で考え、試みてほしいというのがこの夏休みの課題の目的である。

また、課題提出が夏休み後の９月で、教育実習生が実習をしている時期なので、実習生に始めに課題をみてもらう。そして、一覧表を作成して、自分が面白いと思ったものを選んでおいてもらう。これは、実習生自身の勉強にもなる。生徒が興味を持つことがわかり、生徒の実力もわかる。そして、実習指導教官である私にとっては、実習生の実力もある程度わかるわけである。

４．生徒の作品

参考：添付資料２

題の「図形と式」は、例１を参考にして、自分で描く図形を考えて、その式を計算したものである。式は多くなるので載せていない。添付資料３が、完成した図形とそれを描くために使用した式の数であ

る。備考欄には、「絵のプリント」としてある。

添付資料１の例１の「ミッキーマウス」は平成９年の２年生の作品である。この生徒は決して数学が得意な生徒ではなかったのだが、このような力作を作って、提出してくれて、これを考えている時は楽しかったと感想に書いている。数学を指導している私にとって大変うれしい反応であった。

備考欄の「プリント配布」は、生徒全員にプリントをし、配布したものである。本紀要には、そのうちの＊印のついた３点を載せる。添付資料４

備考欄の「公開授業発表」は、2003年11月14日の公開教育研究会の授業で発表してもらった研究である。公開教育研究会の授業については、本紀要の“公開教育研究会「数学II」”を参照していただきたい。

参考資料として、当日の発表の参考として配布した資料４点を添付する。発表者が自分の研究を発表用にまとめたものである。添付資料５

備考欄の「回覧」は、折紙や立体のもの、あるいは道具がついたパズルなどの、プリントにできないもので、作品そのものを生徒に回覧したものである。これらは、優秀な面白いものでも、紀要にも会誌「お茶の水」にも掲載が難しく、紹介が困難なので、大変残念である。

備考欄の「会誌に掲載」は、会誌「お茶の水」に掲載したもの。パラドックス、パズルなどは、１年生が読んでも面白さが伝わるのではないかと思い、会誌に掲載することにした。

5．考　　察

(1)　公開教育授業での発表

添付資料５参照

この４つは、生徒の投票をもとにして、公開授業にふさわしいもの、たとえば作業を皆でできるもの、紙を折る、切るというような、プリントではわからないので授業中に発表形式がよいと思われるものなどを選んだ。

NO.2とNO.37のメビウスの輪についての研究は同じ題材を全く違う観点から研究しており、２つ共によく研究されていて、生徒のアンケートでも「発表を聞きたい」と人気があったので、公開研究会の授業で発表させた。

お互いの発表を手伝いながら、よい発表をしてくれた。

NO.2は、１ねじり、２、３ねじりのメビウスの輪を２等分、３等分したものなどがどのような形になるのか、という根気のいる研究をしているのだが、公開研究会の時は時間の制約があり、１ねじり、２ねじりを２等分したものを全員で作ってみた。全員が驚いて感動する結果がでた。

NO.37は、子どものころ遊んだ３面が出る面白いおもちゃが、メビウスの輪を使っていることに気づき、メビウスの輪を複数回ねじればもっとたくさんの面が出るものにならないかと、夏休み以後も研究を続け、とうとう６面が出るものを考えた。公開研究会の発表会の時は、それらの面に自分で、絵を描

き、お話をつけて6面を出してみせる発表となり、本当に楽しく数学を考えることができた。

NO.9は、始めは幾何学的な証明かと思って調べ始めたが、証明の過程で3次方程式の解の話・整数・有理数・実数の話になり、数学のあらゆることにつながっていくことに驚き、数学の奥の深さを感じたということであった。

当日配布の参考資料としては「数の歴史」という題で数の話をまとめている。

NO.19は、生徒の票の大変多かったものである。実測値と確率の計算で出した値とがきれいにあっていて、面白かったとのこと。今年（2003年）は曇りの日が多かったのだが、来年・再来年と後輩の誰かが同じ研究をして比べていったら、これはまた面白くなるであろうと思う。

(2) プリント配布したもの

添付資料4参照

NO.1、NO.10、NO.22は、折紙で折ったものがレポートに貼り付けてあったりして、プリントではわかりにくいものもあったのだが、そのままコピーして、配布した。折紙の不思議な話を数学の時間によくするので、興味をもち、色々と調べた生徒が多かったようである。

(3) 回覧したもの

公開研究会で発表したNO.9の作図不可能問題、回覧したNO.17のｅの近似、NO.24のカオス、会誌掲載のNO.30のポンスレの定理などは、難しい大学で扱うような定理について、調べている。難しいものなので、すべてを理解することはできなかったと思われるが、このような定理にふれること、現在高校で学んでいる数学が発展するとこのようなことにつながるのだということを知ることも大切だと思う。現在の彼女達なりに理解してまとめていた。これらは長くなるので、コピーせずに回覧とした。

NO.6、NO.14、NO.29、NO.35、No.40は、授業で習ったこと、あるいは、いままで気にかかっていた事を自分で証明して確かめている。自分で確かめて納得することは大変に大切なことで、そのようなことをみつけてくれたことがうれしかった。

NO.33は、パズルで道具がつけてあるので回覧せざるを得なかった。皆でパズルを考える時間がないことが残念である。課題提出後、「先生、解けた？」と、聞かれた。「難しかった。１通りの解き方はわかったけれど、他の解き方はできなかった。」と答えたが、生徒にとっては、提出した課題をこちらがどのように扱ったのかは、気になるところであろう。

(4) 絵をプリントして配布したもの

添付資料3参照

自分で絵を考え、それを式に表す事は、思っている以上に大変な作業である。式の数を見ればわかるであろう。しかし、それができることが面白く楽しい。直線の式、円の式、放物線の式など、その時点

までに習ったことを総動員すると、殆どの絵がそれらの式で表す事ができる。そのことに感動したと感想に書いている生徒が多かった。楽しみながら「図形と式」を学ぶことができたと思う。

(5) 会誌に掲載したもの

NO.5のパラドックス、NO.16のパズルは、1年生にも面白いだろうと思い、会誌掲載とした。NO.30は、難しいものだが、自分なりに証明をし、わかりやすくなっているので、少し高度であった2、3年生なら理解できるであろうし、このようなことに挑戦してほしいという意味を含んで掲載することにした。

今回の課題の中では、

No.2とNO.37のメビウスの輪

NO.10とNO.20は折り紙に内接する正n角形

NO.18とNO.26は正20・12面体に関連した内容

NO.26とNo.36は黄金比

というように、お互い関連の深い内容について調べている。

これらの関連をプリントを配布した折の授業で紹介を兼ねて話した。

この課題は、過去4、5年にわたり、出し続けている。

平成13年の2年生徒の夏休み課題で、「円の内部に1点をとり、円周上の任意の10点ほどをその1点に重ねて折っていくと、その折り線は楕円に見える」という「折り線でできる曲線」という研究を提出した生徒がいた。

今回の2年生が1年次の昨年、この研究を発展させた、「長方形の内部に1点をとり、長方形の1辺上に任意の10点ほどをその1点に重ねて折っていくと、その折り線は放物線に見える」ということを示した。

NO.22は、「図形と方程式」を習ったので式で表せるようになった、とその放物線を式で表したものである。

また、前述したように、NO.19の研究を来年、再来年と続けていってくれる生徒がいるとおもしろい。

このように、夏休みの課題が、何年にもわたって、広がっていくことが楽しみである。

6. 公開授業教育研究会

本紀要「数学II　公開授業教育研究会より」参照

添付資料5参照

7. おわりに

数学を楽しんでできるようになってほしいと思って毎年この課題を夏休みに課題として与える。

何年か続けてみて、気がついてみると、普段の授業の教材もこの課題に提出された作品、あるいはそれを自分で発展研究したことを使っていることが多くなっていた。生徒の研究は面白く、今の私の財産であると思っている。生徒は無限の可能性をもっていると思う。学校の教科書の中の事だけが数学ではない、数学は日常の生活の中のあらゆるところに存在していて、今までに習った数学を使うとこんなに面白いことができる、こんな難しそうにみえることもわかる、…ということに気づいてほしいと思う。

このような研究をさせ、提出させて、発表をさせると大変面白く、生徒も面白く勉強できると思うのだが、満足できるまでやるには時間が足りない、今回も理想的には全員に発表させることであるが、物理的時間が足りない。

しかし、これが本来の勉強なのではないかとさえ思うことがある。

また、この2年梅組の生徒たちは理系進学希望者が40人中22人と非常に多い。それはうれしいことであるが、私個人は、数学が好きな者が文系に進んでくれて、あらゆる分野の人が数学を使うことをおっくうがらずに自分の分野に数学を応用してくれたらそれもまた大変うれしいことだと思う。

理系、文系を問わずに皆が数学を愛してくれることが私の理想である。

添付資料１

数学Ⅱ　夏休み課題

「普段は忙しくてできない研究をする」

課題ヒント

- ★　グラフの式を組み合わせて絵を描く。(例１) ①, ②
- ★　ｔを用いて書かれた式のｔを動かしてみる。(例２)

（例1） ①

次の方程式のグラフを描け

1 $y=x \quad \left(\frac{3}{2} \leqq x \leqq 4\right)$

2 $y=\frac{1}{4}x \quad \left(2 \leqq x \leqq \frac{11}{2}\right)$

3 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \quad (2 \leqq x \leqq 5)$

4 $x^2+(y-2)^2 \leqq \frac{1}{9}$ （赤くぬる）

5 $x^2+(y-2)^2=9 \quad (y \leqq 0)$

6 $(x-1)^2+(y-3)^2 \leqq \frac{1}{25}$ （黒でぬる）

7 $(x-1)^2+(y-3)^2=1$

（1, 2, 3, 6, 7 をy軸に対称にコピー）

8 $x^2+y^2=5 \quad (y \leqq 0)$

9 $\left.\begin{array}{ll} x^2+(y+1)^2 \geqq 16 & (-4 \leqq y \leqq 2) \\ x^2+y^2 \leqq 25 & (-4 \leqq y) \end{array}\right\}$ （青くぬる）

10 $x=0 \quad \left(-1 \leqq y \leqq \frac{5}{3}\right)$

11 $y=-4 \quad (-3 \leqq x \leqq 3)$

12 $x^2+(y+5)^2=\frac{1}{4}$

13 $y=-5 \quad \left(-3 \leqq x \leqq -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \leqq x \leqq 3\right)$

14 $(x+3)^2+(y+9)^2=16 \quad \left(\begin{array}{l} x \leqq -3 \\ y \geqq -9 \end{array}\right)$

15 $\left(x+\frac{11}{2}\right)^2+(y+9)^2=\frac{9}{4}$

16 $(x-6)^2+\left(y+\frac{13}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

17 $y=-8 \quad (4 \leqq x \leqq 6)$

18 $x^2+(y+9)^2=9$

19 $x^2+(y+9)^2=4 \quad (y \leqq -9)$

20 $y=-9 \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$

21 $x=4 \quad (-13 \leqq y \leqq -8)$

22 $x=-4 \quad (-13 \leqq y \leqq -9)$

23 $\frac{(x-2)^2}{4}+(y+13)^2=1$

（23 をy軸に対称にコピー）

24 $x=6 \quad (-9 \leqq y \leqq 4)$

25 $x=15 \quad (-1 \leqq y \leqq 4)$

26 $y=4 \quad (6 \leqq x \leqq 15)$

27 $y=-1 \quad (6 \leqq x \leqq 15)$

28 $y=x-5 \quad (6 \leqq x \leqq 8)$

29 $y=-x+11 \quad (8 \leqq x \leqq 10)$

30 $y=0 \quad (7 \leqq x \leqq 9)$

31 $y=1 \quad (7 \leqq x \leqq 9)$

32 $y=\frac{3}{2} \quad (7 \leqq x \leqq 9)$

33 $x=7 \quad (0 \leqq y \leqq 1)$

34 $x=9 \quad (0 \leqq y \leqq 1)$

35 $y=\frac{3}{2}x-14 \quad (10 \leqq x \leqq 11)$

36 $y=-x+\frac{27}{2} \quad \left(11 \leqq x \leqq \frac{23}{2}\right)$

37 $y=x-\frac{19}{2} \quad \left(\frac{23}{2} \leqq x \leqq \frac{25}{2}\right)$

38 $y=x-11 \quad \left(\frac{23}{2} \leqq x \leqq \frac{27}{2}\right)$

39 $y=-x+\frac{29}{2} \quad (12 \leqq x \leqq 14)$

40 $y=1 \quad \left(12 \leqq x \leqq \frac{27}{2}\right)$

41 $y=0 \quad \left(12 \leqq x \leqq \frac{27}{2}\right)$

42 $x=12 \quad (0 \leqq y \leqq 1)$

43 $x=\frac{27}{2} \quad (0 \leqq y \leqq 1)$

44 $y=\frac{5}{2} \quad \left(10 \leqq x \leqq \frac{23}{2}\right)$

45 $x=11 \quad (0 \leqq y \leqq 3)$

46 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{37}{4} \quad \left(\frac{25}{2} \leqq x \leqq \frac{27}{2}\right)$

（例１）　②

☆ 次の式を同一平面上に描くと何ができるでしょう。

① $x^2+(y+2)^2=\frac{9}{4}$　$(y\leqq -2)$

※② $y=-1$　$(2\leqq x\leqq 3)$

③ $x^2+(y-\frac{1}{2})^2=9$　$(y\leqq -1)$

④ $x^2+(y+2)^2=4$　$(y\leqq -3)$

⑤ $x^2+y^2=16$　$(y\geqq -1)$

※⑥ $y=x-5$　$(\frac{3}{2}\leqq x\leqq 4)$

※⑦ $(x-\frac{3}{2})^2+(y-1)^2=\frac{13}{4}$　（$x\leqq 2$ かつ $y\leqq 2$ を消す）

（ヒント：$x=0$ のときの y の値を考える）

※⑧ $x^2+y^2\leqq 16$ かつ $(x-\frac{3}{2})^2+(y-1)^2\geqq\frac{13}{4}$

かつ $(x-4)^2+(y+3)^2\geqq 9$ かつ $y\geqq 0$ ~~$x\geqq 2$~~ を黒くぬる

⑨ $x^2+(y+1)^2\leqq\frac{1}{4}$ を黒くぬる

※⑩ $y=0$，$y=\frac{3}{2}$　$(\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{3}{2})$

$x=\frac{1}{2}$，$x=\frac{3}{2}$　$(0\leqq y\leqq\frac{3}{2})$

⑪ $x^2+(y+5)^2\leqq 4$ かつ $x^2+(y+2)^2\leqq\frac{9}{4}$ を赤くぬる

※⑫ $\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ かつ $0\leqq y\leqq 1$ を黒くぬる

※⑬ $(x-4)^2+(y-4)^2\leqq 5$ かつ $x^2+y^2\geqq 16$ を黒くぬる

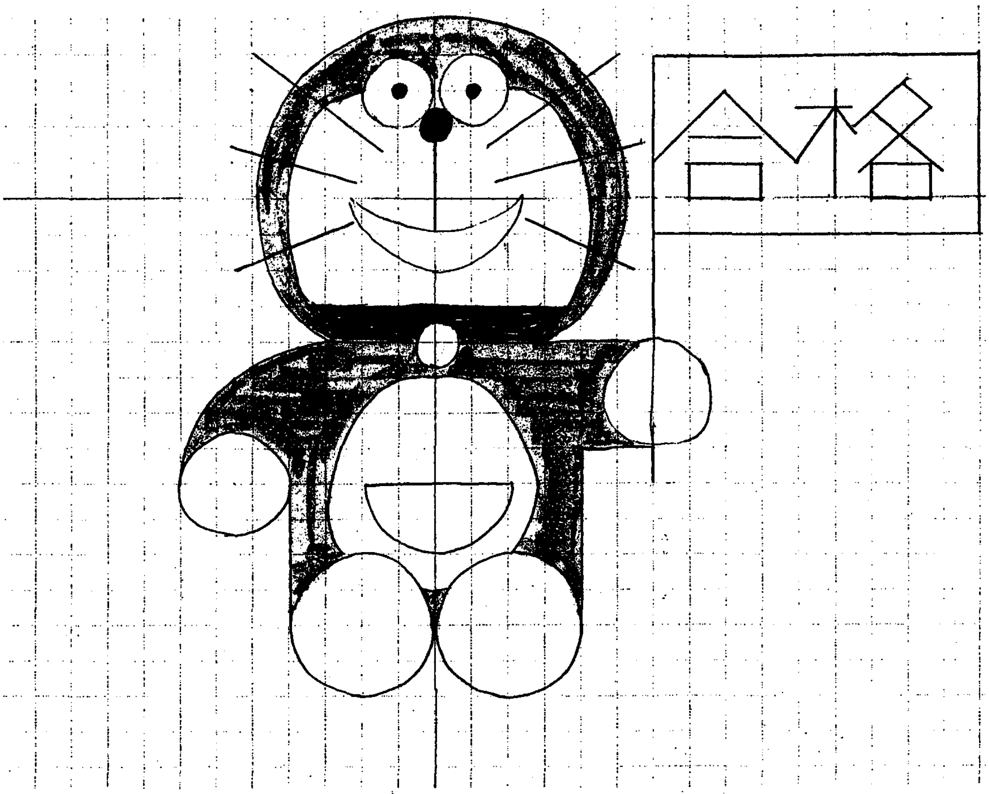
※印は y 軸に関して対称に描く

（例２）$f(x)=x^2+1$，$g(x)=2x+3$ とするとき

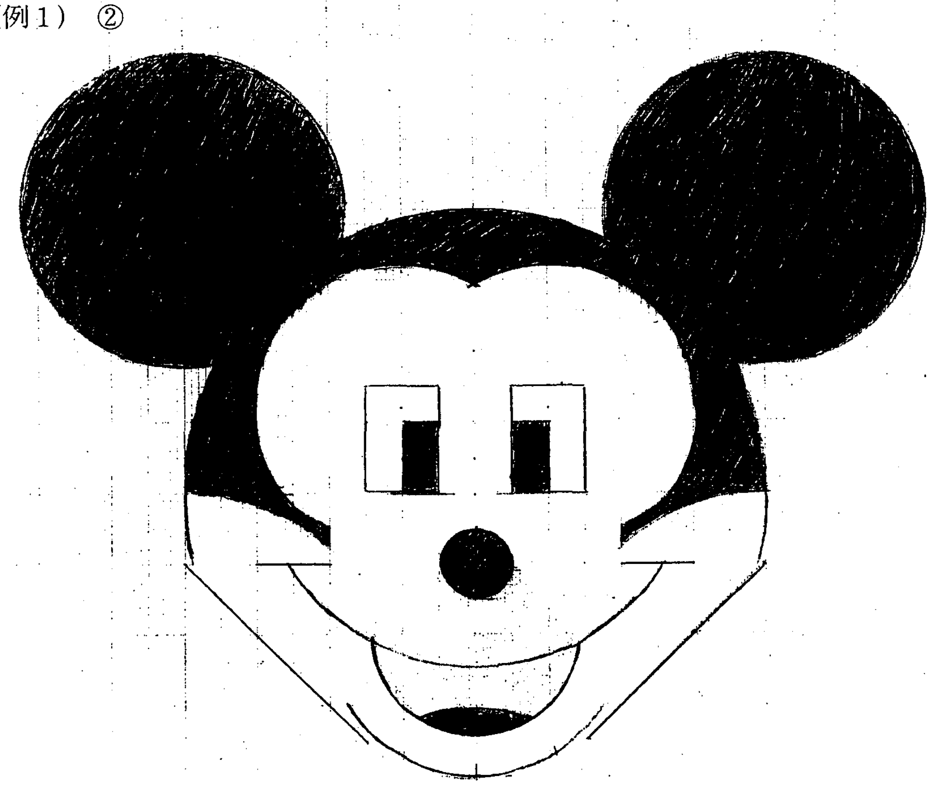
$y=(1-t)f(x)+tg(x)$ のグラフを描く

t を 0から1までの間の数で動かしてみる

（例１）　①



（例１）　②



資料 2

夏休み課題 （普段は時間がなくてできない数学の研究をする）

氏名	題 図形と式		内容要旨	感想・その他	備考
1			折り紙を用いて、1/2 、1/3・・の面積になる正方形の折り線を考える	授業でとり扱って面白そうだと思ったのだが、難しかった	＊プリント配付
2		メビウスの輪（輪）	紙テープを使い、ねじりながら輪を作り、それをつぶした時の折り目の数を調べた。その輪を2等分、3等分した時についても調べた	輪飾りを見て思いついた。なかなか法則が見つからず苦労した	公開授業発表
3	おじさん(Pringles)				絵プリント
4	ドラえもん			以外にきれいにできてよかった	
5		パラドックス	いくつかの具体的なパラドックスを挙げて、それぞれを解釈してみた	考えているうちに頭が混乱してきてまとめるのにひどく苦労した。考える過程はおもしろかった	回覧
6	グラフの移動		一次関数、二次関数や円の式の中の定数をkとおいて、kの値を変化させた時のグラフを描く	とてもきれいな模様ができた	回覧
7					
8	富士山・日本一			簡単かと思ったらバランスがとれず大変だった	絵プリント
9		作図不可能問題	作図の不可能の証明という、一見幾何学的な問題を代数的に証明し、数がどうやって自然数から整数、有理数、実数・・と広がっていったかを考える	作図の問題という幾何学に限定しているようにみえる問題が数の世界の広がりを考えることで解決する。あらゆる数学分野がつながっている事がわかり、感動した	公開授業発表
10		折り紙に内接する正n角形	折り紙を用いて内接する最大の正三角形、正六角形を折る	ただ正三角、正六角ではなく、内接最大の・・というところが面白かった	＊プリント配付
11	ヒョウタンツギ			簡単そうだと思っていたのに意外と複雑な式になった	絵プリント
12	風景画（もうひとつの故郷）			極力曲線を使わずに描いた。意外と違和感なく絵になった	絵プリント
13					
14		三角錐の体積	底面積、高さが等しいとなぜ体積も等しくなるのかを、立体を平面に落として証明し、三角錐の体積について考えた	今まであたりまえと思っていたことも細かく証明していくのは大変だった。体積とは何かをもう一度確認できてよかった	回覧
15	ドラえもん			自分で違う絵が作れればよかった。字が難しかった	
16		数学パズル	本を参考にして、数学パズルをやる	一口にパズルと言っても色々な種類があり、面白かった	回覧
17	ミッキー完成版	eの近似	eの近似値の求め方	まだ習っていないので知らないことだったが面白かった	回覧
18		デルタ多面体	デルタ多面体について調べた	色々な多面体がそれぞれに関係を持っているrことがわかった	一部プリント
19		天気遷移確率	夏休みの天気を調べ、ある天気（晴れ、雨、曇りなど）の二日後がどんな天気になるか、その確率を計算した	計算と実測値がきれいにあうので面白かった。天気を調べるのは小学生みたいで楽しかった。それにしても今年は曇りが多い	公開授業発表
20		折り紙に内接する正三角形	折り紙で正三角形（最大の）を折る	図書館で見つけた本がおもしろそうだったので	プリント配付

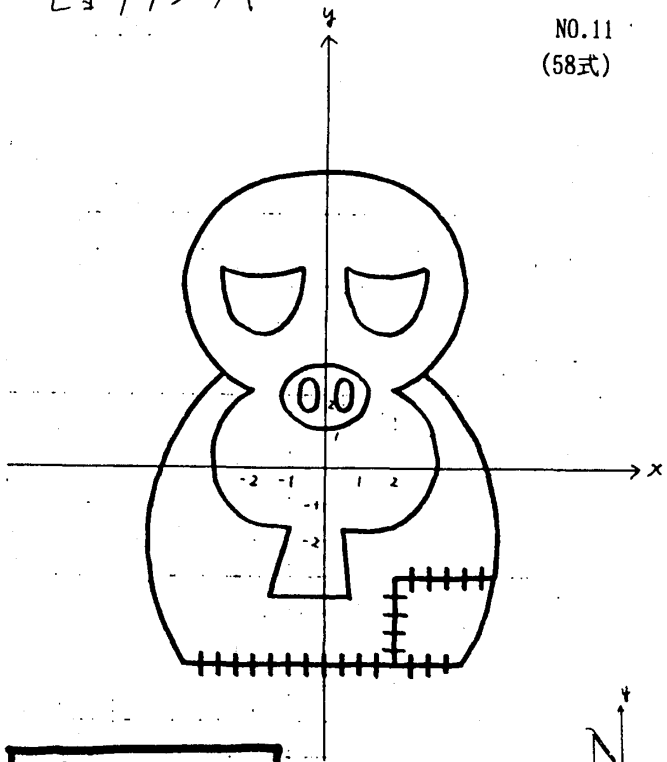
資料2

氏名	題 図形と式		内容要旨	感想・その他	備考
21	ドラえもん			大変だったけれど面白かった。1本の線もたくさん集まれば色々な形ができるのだと思った。数学は奥が深い	プリント配付
22		折り線で作った放物線の式	長方形の紙上に一点をとり、紙の辺上の点をその一点に重ねて折ると曲線ができる。その曲線の方程式を求める	1年の時にその作業をして、曲線を折ったので、2年の知識を使い方程式を求めた。深めることができてよかった	＊プリント配付
23	ドラえもん			今までグラフを描くのは苦手であまり好きではなかったけど、今回遊び感覚でグラフを描いたら少し身近に感じられて面白かった	
24		カオス	カオスとは正確な法則から生じる一見ランダムなふるまいである	「花びらの枚数」「水滴の落ち方」など身近な現象を例にとって説明してあるので興味深かった	回覧
25	ドラえもん			今まで単純なグラフしか描いたことがなかったので、複雑だったけど数学ってすごいと思えた。	
26		サッカーボールと黄金比	サッカーボールの立体構造を調べ、黄金比を用いることであみだされる種種の公式を考えた	サッカーボールが切頂二十面体であることになかなか気づけなかったが発見があって面白かった	一部プリント
27	プーさん			鼻以外はすっきりした式にならず大変だった。プーさんの顔はお気に入りのキャラクターノートのイラストが元絵。とっても愛らしい顔に誰もがノックダウン	絵プリント
28	くまさん			すべてのものが直線と円の方程式で成り立っていることに改めて感心した	絵プリント
29		三角関数加法定理の証明	三角関数加法定理を図形を使って2通りで証明した	他人が作った証明を見るのと自分で考えつくのはだいぶ違って難しかった。でも出来上がった時は達成感があった	回覧
30		ファレイ数列・ピックの定理	ポンスレの定理を変形した放物線と円の接線の性質の証明。他ファレイ数列・ピックの定理の証明	ポンスレの定理は難しくてわからなかったので変形したものを考えた。面白かった	回覧
31	ペンギン			すべての絵は円と直線でできていることを知った。でもそれを式に直す作業は少し大変だった	
32	ドラえもん			グラフがたくさんで、線って凄いなあと思った	
33		色分けタイルのパズル	三角パズル。隣同士は同じ色、外側はすべて同じ色、この規則に従って4色に塗り分けられた三角形でn角形を作ろう！	単純な規則なのに意外と難しいパズルになった。適当にやるのではなく、規則の中にまた規則を見出し活用することが必要だった	回覧
34	クー			複雑な式が出てきてしまって思ったより大変だった。本物らしくできたのでよかった	絵プリント
35		0で割ってはいけないこと	0で割ってはなぜいけないのかを証明	前から気にかかっていたので、自分なりに証明できてよかった	回覧
36		黄金比	黄金長方形は最も美しい長方形といわれている。パルテノン神殿やピラミッドなどの建物、身近なものでははがきや名刺にも使われている	中学校の教科書に書いてあった。身近なもの、巻貝など自然のものにも黄金比があることがわかり面白かった	回覧
37		メビウスの輪(おもちゃを作ろう)	メビウスの輪をなぞったり、切ったりしてどうなるか調べた後、応用して色々な面の出るおもちゃを作る(3面、6面)	楽しかったけれど失敗の連続で提出時は中途半端だった。その後も研究を続けた。正三角形はきれい！	公開授業発表
38	数字			他の人がやらなそうだったので数字を選んだ。たくさんの式が必要なのでびっくり	絵プリント
39	アイスクリーム			式を求めるのが大変だった	絵プリント
40		n角数	n角数を数列を使って表した	あまり実用性はないと思った	回覧

添付資料3

ヒョウタンツギ

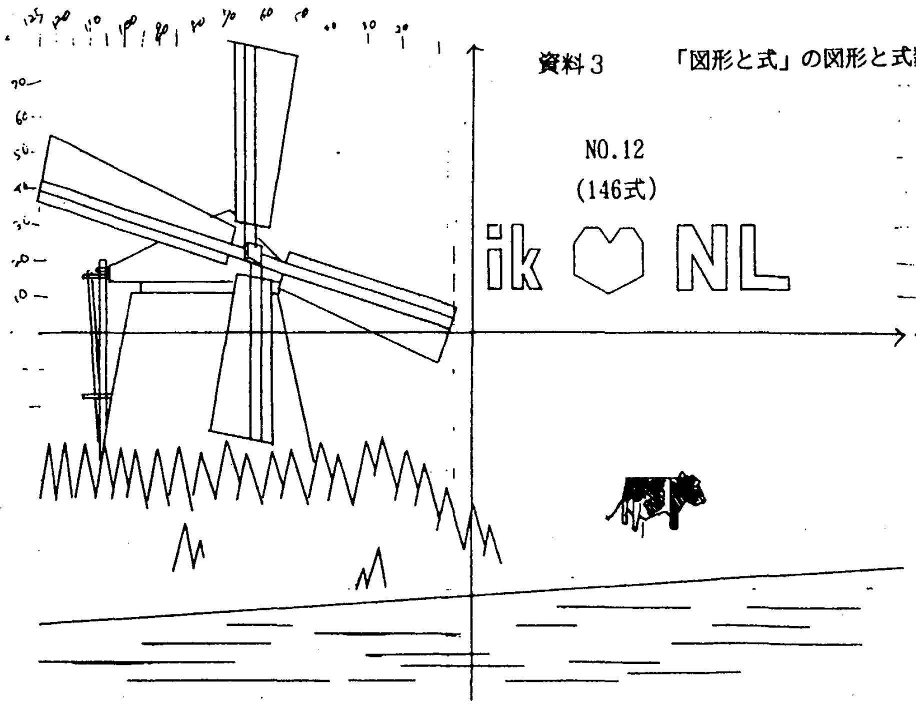
NO.11
(58式)



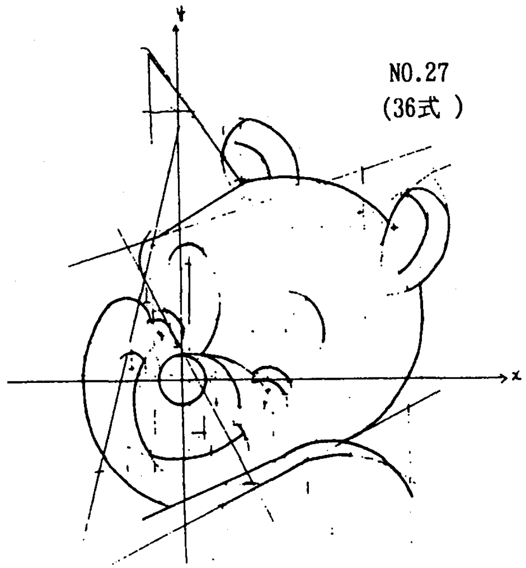
図形と式

資料3　「図形と式」の図形と式数

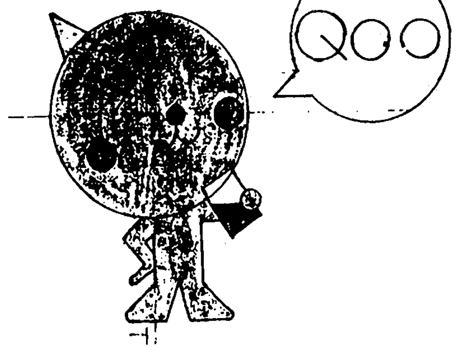
NO.12
(146式)

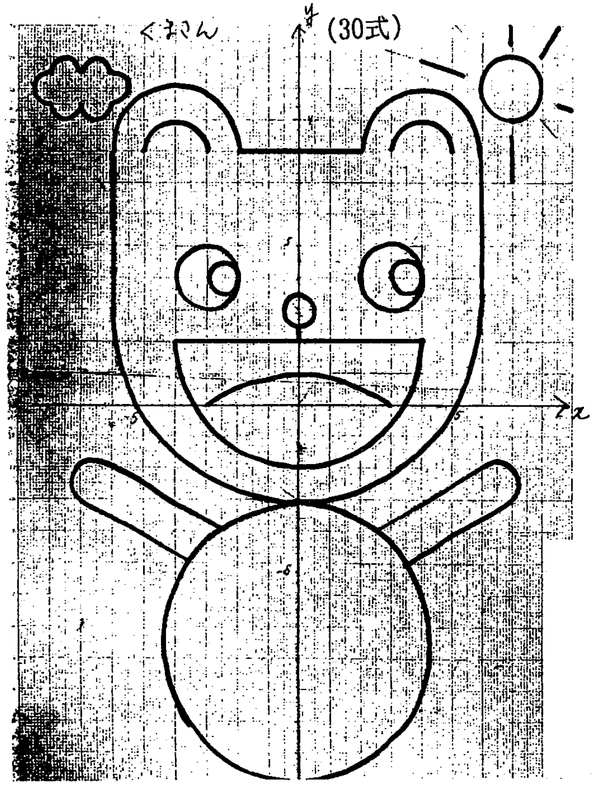


NO.27
(36式)

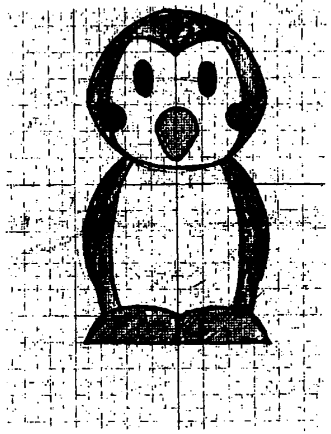


NO.34
(39式)

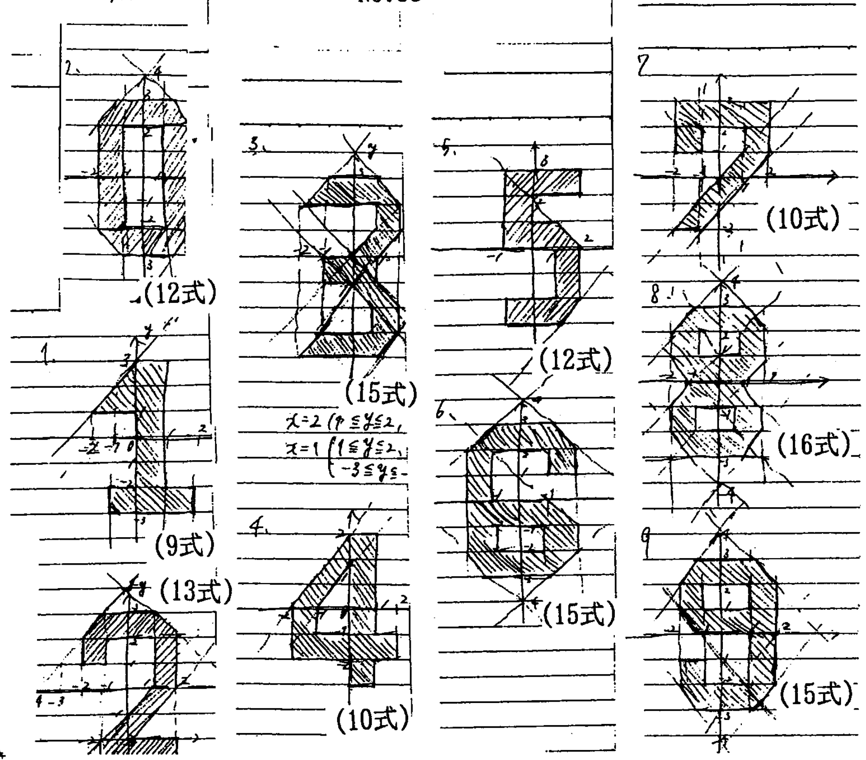


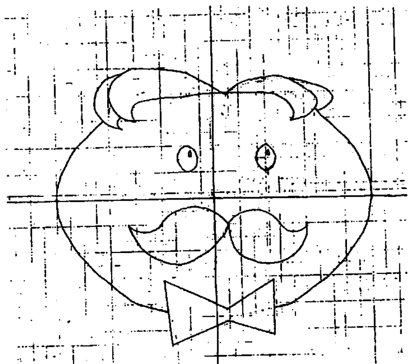


NO.31



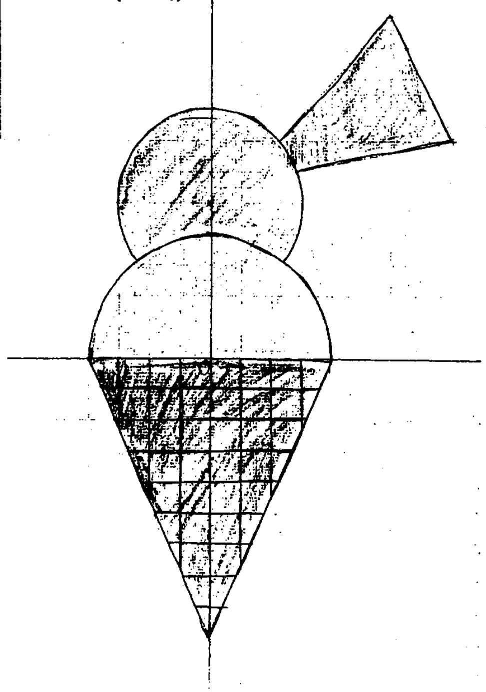
数字　NO.38

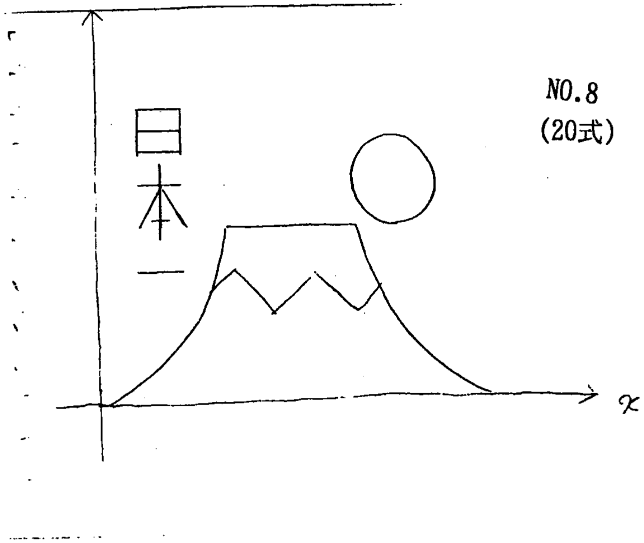




NO.3

NO.39
(22式)

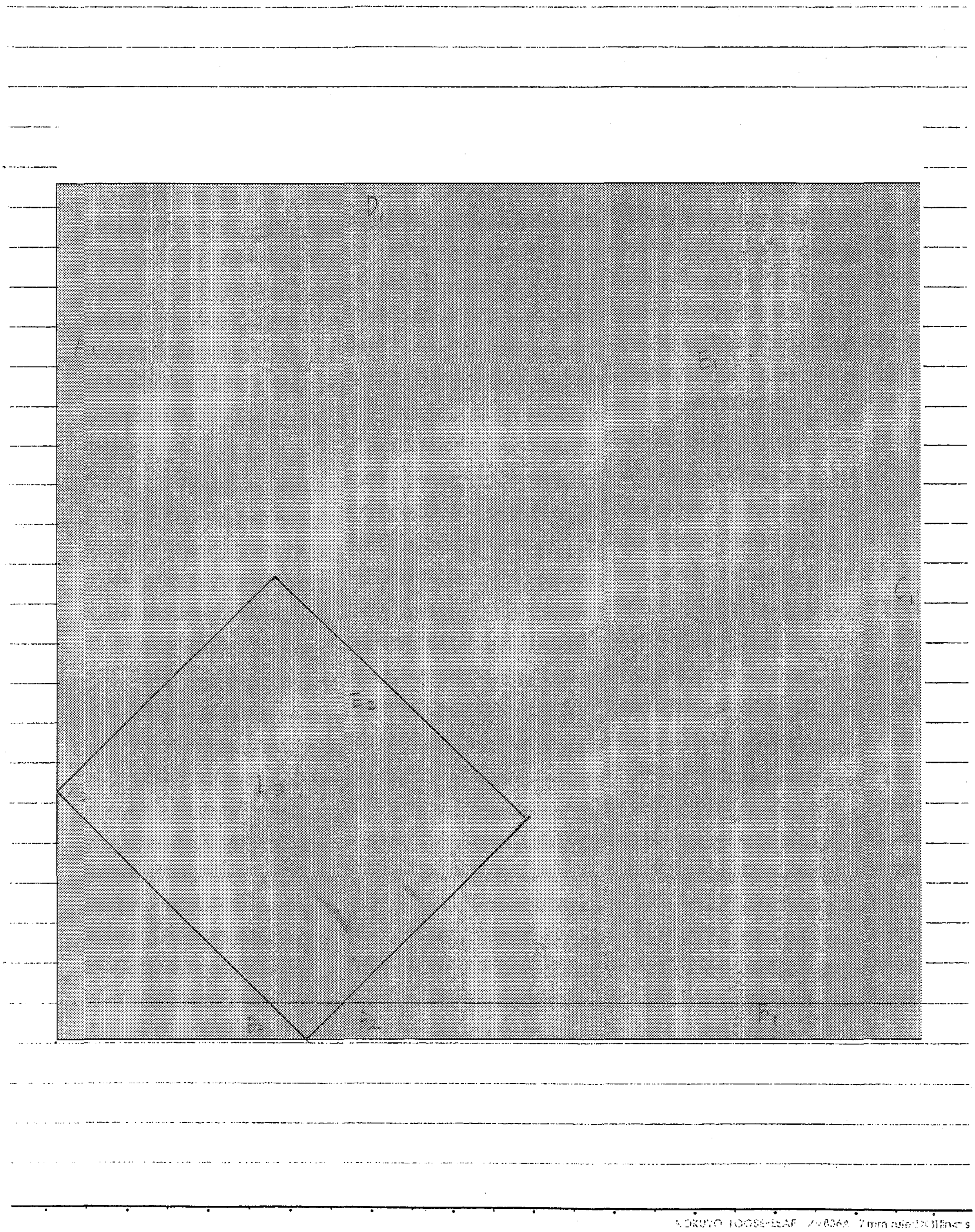




NO.8
(20式)

添付資料4　生徒作品（＊印）

NO. 1　面積１／６の正方形



⑤ 面積$\frac{1}{6}$の正方形

〈折り方〉

1. 頂点A・頂点C点重ね折りし、折り線BDを作る
2. 辺BCを30°−60°折りし、折り線BC_1を作り、
   折り線BC_1をBを基点に折り線BDに重なるようにコンパス折りし、
   $BC_1 = BE_1$となるように点E_1をとる。
3. 頂点B・E_1点重ね折りし折り線A_1B_1を作り、折り線A_1B_1との
   交点をE_2とする
4. E_2を通り、辺ABに平行な折り線B_2D_1をつくる
5. 辺BB_2をBを基点に折り線BDに重なるようにコンパス折りし、
   $BB_2 = BE_3$となるように点E_3をとる
6. 頂点B・E_3点重ね折りし、折り線A_2B_3を作る。
   できた折り線をもとに正方形折りする

〈証明〉

辺BCを30°−60°折りしたので、$BC_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$となる。さらにコンパス折りしたので、$BE_1 = BC_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

次に頂点B・E_1点重ね折りしたので、$BE_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$となる

ここで$\triangle BB_2E_2$は直角二等辺三角形だから、

$BE_2 : BB_2 = \sqrt{2} : 1$の関係に、$BE_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$を代入すると、

$BB_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$となる

さらにコンパス折りして点E_3をとり、頂点B・E_3点重ね折りしたので

$B_2B = BE_3 = A_2B_3$

よって$A_2B_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$となり、この長さを正方形折りの折りはじめの1辺になるように頂点Bを折ればよい。//

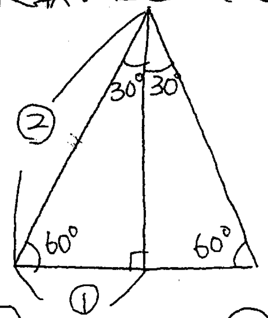
＜感想＞

以前数学の授業時に、折り紙を使って数学を考えるというような事をやった時、数学をとても身近なものに感じたので、今回このような研究を行ってみた。
直角三角形の辺の比にある$\sqrt{3}$や$\sqrt{2}$を使って図形を考えるのはとても難しかったが、少しは数学が好きになったかもしれない。
折り紙を折ってそれを少し数学的に考えてみると、とてもおもしろい現象が起こってくる。折り紙のもつ不思議な一面を垣間見た様な気がした。

NO. 10　折り紙に内接する正ｎ角形

◎正三角形

定義：三辺の長さが等しく、それぞれの角度が60度



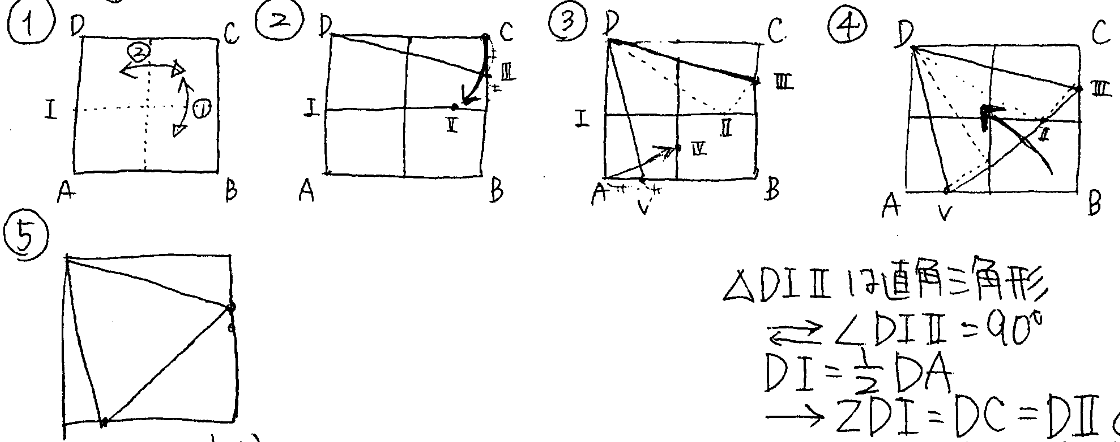
① 左辺の辺と上辺の辺を重ねて折り、折り目をつけ広げる

② 頂点Dを通る折り目で頂点Cを横、中線にのるよう山折りする

③ 頂点Dを　＝　、頂点Aを縦中線に山折り

④ その点(③より)をⅣとする、2つの点ⅤとⅢをまたいでこれを山折りする

⑤ 内接する最大の正三角形



完成.

△DIⅡは直角三角形

⇄∠DIⅡ＝90°

$DI = \frac{1}{2}DA$

→2DI＝DC＝DⅡ(斜辺)

よって∠IDⅡ＝60°となる

したがって

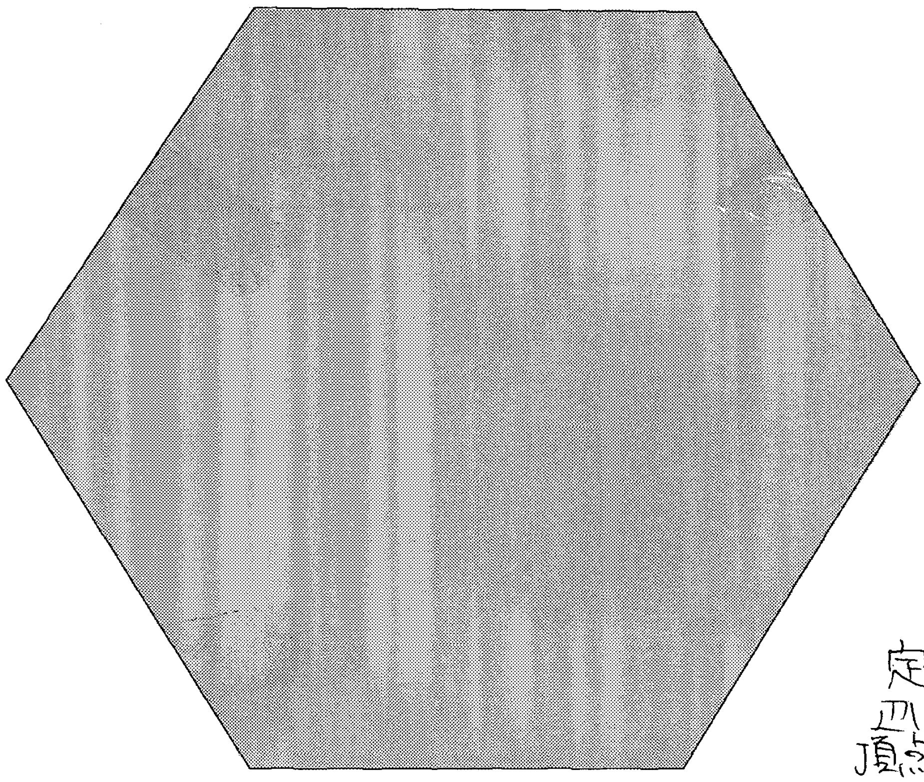
∠ⅡDC＝90°−60°＝30°

△DVAも同様のことが言えるので、

△ⅢDVは頂角が60°である2等辺3角形

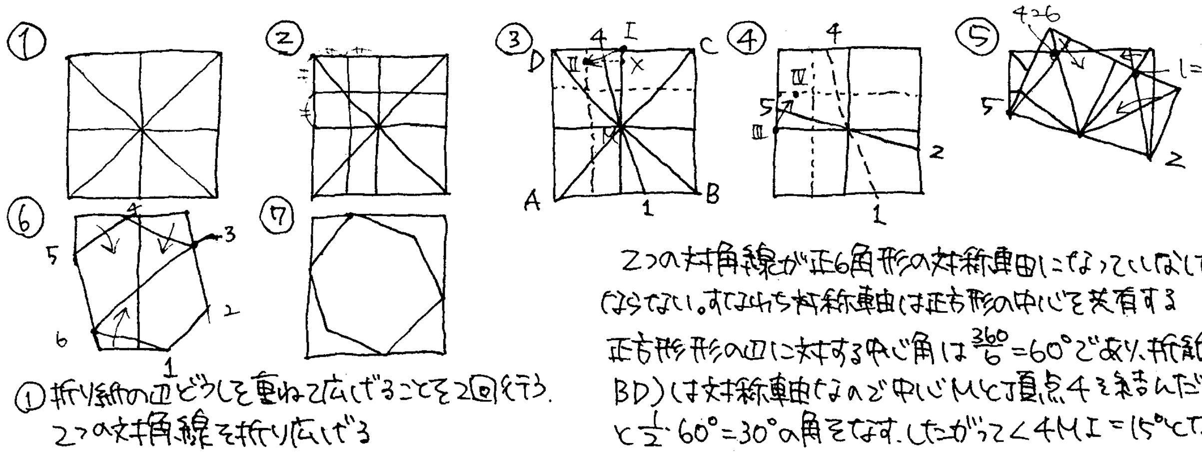
↓

正三角形



◎正六角形

定義：それぞれの辺は長さが等しく、頂点の角度は120°



① 折り紙の辺どうしを重ねて広げることを2回行う。
2つの対角線を折り広げる

② 折り紙の辺を折り目に重ねることを2回行う

③ 点Iを辺IIにその折り目が点Mを通るように折り広げる。1と4は正6角形の頂点となる

④ 中心Mを通るように点IIIを図の線分上に折り込み、その点をIVとする。2と5が求める正6角形の頂点となる

⑤ 求めた頂点1と4から他の頂点3と6が決まる

⑥ 辺12、13、56を折り目を付け広げる。残りの辺を折る

⑦ 完成!!

2つの対角線が正6角形の対称軸になっていなければならない。すなわち対称軸は正方形の中心を共有する

正方形の辺に対する中心角は $\frac{360}{6}=60°$ であり、折線（③のBD）は対称軸なので中心Mと頂点4を結んだ線分と $\frac{1}{2}\cdot 60°=30°$ の角をなす。したがって $\angle 4MI=15°$ となる。
ここで点IはCD上の点で $CD\perp MI$ なる点である。

③で直角三角形XMIIの1つの辺XIIは折り紙の辺の長さの $\frac{1}{4}$ であり、斜辺MIIはMIと等しく折り紙の長さの半分である。辺MIIはXIIの2倍となる直角3角形なので
$\angle IIMX=30°$ となり $\angle 4MX=\angle 4MI=15°$ となる
このことから点4は最大正6角形の1つの頂点になる、
他の点は対称性によって成り立っている

NO. 22　折り紙で作った放物線の式

下のように，長方形の紙上に一点Pをとり，紙をおって長方形の一辺をその点と重なるようにしていくと曲線ができる。その曲線について調べてみる。

Pからその一辺に向かって垂線をひき，一辺との交点をP'とする。P，P'を通る線をy軸，PP'の垂直二等分線をx軸とする。

すると，P(0, p)　P'(0, −p)となる。

$y=-p$ 上のある点 $(a, -p)$ と $(-b, -p)$ からPへそれぞれ直線をひき，それぞれの垂直二等分線を求める。
(a，$b\neq 0$ とする)

$(a, -p)$ とPの垂直二等分線と $x=a$ の交点，$(-b, -p)$ とPの垂直二等分線と $x=-b$ の交点は，それぞれ曲線上に位置する。また，曲線は原点Oを通る。

よって $y=\alpha x^2+\beta x$ に代入して，$\left(\left(-b, \frac{b^2}{4p}\right)\right.$ と $\left(a, \frac{a^2}{4p}\right)$ を$\Big)$

直線の方程式や点の座標は直接下図に書きこみました。
よって，↖は求め方のみ。

$$\frac{a^2}{4p} = a^2\alpha + a\beta \quad \cdots①$$

$$\frac{b^2}{4p} = b^2\alpha - b\beta \quad \cdots②$$

$a\neq 0$，$b\neq 0$ より

$$①\times\frac{1}{a} \quad \frac{a}{4p} = a\alpha + \beta \quad \cdots①'$$

$$②\times\frac{1}{b} \quad \frac{b}{4p} = b\alpha - \beta \quad \cdots②'$$

$$①'+②' \quad (a+b)\alpha = \frac{(a+b)}{4p}$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{4p}$$

これを①に代入して，

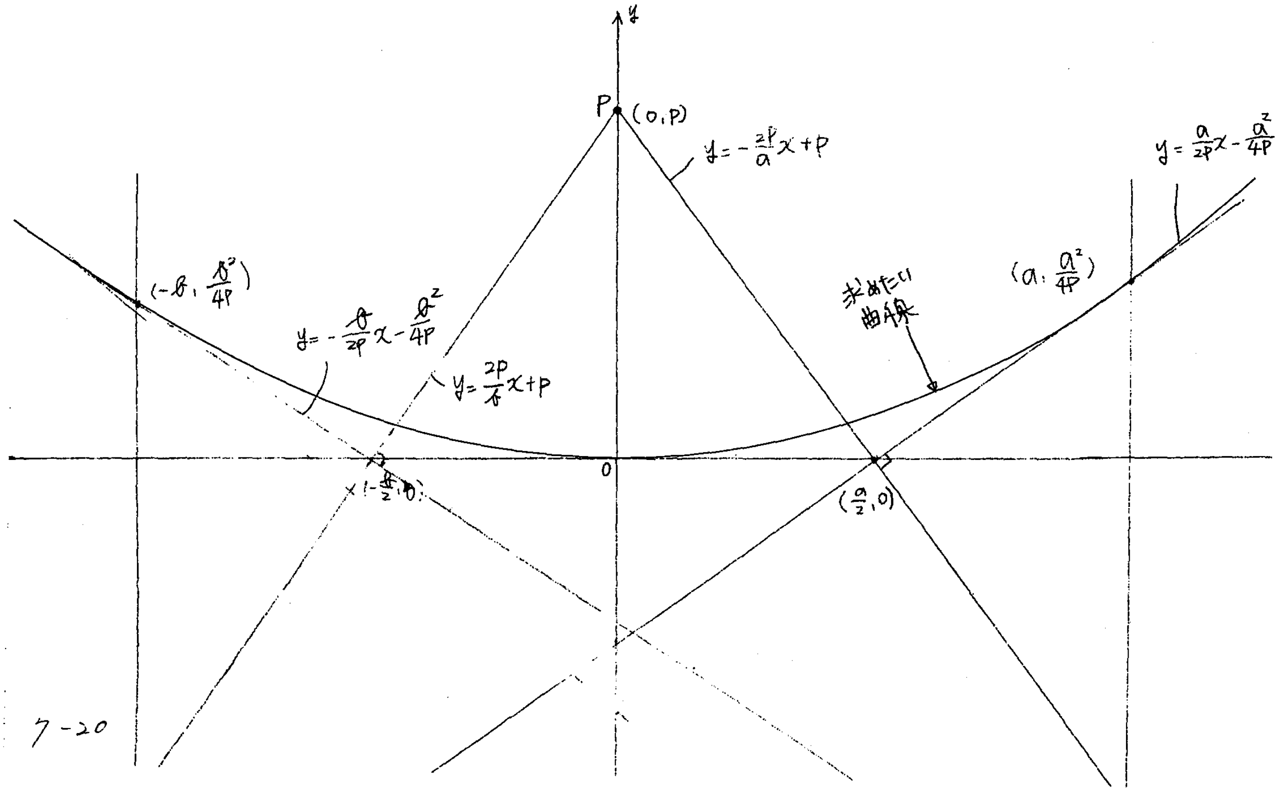
$$\frac{a^2}{4p} = \frac{a^2}{4p} + a\beta.$$

$a\neq 0$ より，$\beta = 0$.

よって，曲線の方程式は，

$$y = \frac{1}{4p}x^2$$ と分かる//

これは逆にたどることができる。



7-20

NO. 2　メビウスの輪「輪」

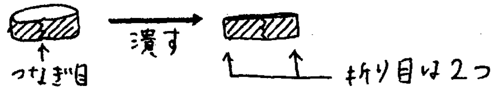
紙テープをねじりながら輪を作り、それを潰したときにできる折り目の数について調べました。
また、応用として輪を2等分、3等分、4等分したものと、違う巻き方をした輪についても調べてみました。

☆実際にやってみよう。

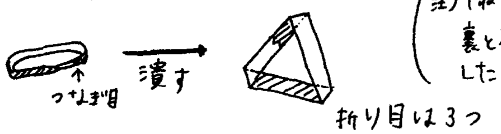
［用意するもの：紙テープ（表と裏の区別ができるもの）
のり］

①基本形

あ）0ねじり

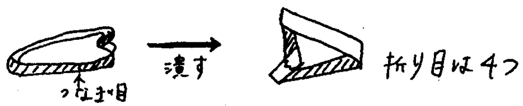


い）1ねじり



（注）1ねじりは、つなぎ目で裏と表をくっつけるようにした時のことを言う。

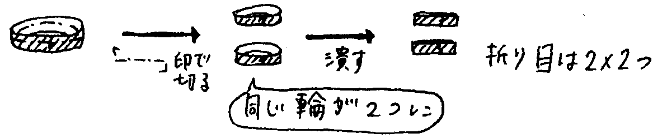
う）2ねじり



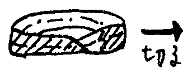
さらに3ねじり，4ねじり…とやってみる。
ねじる数と折り目の数に関係はあるか。

②応用 part 1 〈2等分〉

あ）0ねじり



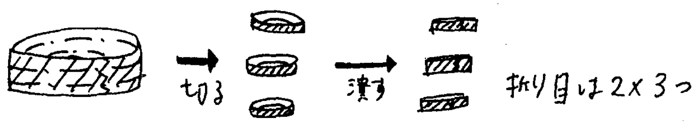
い）1ねじり



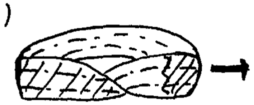
さて一体どうなるでしょうか

③応用 part 2 〈3等分〉

あ）0ねじり



い）

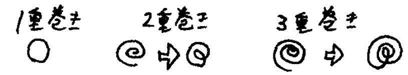


どうなるでしょうか

④応用 part 3 〈4等分〉
同様に4等分についても調べてみて下さい

⑤応用 part 4 〈うずまき型〉
紙テープをねじるのではなく、うずまきにして端と端をつなげ、同じように潰してみる。

真上から見た図



NO. 9　作図不可能問題「数の歴史」

$\boxed{1}$. $\mathbb{N}$=(自然数全体の集合)$=\{1, 2, 3, 4 \cdots\}$
$\mathbb{Z}$(整数全体の集合)$=\{\cdots -2, -1, 0, 1, 2 \cdots\}$
$\mathbb{Q}$(有理数全体の集合)$=\{\frac{m}{n}$ (m, nは整数, $n \neq 0$)$\}$
$\mathbb{R}$(実数全体の集合)
$\mathbb{C}$(複素数全体の集合)

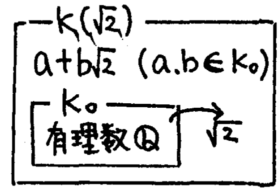
$\boxed{4}$ 数体……複素数から成る数の範囲で0、1を含み四則演算について閉じている範囲。
(体)

$\boxed{3}$
- 自然数…0、1を含み、加法(乗法)によってできる範囲。
- 整数…0、1を含み、加法、減法(乗法)　〃
- 有理数…0、1を含み、加法、減法、除法(乗法)　〃
- 実数……0、1、全ての無理数を含み、四則演算について、閉じている数の範囲。
- 複素数…0、1、全ての無理数、iを含み、四則演算について閉じている数の範囲。

$\boxed{5}$ 体論 (field theory)

※ $\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$は体ではない。($\because$ 四則演算について閉じていない)
$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$は体である。
なので、一番狭い範囲の体は有理数全体の集合$\mathbb{Q}$である。

ex)

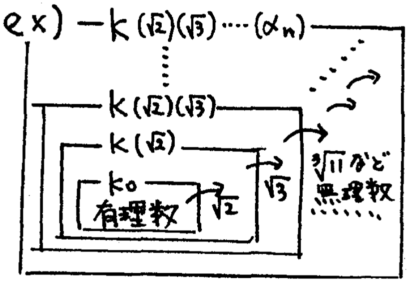


・本当は、$\frac{A+B\sqrt{2}}{C+D\sqrt{2}}$ だが有理化すると $a+b\sqrt{2}$ の形になる。$(A, B, C, D, a, b \in K_0)$

・$\sqrt{2}$はK_0では表せない数で$\sqrt{2}$とK_0の数に四則演算を施してできる(閉じられた)範囲を$K(\sqrt{2})$と書く。

ex)

ex)



$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$……と全ての無理数とK_0の数に四則演算を施してできる範囲、$K(\sqrt{2})(\sqrt{3})\cdots(\alpha_n)$が実数である。
($\sqrt{2}$、$\sqrt{3}\cdots\alpha_n$とは全ての無理数を示す)

お天気遷移確率の調査

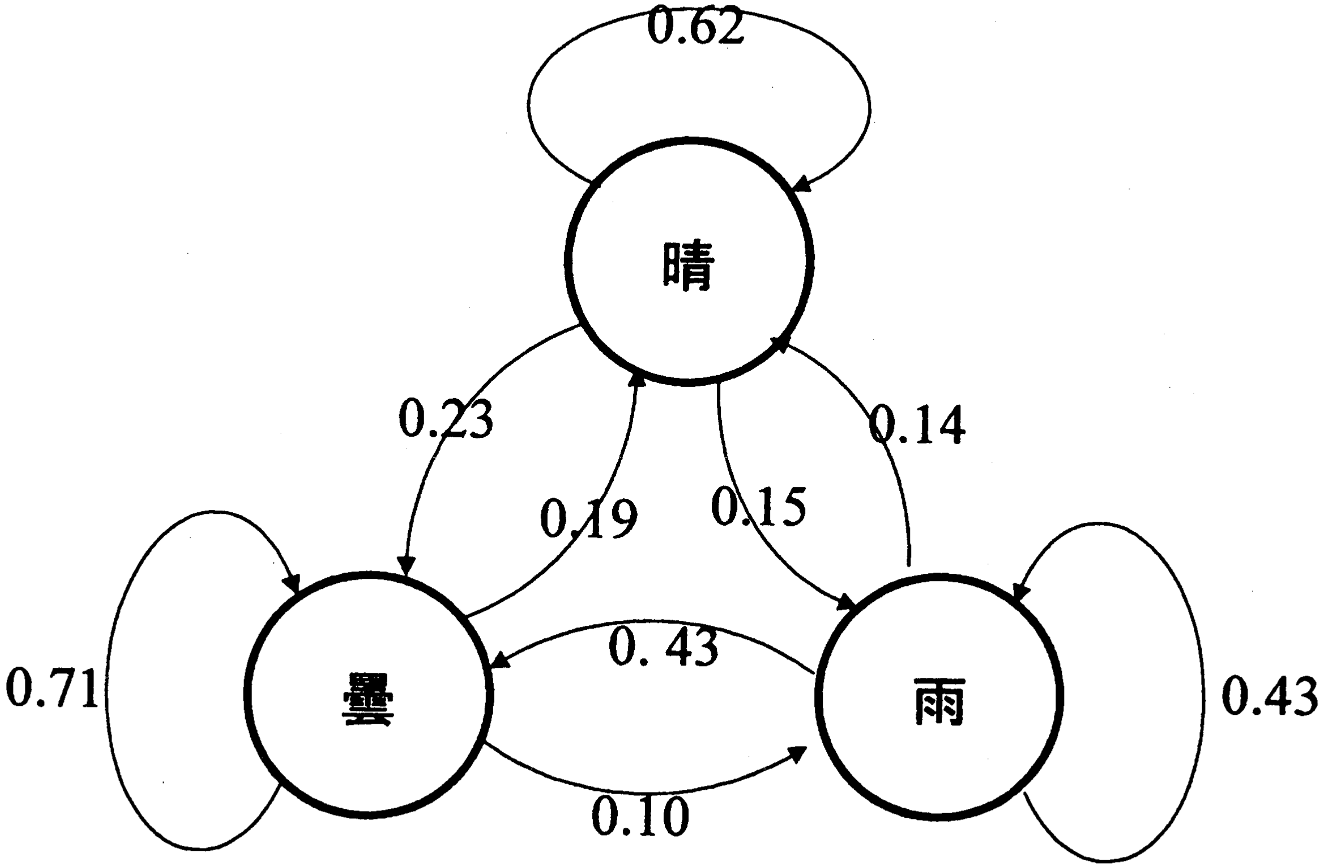
- 2003年7月21日から8月31日までの天気を調べた。出典は http://weather.odn.ne.jp/docs/seasonal/47662.html
- 日中の天気を一覧表にしたのが次ページ第一表。
  晴の日の翌日が晴、曇、雨、
  曇の日の翌日が晴、雲、雨、
  雨の日の翌日が晴、曇、雨の出現頻度を数えた。
- その結果から、一次の条件付き確率を求めた。
  つまり、たとえば、雨の日の翌日の天気がどうなるかという確率である。
- それらを図にまとめたものが次々ページの第一図。

2003年夏休みの 天気遷移確率

		晴→晴	晴→曇	晴→雨	曇→晴	曇→曇	曇→雨	雨→晴	雨→曇	雨→雨
7月21日	曇									
7月22日	曇					1				
7月23日	曇					1				
7月24日	曇					1				
7月25日	曇					1				
7月26日	曇					1				
7月27日	曇					1				
7月28日	晴				1					
7月29日	雨			1						
7月30日	曇								1	
7月31日	曇					1				
8月1日	曇					1				
8月2日	晴				1					
8月3日	晴	1								
8月4日	晴	1								
8月5日	晴	1								
8月6日	雨			1						
8月7日	曇								1	
8月8日	曇					1				
8月9日	雨						1			
8月10日	晴							1		
8月11日	晴	1								
8月12日	晴	1								
8月13日	曇		1							
8月14日	雨						1			
8月15日	雨									1
8月16日	雨									1
8月17日	雨									1
8月18日	曇								1	
8月19日	曇					1				
8月20日	曇					1				
8月21日	晴				1					
8月22日	晴	1								
8月23日	曇		1							
8月24日	晴	1								
8月25日	晴	1								
8月26日	曇		1							
8月27日	曇					1				
8月28日	曇					1				
8月29日	曇					1				
8月30日	曇					1				
8月31日	晴				1					
日数		8	3	2	4	15	2	1	3	3
			13			21			7	
確率		0.62	0.23	0.15	0.19	0.71	0.10	0.14	0.43	0.43

第一表

2003年夏休み
お天気遷移確率



第一図

曇の2日後は？

推定

先の条件付き遷移図より

曇→曇→晴は 0. 71×0. 19=0. 13　曇→晴→晴は 0. 19×0. 62=0. 12　曇→雨→晴は 0. 1×0. 14=0. 01

曇→曇→曇は 0. 71×0. 71=0. 50　曇→晴→曇は 0. 19×0. 23=0. 04　曇→雨→曇は 0. 10×0. 43=0. 04

曇→曇→雨は 0. 71×0. 10=0. 07　曇→晴→雨は 0. 19×0. 15=0. 03　曇→雨→雨は 0. 1×0. 43=0. 04

従って、曇の2日後が晴れる確率は、0. 13+0. 12+0. 01=0. 26

曇の2日後が曇る確率は、　0. 50+0. 04+0. 04=0. 58

曇の2日後が雨の確率は、　0. 07+0. 03+0. 04=0. 14

観測値

7月21日から8月29日までに曇は21日間。

曇の2日後の天気は以下の通り。

事象	回数	確率
曇→×→晴	8	0. 38
曇→×→曇	10	0. 48
曇→×→雨	3	0. 14

考察

一次の条件確率を測定することによって、二次の条件確率を推定した。その結果を観測値と比較し、大まかには推定可能であることが分かった。

No.

Date . .

NO. 37 メビウスの輪「おもちゃを作ろう」

1. メビウスの輪（メービウスの帯）とは

帯を1回ひねって、両端を張り合わせて得られる図形。表裏がない曲面の例。ドイツの天文学者・数学者メービウス（A.F.Möbius 1790〜1868）の名に因む。（『広辞苑』）

2. メビウスの輪の発展

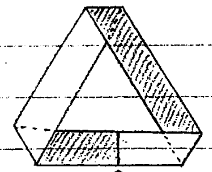
メビウスの輪は帯を1回ひねったものだが、2回、3回、…とひねるとどうなるか。

2n回ひねる → 表裏のある曲面
2n+1回ひねる → 表裏のない曲面　（n：正の整数）

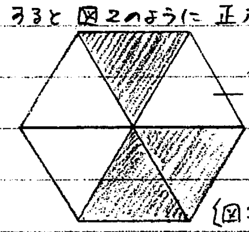
3. メビウスの輪の応用

① 3面出るおもちゃをつくる

帯を3回ひねった輪を折って平面にすると図1のようになる。そこで重なった部分は三角形になっているので、3つの三角形が隣接するようにすると図2のように正六角形ができる。



（図1）

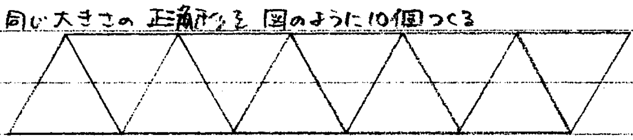


（図2）

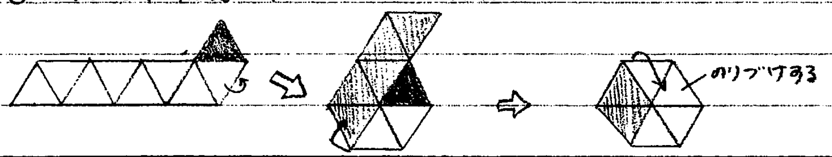
この図2の図形は、くるくると回転し、3面出てくることが分かった。つまり、メビウスの輪の発展で、2n+1回ひねると表裏のない曲面が出ることが分かったが、それを応用したのがこの図形であることが分かる。

作り方

① 同じ大きさの正三角形を図のように10個つくる



② 3回ひねった状態の輪になるように折って、正六角形をつくる



② 4面以上出るおもちゃをつくる

完全な面が6つ出るおもちゃをつくることに成功！ それ以上は今も考え中。

4. 感想

小さい頃に母から作り方を教えてもらった3面出るおもちゃが、立派にも数学に関係していたと知って驚いた。身近に数学が感じられて、考えていて楽しかった。

2U(37) 山本久美子