数学①コース：曲線で囲まれた図形の面積を正しく求めてみよう。

沖 山 義 光

テーマ設定の理由　直線に囲まれた図形の面積はいずれにしろ三角形に分割しそれぞれの三角形の3辺がわかれば面積は求められる。3辺からその三角形の面積を求めるにはヘロンの公式として求めればよい。今回はこの点にはついてはお話だけにして、曲線に囲まれた面積をどのようにして求めるかをテーマにした。

本コースのねらい　積分の基本的な考え方である区分求積法を使って、2次関数のグラフで囲まれた図形の面積を求める。それに必要なことで中学生が学習していないものとして自然数の平方の和 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ を学習しなければならない。その可能性を探るのがこの体験授業の試みであり、立体模型をつくりそれを用いて体験を通じて理解していくこととした。平方の和を利用すると錐体の体積を求めることも可能であるが今回は2次関数のグラフに囲まれた面積に焦点を絞った。それは、近年、生徒の学力が少しずつ落ちていることを考慮したことによる。

授業の流れ

1. 2次関数 $y=x^2$ のグラフを方眼紙を使ってかく。これは参加者が中学1年生もいて2次関数のグラフがわからない生徒もいるので3年生も復習を兼ね、作業体験を通してグラフを描いた。このグラフと $x=1$ および x 軸にかこまれた図形の面積を求めることを課題にした。
2. 用意した発砲スチロールの角棒を切って、1つの立方体が最上段に1個、次に2×2個、次に3×3個、次に4×4個....と積みかねてできた立体を1人1個作成する。
3. できた立体を6個組み合わせると1つの直方体ができる。6人のものを集めてみんなで考えてみる。これをやってみると立体の感覚や立方体の個数などを体験的に理解することができる。
4. これから平方の和の公式を帰納的に導く。
5. n 分割の和 $s_n=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$ を立式する。また n 分割の和としては $S_n=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}$ でもよいことは難しいのでいずれか一方を用いることにした。これを上で導いた平方の和の公式を使ってまとめる。

6. $S_n=\frac{1}{n^3}\times\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$ を $S_n=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}$ と変形し $n\to\infty$ のとき $\frac{1}{n}\to 0$ になることをつかって極限値 $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$ を導く。

準備したもの

発砲スチロール製の角柱（東急ハンズ）

発砲スチロール用セメダイン

スチレンカッター、定規等

指導上の留意点

- 式の計算は複雑なので細かく丁寧に導いていく。また極限値 $n\to\infty$ のとき $\frac{1}{n}\to 0$ も議論しながら直観で理解させる。
- 平方数の和の導きやグラフなど実際に作業することを通じて体験することによる理解をねらう。
- 発泡スチロールでの立体模型の制作は $n=3,4,5$ の場合についてそれぞれ作成し一般化の予想をできるだけ易しくできるように工夫した。

生徒の反応　体験を通し、時間をかけてきちんとやっていくと例年と同様によく理解でいている生徒が多く感動を伴って理解してくれる。今回は特に余計なことをしないで目標を１つに絞った。それでもまだ難しいという感想の生徒もいたが、６個の立体を参加者全員にできるまでやれたことはよかった。