離散数学の教材編成の試み

室　岡　和　彦

1．離散数学の導入

離散数学は情報科学の数学的基礎として発展してきたといわれる[1]。学校数学のカリキュラムにおける離散数学教材は、情報科学の要求に応えるとともに伝統的な数学のプログラムに合わせることによって、その内容と考え方の取扱いが変化してきた。情報科学からの要請は、大学１、２年における離散数学コースを１つのカリキュラムモデル[2]として中学、高校の離散数学の教材編成を迫っているようにみえる。

①集合　②数　③証明法　④形式論理　⑤関数と関係　⑥組合せ論　⑦数列
⑧グラフと２部グラフ　⑨木構造　⑩代数構造　⑪離散数学とデータ解析　⑫線形代数

これらを基礎として、数学モデル、オペレーションズリサーチ、オートマトン、アルゴリズム論などに発展する。1989年NCTMのスタンダードでも、グラフ、行列、数列、再帰などの離散数学構造を理解し、行列でグラフを表現し、アルゴリズムを作り分析し、数え上げ問題や確率の問題を解決することなどという目標をあげている。情報化社会に生きるための数学的素養としての離散数学の内容をここでも重視している。

一方、現行の学習指導要領では「数学Ⅰ」の戸数の処理に次の内容が扱われている[3]。

①数え上げの原則（集合も扱う）　②自然数の列　③場合の数；順列、組合せ

ここでの扱い方は、離散数学において「数える」問題解決過程を中心とした次のような編成とみることができる。

中学；有限個のものの規則を見つけ、樹形図でとらえ、辞書式に並べる解決過程

高校；集合の包除の原理、数列１＋２＋…＋nの和、順列や組合せの個数 ${}_nP_r$、${}_nC_r$

新教育課程では「数学基礎」が新設され、“社会生活における数理的な考察”の中で複利計算やバーコードなどの離散数学教材が扱われる。しかし、その他では、離散数学の扱いが軽くなり、また問題解決過程も事実上軽視された。

一方、新設される「情報」では、記述統計や繰り返しアルゴリズムが扱われ、数学が削除した離散数学の内容を引き受ける形になった。

2. 問題解決過程

米国のNCTMでは、学校数学を次のように内容と過程の2つの側面でとらえ、それぞれに基準を設けている[4)]。

内容；数と計算、代数、幾何、測定、データ解析と確率

過程；問題解決、推論と証明、コミュニケーション、関連づけ、表現

ここで“過程”は数学を使えるようにするために設けられた斬新な基準であり、具体事例の多くが離散数学になっている。英国のナショナルカリキュラム[5)]も、数学の利用と応用、数と代数、形と測定、データ操作の領域から成り、問題解決過程を独立した領域としている。その詳細は、モデル化、帰納と演繹推論、他人に説明するコミュニケーションなどが強調されており、主体的な学習活動を行う授業環境を具体化している。しかし、独立した領域を設定した場合、扱う内容の重複は避けられない。

日本の新学習指導要領では、問題解決の過程を算数的活動、数学的活動として小、中、高校で新しく取り上げ、計算処理などの外的活動、類推や演繹などの内的活動に分けて示した。ここで、中学校の領域は、数と式、図形、数量関係であり、問題解決過程は独立した領域ではなく“内容の取り扱い”として位置づけられている[6)]。

この位置づけは、内容の重複学習がなく効率的な編成ができる点が長所である。しかし、課題を見つけることや帰納や証明、自分の考えを数学的に表現する力は2次的な扱いになる。生徒は、数学の使い方を教えられていないので、主体的に学ぶことができず、数学が現実に役にたたないと感じるようになる。

一方、新設される「情報」では情報を収集し処理し伝達する形の問題解決を教育的な目標の中心に掲げ、その方法としてモデル化やシミュレーションも扱っている[7)]。

高校で学業を終える生徒や、理系以外の方向に大学進学する生徒にとって役に立つ数学を導入する1つの方法として問題解決過程をここで考えたい。

3. 離散数学と問題解決過程

学校数学で扱う離散数学は、集合、論理、組合せ論、数列、グラフ、確率という内容を含む。生徒によっては、整数の基本的な性質、記述統計、カオスとフラクタルを加えることもできる。離散数学では現実場面と関わりを持ち、問題解決過程を重視した教材が多い。離散数学が、問題解決や推論や証明の学習に果たす役割が大きいことを例で示す。

(a) 問題解決の例

問題解決の過程では、数学や現実場面で生じた問題を解決すること、問題解決のために適切なアイデアや方略を適用し応用すること、問題解決過程のよさや正しさなどについて議論し振り返ることが中心になる[5)]。

問1　縦8横8のチェス盤からいくつの長方形または正方形ができるか。できるだけ多くの求め方を示せ。また、縦m横n個の場合をm、nで表せ。ここで、縦2横2個の場合は、次のように9つできる。

解1）長（正）方形の縦線は2本で、これを9本から選ぶから$_9C_2=36$通り、

横線も同様に368通り。各縦線に対して横線が28通りあるから、全体で$36^2=1296$

縦m横n個の場合、$_{m+1}C_2\times{}_{n+1}C_2=(m+1)m(n+1)n/4$

解2)　縦2横n個のとき、$3\times\{n+(n-1)+\cdots+1\}$ だから、

縦8横8個のとき、$8\cdot9\cdot8\cdot9/4=1296$

縦m横n個のとき、$m(m+1)n(n+1)/4$

解2には多くのバリエーションがあり、求め方を生徒に説明させる指導ができる。

問題解決には2つの役割がある。1つは、数学の内容を学ぶときの基本的な道具であることである。もう1つは、その問題を解決する過程を通して応用の方法をマスターすることである。教師はできるだけ多くのアイデアを出すように勧め、評価もアイデアの個数を含めることができる。

(b)　**推論と証明の例**

推論と証明の過程は、パターンや構造の規則を推測すること、推測した規則を式で一般化して推測したことと照合すること、証明の仕方について議論を行うことが中心になる。

問2；三角形から三角数1、3、6、10、…1の100番目の数を推測する。

（現「数学Ⅰ」個数の処理）

教師は三角数の作り方を説明し、最初の3つの図を書き、4つ目を生徒に書かせる。次に、図を書かずに6番目の個数を数えさせ、100番目の個数の求め方を調べさせ、説明させる。帰納から演繹をする過程、論理的な推論の連鎖などで解決過程を説明するとともに、他人の説明を聞いて理解し評価するコミュニケーション的な力が高校数学でも必要と思われる。

4．教材編成例

ここでは問題解決過程として離散数学を横断的に扱うことを考える。問題解決過程については、離散数学に特有な方法として、数列などに1対1対応させて規則性を示す方法、数学的帰納法、鳩の巣原理、包除の原理、積の原理などがある。

(1)　**問題解決を目標とする編成例**

離散数学の話題を中心とした問題解決では、個数の数え上げとその応用を柱におくことができる。そこでは、具体的な問題場面の数学化、多様な解決方法の利用が主な活動になり、評価もその活動の多寡によって行う。

(a) 一次データを収集し、必要な場合に丸めなどを行い統計グラフに表す。

(b) 鳩ノ巣原理を使って存在性の問題解決をする。

(c) 数や図形の規則を見つけ、和の法則、積の法則を使ってものの個数を数え上げる。

(d) 問題場面に応じて順列、組合せを使い分け、確率に応用する。

(e) ハノイの塔などの問題を数列で表し、一般項を求める。

(f) 道順などの2部グラフを行列で表し、簡単なマルコフ過程などに応用する。

(g) カオスの現象、フラクタル図形を調べる。

(2) 推論と証明を目標とする問題解決例

学校数学の主なねらいに「論理的な思考力」がある。論理的な思考力は、平面幾何の証明や記号論理の理解だけで育つわけではない。帰納から演繹に「系統的に」教材を編成し、シミュレーション等で振り返る過程が必要である。

論理的に説明して納得させたり、論理的な説明で納得するために推論や証明を使う必要性が生まれ、主体的な学習をするようになると考えられる。論理を使う立場から、次のような教材が編成できる。

(a) 図形の性質の証明、作図した手順を振り返って根拠を調べ、3段論法を使う。

(b) 統計的な推論方法を理解し、説明に適した統計グラフを使って傾向を調べる。

(c) 確立の確からしさをシミュレーションで実験する。

(d) 命題の否定や対偶、ド・モルガンの法則、背理法を理解し、整数の問題などを解決する。

(e) 判断・推理の問題を、記号論理などを適切に用いて解決する。

(f) 数学的帰納法を理解して活用する。

(a))から(f)によって、論理的に考える力を育成する教材編成となり、シミュレーションの意味や統計的な推論の力や論理的に説明する力をつけることも可能となる。ここでは、推論の中に、確率的な推論、統計的な推論を含めている。

5. まとめと今後の課題

今、高校生に「役に立つ」数学、興味・関心を持たせられる数学が求められている。離散数学は現実と関わる話題が多く、情報科学の要請も強い。しかし現代化のときのように離散数学をそのままの形で学校数学に導入される時期は去った。それに代わり、問題解決過程を中心とする教材編成が可能であることをここで示した。

これは、かつて附連研が提出した高校数学の教育課程案に残された課題「文系進学者のための高校数学」をどうするか、に対する1つの解答である。また、次の次の教育課程に起こる「基礎教科」として授業時間が増えたときに何を生徒にさせるか、という問いに対する答えにもなっている。次の学習指導要領作成の際には、数学専門家や公立高校教師のいう「系統性」重視に対する意見を、こうした立場から提出する必要があると考える。

なお、ここでは編成された教材の指導と評価はまだ一部に止まっている。今後は、できるだけ多くの教材を実践し評価方法を明らかにすることが課題である。

参考文献

1）M.J., Kenny, et.al., Discrete Mathematics across the Curriculum K-12, NCTM yearbook 1991

2）MAA, Improvements of college Mathematics, MAA yearbook 1989

3）文部省「高等学校学習指導要領解説　数学編」ぎょうせい　1989

4）NCTM, Principle and standards for school mathematics, 2000

5）http://www.dfee.gov.uk

6）文部省「中学校学習指導要領解説　数学編」大阪書籍　1999

7）文部省「高等学校学習指導要領解説　情報編」開隆堂　2001