特設講座「時空の物理学」：空間の歪みを測定する

村　井　利　行

特設講座とは、本校が独自に設置している学校裁量の授業である。2001年度は第２学年２単位の授業で、８科目が開講された。この特設講座と同じ時間枠で「国際理解」および「情報」が同時開講され、三者全体で必修選択となっている。特設講座「時空の物理学」選択者は本年度20名（学年120名）。公開授業当日の出席者は18名であった（２名が他の公開授業に出席）。

「時空の物理学」の目的・目標

まずは、この「時空の物理学」という科目自体の目的・目標について述べよう。このような授業を企画した目的・目標はいくつもある。一つは、宇宙・時間・空間あるいは相対論について興味関心の高い高校生が多く、その“需要”に応え、内容的に適切なレベルの授業を提供しようということである。高校時代といえば、自分が生きている世界・環境を冷静かつ客観的に見つめようと真剣に考える年齢である。「時空」という、この世界の根本に興味関心を寄せる生徒が多いのも自然なことだろう。目的の二つ目は、私自身がいまだに（？）この分野に強い関心をもっており、「教えるという目的をもって勉強をしょう」と考えたのであった。教える立場の者は、質・量ともに、教える内容の“数段上級”の事柄を理解し身につけておくのが理想であろう。その意味で、このチャンスを活かして、学生の頃から憧れていた「一般相対性理論」に本格的に挑戦し、この分野の専門的論文を読むことができる程度の実力を身につけたいと考えたのである。目的の三つ目としては、相対性理論という物理学を代表する大理論が、アインシュタインの名とともに知名度はきわめて高い割に内容は必ずしも正しく伝えられていない、という現状を考え、高校生向けの標準的なテキストの作成を試みようということである。

これまでの授業展開

今回授業をした学年は、昨年度第１年次にも２単位の特設講座があった。その際にも「時空の物理学」を開講していたので、１年次（２単位）～２年次（１単位）継続で行ったことになる。１年次は、はじめに

『宇宙の起源』M.S.ロンゲア（河出書房新社）

を主要なテキストに用いて、宇宙物理・光・量子・素粒子に関する基礎的な内容ついて学習した。ビデ

オ教材として、少々古いが（しかし、評判は非常によかった）

『銀河宇宙オデッセイ』（NHK）

などをだいたい毎時間放映した。後半は

『下関・福岡のアインシュタイン』中本静暁著（新日本教育図書）

からアインシュタインの講演録前編「特殊相対性理論」をテキストに用いて、特殊相対性理論の導入を行い、さらに自作のテキストでより詳しく学習を進め（時空図の扱いに重点を置いた）、“超光速粒子による過去との通信”というSF的話題で締めくくった。

本年度は、光に関する実験（偏光など）を息抜きも兼ねて時々行ってきたが、２年次からの新規履修者を入れたことに伴い、特殊相対性理論に関しては公開授業直前まで、もっぱら自作テキストを用いた復習に終始していた。自作テキストの目次のみ列挙する：

１．相対性原理と光速度の不変性

①慣性基準系と相対性原理　②光の振る舞い　③光速度の不変性　④光速度物語

２．時空

①時空というモノ　②事象と時空座標　③事象の時空座標、ミクロ観測員　③光の世界線

３．基本的な相対論的効果

①同時の相対性　②時間の相対性　③固有時間　④長さの相対性

４．時空図中の座標軸

①時間軸　②他の座標系の時間軸　③空間軸　④他の座標系の空間軸

⑤光の世界線の傾きを45°に

５．目盛り付きの時空図

①「軸」に目盛りをつける　②「事象間の間隔」とその不変性

６．曲がった時空

①空間面・時空面　②空間の歪み（曲がり方）を測定する／特別企画（p.270に掲載）

７．質量と時空

①等価原理　②慣性基準系　③重力と慣性力　④シュバルツシルト時空　⑤ブラックホール

公開授業の展開・結果

公開授業では１時間目に、特殊相対論を踏まえた時空の構造の話を復習として行い、２時間目には、２年次後半の授業内容（一般相対論とブラックホール）の導入として、「空間の歪み」を学ぶためのいくつかの作業を行った。次に、授業展開を簡単に記す。

１時間目

時空図の見方を復習。「同時の相対性」が時空図上ではどのように表現されるかを説明。次に、時空の幾何が通常の幾何（ユークリッド幾何）とは異なることを示唆したが、それでも特殊相対論の範疇

では、平坦な時空であることを伝えた。授業は、自作テキストを用いて進めたが、その中に朗読劇的要素を盛り込み、内容の難しさを和やかな雰囲気で乗り切るといった工夫を試みた。これはなかなか功を奏し、内容的には相当に難しいと思われる事柄を、少なくともイメージ的には“分かった気分”にさせる効果があった。後半は、「曲がった空間」について、特に「外在的」「内在的」「測地線」「局所的に平坦」という概念に重点を置いて説明し、その後、２時間目の実習の準備に取りかかった。

2時間目

２～４人１組になり、ビーチボールを使い、表面一部分の「内在的幾何」に基づく簡単な測定から、表面の「半径」を算出（詳しくはp.270参照）。「外在的」に求めた値との比較は次の通りであった。

	A班	B班	C班	D班	E班	F班
外在的半径	21cm	12	14	15.6	12.7	14.0
内在的半径	17cm	11	15	13.76	12.2	11.0

上表のように、外在的測定値と内在的測定値はまずまずよく一致している。内在的な測定値が小さめにでている班が多いが、私自身が行った事前の測定でも同様の傾向があり、ビーチボールの張り合わせ部分で測定した結果である。その部分では、半径は実際小さいのである！

研究協議

４名の外来者と本校の理科教諭３名、数学科教諭２名が参加して活発な研究協議が行われた。外来者は皆、数学の教員であり、参加動機は相対論よりもむしろ幾何学への興味のようであった。したがって、協議の内容も、もっぱら数学的な面に終始していたが、特に今回の２時間目の実習について話題が進展していった。例えば、曲面の面積をなるべく正確に測定する方法など、測定精度の向上について多くの活発な議論が行われた。また、本校数学教諭からは、数学の授業の際に触れた球面幾何との関連を例に、数学と物理（理科）との連携が、生徒の知的好奇心を刺激し、理解のレベルを高める可能性が高いという示唆があった。

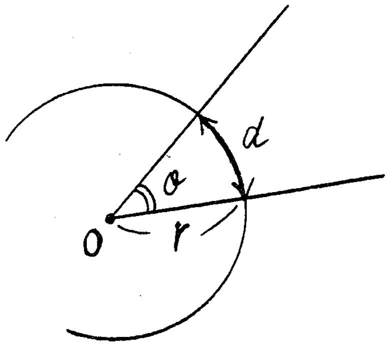
外来者の中からは、「内在的」「外在的」という概念が高校生には難しい、という指摘があった。しかし、そのことこそ今回の授業のメインテーマであり、受講生徒達はかなりの程度理解していたと私は確信している。実際、学年末に行った課題レポートの感想欄には、今回の実習が１年間の授業の中で特に興味深かった、といった記述をいくつも読むことができた。具体的な計算などの詳細は別にしても、「内在的」「外在的」という概念を理解することは、ガウスからリーマンへとつながる非ユークリッド幾何学の一つの大きな思想の流れを理解することであり、また、我々が住む宇宙の構造を理解するための最も重要な手段を知ることである。やはり「時空の物理学」としては、「そこは是非とも分かってく

れ」といったツボなのである！

その他、外来者からも指摘があったことだが、授業時間が不足して、円筒面上の内面幾何が「平坦」になることを生徒自身に発見させるチャンスを逸したのは大変残念なことだった。私が説明をしたが、意外性のある事柄であり、やはり生徒に実習の中で発見させたかった。

特別企画
☆空間の歪みを測定する！？：ベクトルの平行移動実験

内在的な立場であっても、理論上は、ベクトルを閉じた線上に乗せ、ぐるりと一周平行移動させることにより、空間の歪み（曲がり）を調べることができる。さあ、宇宙船Ω、Ψ、Σのクルーになったつもりで「ベクトルの平行移動実験」をやってみよう！

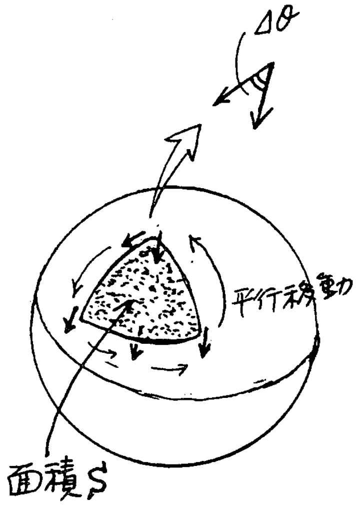


1 rad：便利な角度の単位

右図のように、ある角度θが与えられたとき、頂点Oを中心に半径rの円(円弧)を描き、角度をつくる２本の線分で切り取られる弧の長さをdとする。こうしておいて、あらたに角度θのはかり方を次のように定義する：

$$\theta = \frac{d}{r} \ [\mathrm{rad}]\ (\text{ラジアン})$$

問 38 360°、180°、90°、45°、30°はそれぞれ何radですか(円周率πを使って表現してよい)。また、1 radはおよそ何度ですか。



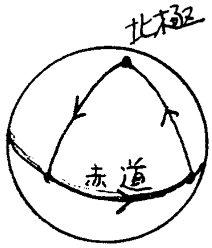
[理論："平面"が"球面状"に曲がっている場合！]

内在的な立場で、球面の半径R[cm]を求める方法は次の通りである。

ベクトルの平行移動実験で、平行移動で元に戻ってきたベクトルが、初めの向きと角度$\Delta\theta$[rad]だけ向きが違っていたとする。また、ベクトルが巡ってきたルートで囲まれた部分の面積をS[cm^2]とする。そんな場合、実は次の式が成り立つのです！

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\Delta\theta\,[\mathrm{rad}]}{S\,[\mathrm{cm}^2]} \qquad \cdots(25)$$

問 39 右図のように、北極から子午線に沿って赤道に至り、そこから赤道に沿って、1／4周してから子午線沿って北極に戻るルートを考えよう。このルートに沿って「ベクトルの平行移動実験」を行った場合について、(25)式が成り立っていることを確かめなさい。



[実験その１]

平面上（机の上）にxy軸が描かれた紙を置き、図１のように、３本のピンッと張った糸で三角形（△ΩΨΣ）をつくる。それぞれの糸は直線状に張られているが、あえてこれを**測地線**と呼んでおこう。どうしてかって？それは…私達にとって、このxy面は「xy平面」だが、もしかして…

高次元人達「エッヘッへ、平面だってサ！ちょっと曲がっているのに、分からないんだネ！ワッハッハ」

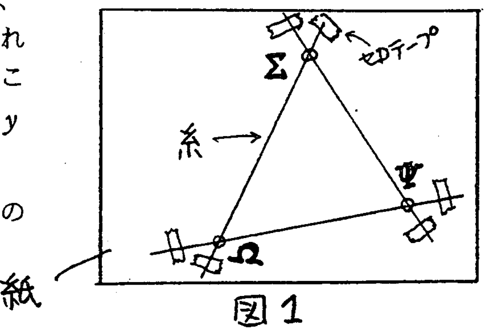


図１

･･･なんて笑っているかもしれない。私達の糸も、*高次元人*から見れば直線ではないかもしれない。ああ、くやしい！　でも、私達にとって、糸は2点間を結ぶ最短距離になっている。糸は私達にとって2点間を結ぶ特別な線。それで、測地線という特別な名前で呼ぶことにする。

ベクトルの平行移動作業

糸でつくった三角形に沿ってベクトルを平行移動させてみよう。

1. トレーシングペーパーに図2ように、点Oを通る“直線” l を引きその直線上に適当な長さのベクトル号描こう。ベクトル号に、あらためてベクトル $\vec{P}$ という名前を付けてあげよう。

トレーシングペーパーは小さいので「**局所的に平坦**」と見なせる領域と考えよう。

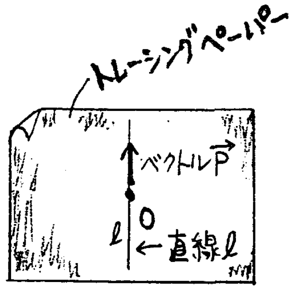


図2

2. 点Oを三角形の一つの頂点Ωに一致させ、さらに直線 l を図3のように、辺ΩΨ(一つの測地線)に一致させる。

3. ベクトル $\vec{P}$ を測地線ΩΨに沿って頂点Ψまで平行移動させる。要は、直線 l と測地線ΩΨを一致させながら、トレーシングペーパーをズルズル動かしていけばいいのだ･･･

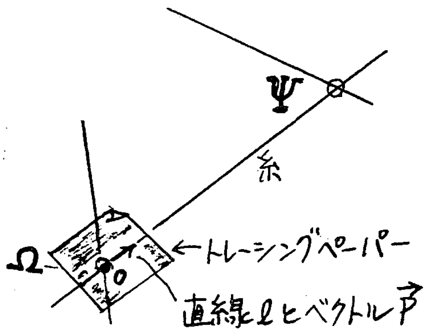


図3

「バカみたい！ズルズル移動なんてさせなくていいじゃない！トレーシングペーパーを持ち上げて点Oを頂点Bに一致させれば済むことを･･･」

なんて怒らないでネ。ここは我慢して付き合って！

4. 点Oが頂点Ψに達したら、図4のように、測地線ΨΣ上の適当な点をトレーシングペーパーに転写し、その点と点Oを結ぶ直線 m を描く。

5. ベクトル $\vec{P}$ を測地線ΨΣに沿って頂点Σまで平行移動させる。今度は、直線 m と測地線ΨΣを一致させながら、トレーシングペーパーをズルズル動かしていけばいいのだ。

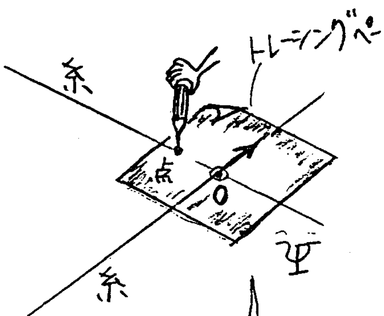
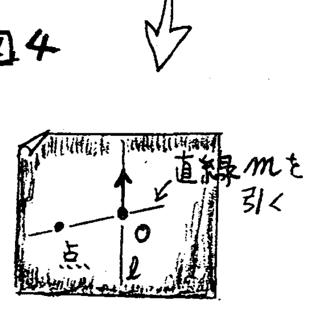


図4



6. 点Oが頂点Σに達したら、図4と同様に、測地線ΣΩ上の適当な点をトレーシングペーパーに転写し、その点と点Oを結ぶ直線 n を描く。

7. ベクトル $\vec{P}$ を測地線ΣΩに沿って頂点Ωまで、前と同様に平行移動させる。

さて、戻ってきたベクトル $\vec{P}$ は出発のときの向き（測地線ΩΨに平行）と一致しただろうか。一致していれば、xy 平面はやっぱり平坦だったことになるし、食い違っていれば･･･実は曲がっている（歪んでいる）ということになるのだ！･･･操作の不手際がなければネ

[実験その2]

私達が平面と信じていた「xy 平面」が実は*高次元人*から見て球面の一部だったとしよう。パンパンに膨らましたビーチボール上で、上述と同じ「ベクトルの平行移動実験」を行おう。今度は、トレーシングペーパー(局所的に平坦)と鉛筆の先は現実の私達を意味しているが、それらを見る「目」は*高次元人*の目になっているのだ！

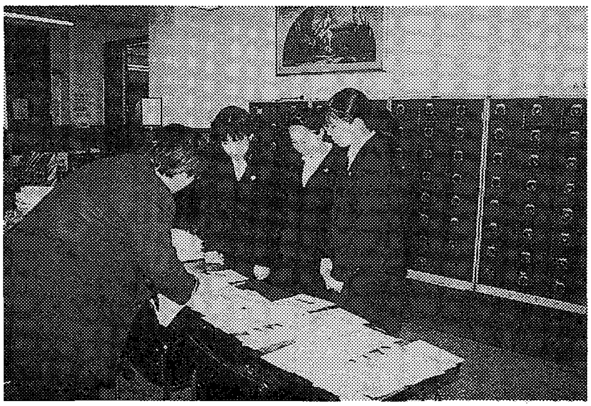
(1)前述の理論を使って、内在的な立場からビーチボールの半径を算出しよう。角度の測定、面積の測定をそれぞれ実際にやろうとすると、問題点がありますネ。なんとかやっていきましょう！

(2)さて、では外在的な立場でビーチボールの半径を測定してみてください。その結果を(1)の値と比較検討してみましょう。

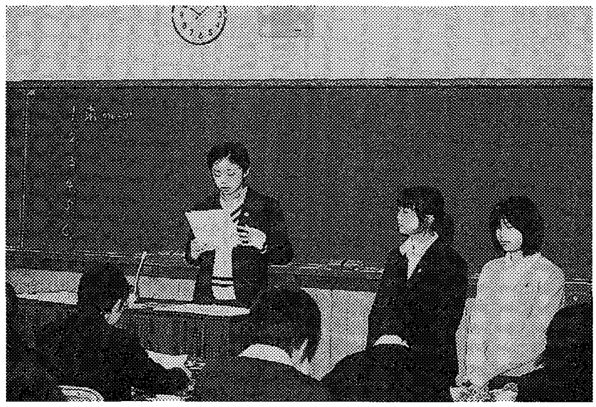
[実験その3]

今度は、円筒面上で、ベクトルの平行移動実験をやってみよう。意外なことになるかも・・・

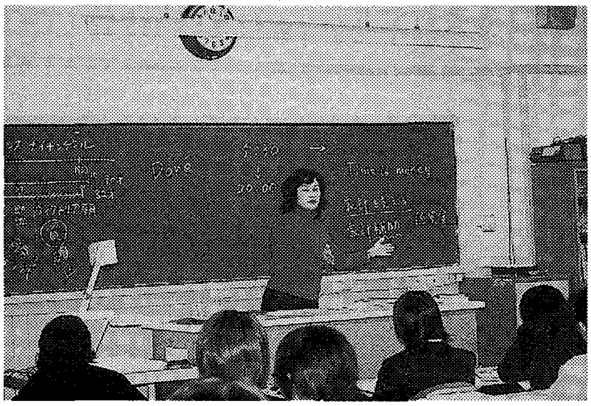
公開教育研究会スナップ写真



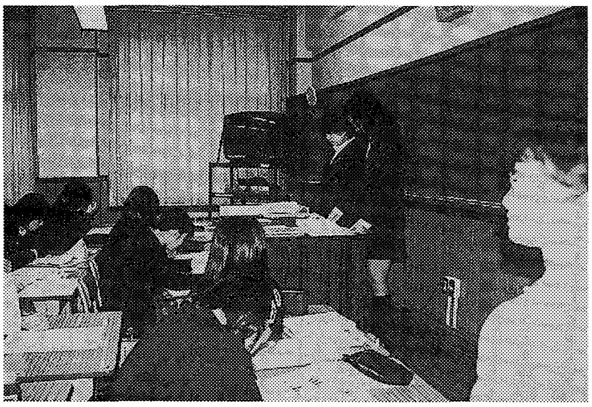
受　付



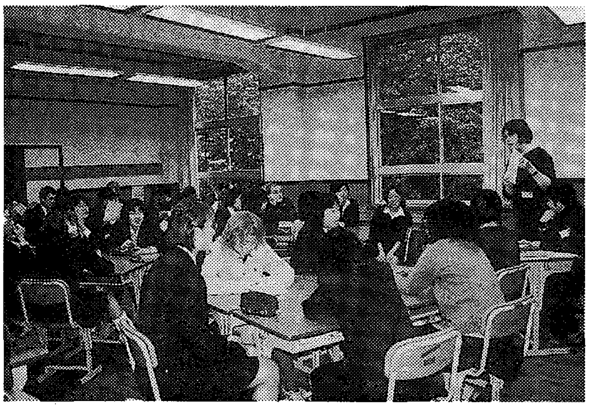
国語Ⅰ



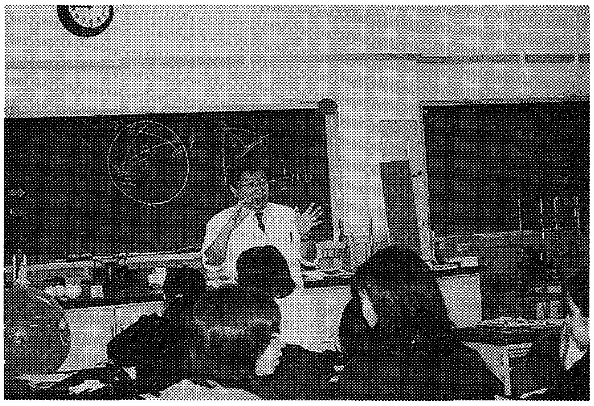
世界史A



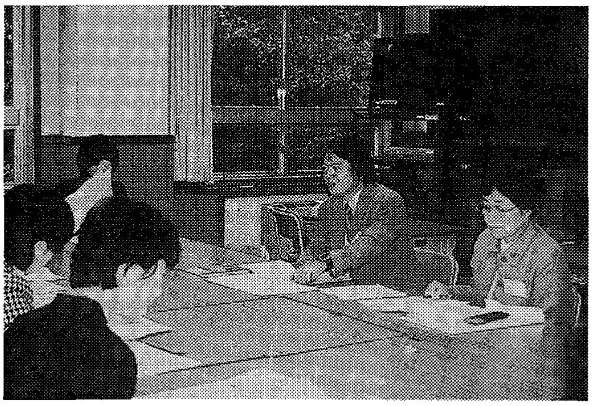
家庭一般



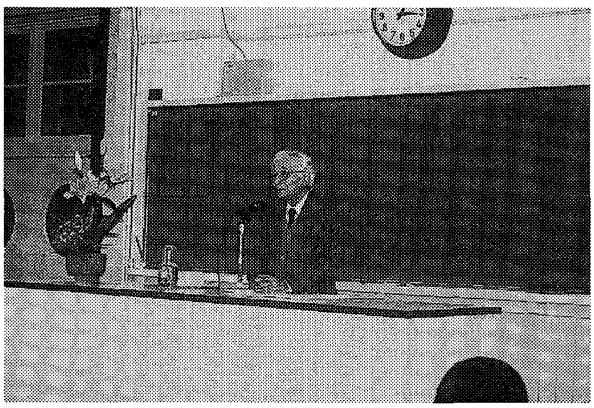
国際（異文化理解）



特設「時空の物理学」



研究協議（国語Ⅰ）



講演会