数学③コース：数について考える

（グラフ電卓を活用した数、関数の教材）

室　岡　和　彦

1．　ねらい

中学校の数学や高校の数学は、ともすれば問題のための問題、ドリルのための問題が強いという批判が強い。教材については、教科書で扱う内容が最低のものであり生徒の実態に応じて適宜教材を工夫できることが言われだしている。また、指導法については、生徒に興味・関心をもたせる教授法や教具の工夫が求められている。ここでは、グラフ電卓を活用した数と式、数量関係や関数の教材を扱ってみた。

2．　グラフ電卓の可能性

現在教育用に市販されているグラフ電卓では次のことができる。

- 数の計算；整数の計算（2進、8進、16進整数を含む）、小数計算、分数計算、複素数計算、三角関数など関数の値の計算
- 行列計算、微分計算（数値）、積分計算（数値）、Σの計算（数値）
- 方程式の解の計算（3次方程式の複素数解、3元連立方程式）
- 関数のグラフ（直交座標、媒介変数表示、極座標表示、不等式表示、確率分布）
- 関数の分析（任意の定義域・値域、最大・最小値、零点、拡大・縮小、重ね書き）
- 数列の計算（一般項、漸化式）
- 統計計算（数値データの入力、1変数計算、2変数の回帰計算）
- プログラミング（数値計算）

しかし、現在のグラフ電卓では次のことができないか、操作が困難である。

- 複素数計算、文字計算（一部のみ）
- 微分・積分の文字計算
- 4次以上の方程式の解
- 高度な統計分析

これらの内容は、数学の原理・法則を確実に身につけることが暗黙の条件であった。しかし、世の中に利用されている数学を生徒が理解する場合、これまでの系統づけた指導法では無理が生じている。

3．操作の困難さ

グラフ電卓やコンピュータを教具として使うとき、最初に操作方法に慣れさせることが困難であるといわれる。特に、グラフを描く操作については生徒全員が慣れるには時間と手間がかかることが知られている。ここでは、基本的なグラフなどを描く操作を示す。

(1) グラフを描く

$\boxed{\text{MENU}}$ を押し、▲◀などで $\boxed{\text{GRAPH}}$ を選び、$\boxed{\text{EXE}}$ を押す。

(a) 定義域、値域を設定する

$\boxed{\text{AC}^{/\text{ON}}}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{f3}}$ (V-windows) $\boxed{\text{f1}}$ (INIT) $\boxed{\text{EXIT}}$ を押し、$\boxed{\text{F6}}$ (DRAW) を押す。

(b) $y=x^2-2x$ を描く

前の式を消す；▼などで消したい式を示し、$\boxed{\text{f2}}$ (DEL) を押す。

$\boxed{\text{X}, \theta, \text{T}}$ $\boxed{\text{X}^2}$ $\boxed{-}$ 2 $\boxed{\text{X}, \theta, \text{T}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\text{F6}}$ (DRAW) を押す。

(2) 方程式の解を求める

例えば、$x^3-x-1=0$ の解を求める。

$\boxed{\text{MENU}}$ $\boxed{▶}$ とし、$\boxed{\text{EQUA}}$ を選び $\boxed{\text{EXE}}$、$\boxed{\text{F2}}$ (POLY)、

Degree？ に対して $\boxed{\text{F2}}$ (3)で 3 次方程式

係数 a,b,c,d に 1，0，－1，－1 を入れ $\boxed{\text{F1}}$ (SOLV) とすると解 1.6100…

このように、グラフを描くときには20回程度、方程式を解くときは10回程度のキーを押す必要があり、その1つでも間違えると復旧に非常に時間がかかる。公開授業では、操作の1つ前の状態に戻るキー $\boxed{\text{EXIT}}$ の使い方を最終段階として操作の慣れを図った。

4．有効な問題

公開授業では、グラフ電卓を使った発展的な教材、生徒が興味・関心をもつ教材として、次のような問題を取り上げた。

(1) $a^0=1$ を証明する。（推論の活動を活発にする）

① a^0の値を調べる

a	－2	－1	0	1	2	3	100
a^0	1	1	1	1	1	1	1

② 背理法；$a^0\neq 1$ とすると矛盾が生じることを示す。

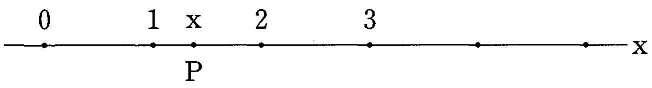
例1；$a^0=0$ とすると、「和の法則」$a^m\times a^0=a^{m+0}$から、常に a^0が 0 になってしまう。

例2；$a^0\neq 1$ とすると、$a^m\times a^0=a^{m+0}$から $a^m\neq a^m$になってしまう。

(2) 関数を作る

具体場面をもとに関数を作ってその性質を調べ、類似の問題を考える。

$\boxed{\text{問1}}$ 数直線上に点P(x)があり、3点0，1，3からの距離の和yをxで表し、その最小値を求めよ。



表現1 場合分けする

①x＜0のとき、y＝－3x＋4

②0≦x＜1のとき、y＝－x＋4

③1≦x＜3のとき、y＝x＋2

④3≦xのとき、y＝3x－4

表現2 絶対値記号で表す

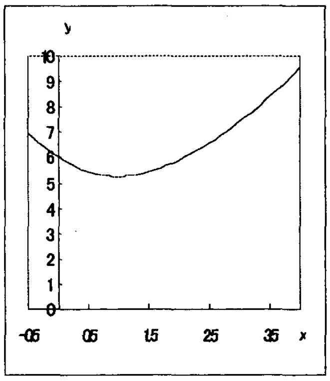
$y=|x|+|x-1|+|x-3|$

x＜1のとき単調減少、1≦xのとき単調増加だからx＝1のとき最小値1＋2＝3をとる。

$\boxed{\text{問2}}$ 座標平面上に点A(0,1)、B(1,－1)、C(3,2) がある。

点P(x,0)がx軸上を動くとき、距離の和XA+XB+XCのグラフを描き、その最短値とそのときのxの値を求めよ。

式；$y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt{(x-3)^2+4}$



この式は高校では扱われないが、グラフ電卓を使えば最小値が近似的に求められる。

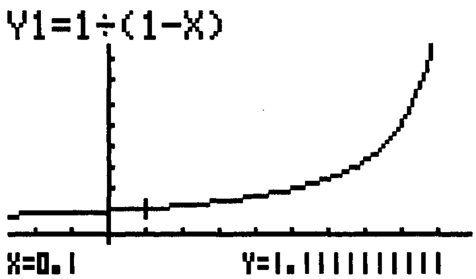
(3) 数とグラフを関連づける

(a) 準備；y＝1.111111…を分数で表す。

$y=\dfrac{1}{1-0.1}$

(b) $y=\dfrac{1}{1-x}$ にx＝0.1を代入する。

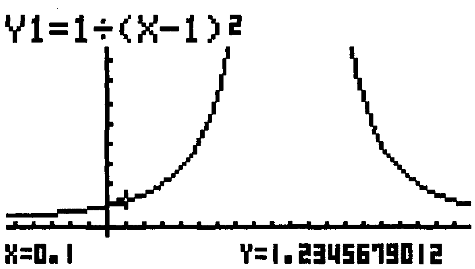
x＝0.1のときy＝1.111111…となる。



(c) 1.234567…を分数で考える。

x＝1.234567…とする。

$y=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ にx＝0.1を代入する。



こうしたアプローチによると、関数のグラフと代数との関連づけがグラフ電卓を介して可能になる。グラフという関数の1つの現象を、代数的にとらえて関数の意味を裏付けることは、数学の概念を広げる教育的な意味がある。

5. 指導結果

こうした教材を公開授業では５人の生徒に与えた結果、生徒は次のような結果になった。

・グラフ電卓は最初は操作が難しく、ミスをするとどうしてよいかわからない。しかし、グラフを描いたり、方程式を解いたりするのに非常に便利だ。

・関数にグラフ電卓が入用なこと、グラフ電卓を使えばいろんな数学に飛べることがわかった。

・自分で関数をいじれるのでおもしろい。

参考文献等

Kenny, M.J., et.al., Discrete Mathematics across the Curriculum K-12, NCTM　1991

Razlo Loversz 秋山仁、ピーターフランクル翻訳「入門組合せ論」共立出版　1985

室岡　和彦他「Mathematica による離散数学入門」東京電機大学出版局　1996