

「和算」の教材化の試み

お茶の水女子大学附属小学校

榎 本 明 彦

- I 研究の目的
 - 1 和算の魅力
 - 2 思考力・表現力の育成と和算
 - 3 本研究の目的
- II 研究の方法
 - 1 教材の選定
 - 2 教材化
 - 3 授業実践からの考察
- III 和算の特徴と教材化
 - 1 和算の特徴
 - 2 それぞれの問題の特徴と単元の構想
- IV 授業の実践
 - 1 俵杉算
 - 2 盗人隠し
 - 3 鶴亀算
- V 考察
 - 1 和算の教材化の可能性
 - 2 思考力・表現力育成における和算の有効性
- VI 今後の課題
 - 1 今回の実践の修正, 追加
 - 2 教材化したい和算の問題

I 研究の目的

1 和算の魅力

和算は、江戸時代に大きく発展した。和算を学んだのは武士だけではない。商人や農民も和算を楽しんでいた。佐藤健一は「和算で遊ぼう」(2005)で、和算を「江戸時代の庶民の娯楽」と表現している。パズルのようなおもしろさをもつ問題もある。

伊藤洋美は「おもしろ和算」(2003)の中で、和算の特長を「日本という固有の歴史や文化によって育まれたことからくる親しみやすさ」と「生活感あふれる具体性」と指摘している。新学習指導要領でも、日本の伝統と文化の尊重が強調されている。

和算には、多くの種類の問題がある。「〇〇算」と呼ばれる問題が多いが、図形の問題もある。複数の正解がある問題も多い。解法も様々に考えられる。

和算の魅力、特徴をまとめると、次のようになる。

- ・子どもでも興味をそそられるおもしろい問題
- ・日本という固有の歴史や文化による親しみやすさ
- ・生活に密着した具体性
- ・正解、解法が複数ある

2 思考力・表現力の育成と和算

新学習指導要領では、思考力・表現力の育成が強調されている。

「小学校学習指導要領解説算数編」(2008)には、思考力・表現力について次の記述がある。

○数学的な思考力・表現力は、合理的、論理的に考えを進めるとともに、互いの知的なコミュニケーションを図るために重要な役割を果たすものである。このため、数学的な思考力・表現力を育成するための指導内容や活動を具体的に示すようにする。特に、根拠を明らかにし筋道立てて体系的に考えることや、言葉や数、式、図、表、グラフなどの相互の関連を理解し、それらを適切に用いて問題を解決したり、自分の考えを分かりやすく説明したり、互いに自分の考えを表現し伝え合ったりすることなどの指導を充実する。

思考力と表現力は、個々独立した能力ではない。思考のプロセスで表現が必要になる場合もある。表現によって思考が高まることも期待できる。表現することによって、集団での話し合いが進み問題の解決に至る場合もある。

思考をするためには、問題を正しく把握する必要がある。子どもたちが正確に場面を把握することができ、思考してみたいくなる興味をそそられる問題であることが望ましい。

子どもが自分たちの力で、もとの問題を発展させていくことができれば、さらに思考力、表現力が育成されていくことが期待できる。

そこで、和算を教材化できないかと考えた。上に挙げた「和算の魅力、特徴」が思考力、表現力の育成につながることを期待できる。

- ・おもしろく、親しみやすい問題は子どもが興味をもち、思考力が発揮される。
- ・具体的な問題は、問題の状況がイメージしやすく、解決にあたっては図や絵で表現をしやすい。
- ・具体的な問題は、発展させやすい。
- ・正解が複数ある問題は、「ほかにも正解があるのではないか」とさらに思考力が発揮される。
- ・解法が複数ある問題は、子どもたちがそれぞれの解法を説明しあい、話し合いを経てそれぞれのよさについて考える機会になる。

和算の中には小学生には難解な問題もある。しかし、適切な問題を選択し、必要に応じて数値を調整したり、発問のしかたや配列を工夫したりすれば、思考力、表現力の育成につながる教材にすることが

可能であると考ええる。

3 本研究の目的

本研究の目的は、和算を教材化し、授業実践を行って、この教材が思考力・表現力を育成につながることを検証することである。

なお、授業の対象は3年生である。

Ⅱ 研究の方法

1 教材の選定

和算の中から、小学生を対象に授業ができそうな問題を選定する。

2 教材化

数値、発問のしかたや配列など考えて教材として構成する。

3 授業実践からの考察

授業実践を行い、教材化した和算の問題が思考力・表現力の育成にどの程度つながったかを考察する。今回は授業の対象が3年生なので、高学年であれば可能な問題や展開についても考察する。

Ⅲ 和算の特徴と教材化

1 和算の特徴

そもそも「和算」とは何か。「和算用語集」(佐藤, 2005)には、次の記述がある。

和算(わさん)

中国の数学を基礎として、江戸時代に日本で発達した数学のことである。明治以降ヨーロッパの数学を移入して今日にいたっている数学を洋算といって、日本の数学を区別して和算といった。中国からの数学の移入は、飛鳥奈良時代と江戸時代始めの2回あった。1回目は貴族の特定の階層だけにしか広まらなかった。2回目は、江戸時代に入る少し前から伝わった。以下の(1)から(6)までの様々な要因によって日本独特の数学を作り上げた。和算家といわれる人には、武士をはじめ様々な職業の人がいた。

(1) 社会的背景

商業の発達にともなって、自然発生的に出現した寺子屋では、読み・書き・そろばんを教えていたが、このそろばんでは、実用のための数学までを教えた。実用を離れた数学は、数学塾などで教授した。印刷技術の発達により、実用から専門まで幅広く和算書が発行され広く出回った。

吉田光由の『塵劫記』は、図に彩色が施されてあるものもあり、全体的に興味を引く問題が扱われている。このため、商業や工芸等に関する実用のためだけでなく、趣味として多くの人に親しまれ人気は高かった。吉田光由の『塵劫記』発行は遺題を載せた寛永18年版が最後であるが、塵劫記と名のつく和算書は大正2年まで続いた。

(2) 遺題継承

遺題継承とは、ある人が答えや解き方を除いた問題を自分の著書に載せる。このような問題を遺題という。この遺題を見た別の人がその問題を解いて自分の著書に載せる。この人が自らも遺題を載せれば遺題が継承される。これが繰り返されて、より難しい問題、多種多様な問題へと発展し、和算の発展に大きな影響を及ぼした。

(3) 算額

算額奉納は、いつごろの時代から始まったのかは定かではないが、記録としては1673年の和算書『算法勿憚改』に目黒不動の算額を奉納することが流行していることを書いている。18世紀の終わり頃から19世紀の初めにかけてのころに、奉納はさかんに行われたようである。図形に関する問題が多く、図を色づけしたものが多数ある。他の絵馬と同じような形式で奉納された。

(4) 遊歴算家

和算を教えながら旅をした人のことで、名主や弟子の家に滞在して数学を教えた。

(5) 計算器具

和算は、算木とそろばんを数値計算の道具として利用して、発達した。

(6) 筆算

紙の上で代数計算が出来るようになった。式を書き表すことができるようになり、高度な問題を処理することができるようになった。

2 それぞれの問題の特徴と単元の構想

授業を行う対象が3年生なので、あまり複雑な問題、高度な問題は取り上げにくい。「俵杉算」「盗人隠し」「鶴亀算」の3つを選び、教材化を試みた。

それぞれ、文献から問題を引用し、教材化の可能性を考えてみる。

(1) 俵杉（たわらすぎ）算

a 俵杉算とは

俵杉算とは

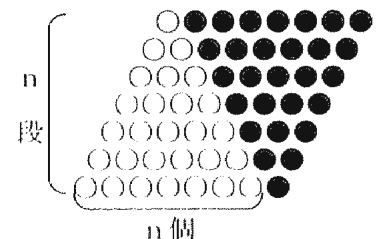
米俵を二等辺三角形形状に積み上げたとき、最上段と最下段の俵の数から、重ねられている俵の総数を求める計算です。古くは「塵劫記」に絵入りで書かれています。

もし最上段が1俵になっていて、最下段にn俵並んでいるとすると、俵の総数は、

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

という関係式で表されます。図のように上下逆にした俵を組み合わせれば、最下段がn+1個、積み上げた段数n段になるので、総個数はn×(n+1)です。これを2つに割れば、総数が計算できます。

「日本式数学『和算』でパズルを」(佐藤, 2008)



〔例題1〕最下段が13俵あります。上に12俵、11俵……と、1俵ずつ減らして積み上げたとき、俵の総数は何俵でしょうか。(最下段の俵の数から、全体の俵の数を求める)

〔式〕 $13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

$13 + 1$, $12 + 2$, と14の組み合わせを作っていくと、

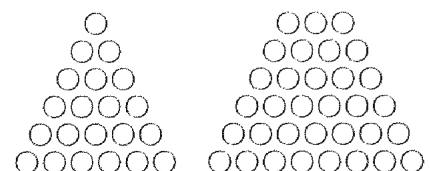
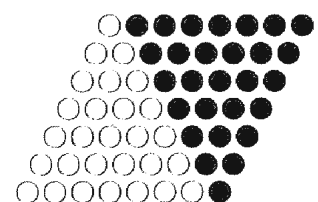
$$14 \times 13 \div 2 = 91$$

〔答え〕91俵

図で考えると、右のように平行四辺形を作っていることになる。

〔例題2〕米が190俵ある。これを杉成りに積むと、最下段は何俵か。(俵の総数から、最下段の俵の数を求める(三角形に積む場合))

米俵を二等辺三角形や等脚台形の形に積み上げることを



「杉成りに積む」という。

[式] [答え] 略

[例題3] 米俵が全部で189俵ある。これを杉成りに積む。ちょうど7段で積み終わった。では一番上の段にある米俵の数と、最下段にある米俵の数はいくらか。(俵の総数と段数から、最下段と最上段の俵の数を求める(台形に積む場合))

[式] [答え] 略

b 教材化にあたって

小さい数値から順に取り上げていく展開によって、図をかいたり、数を組み合わせて同じ数を作るアイデアなどを導き出すことができそうである。

多くの数を加えるたし算を、同じ数を作ってかけ算に変えるアイデアによって、かけ算のよさを実感することができるだろう。

(2) 盗人隠し

a 盗人隠しとは

盗人隠し

ものの配列を変えて、数の総和(全部の合計)の増減をごまかしたりする遊びです。

遊び方

右の図は、総和が16となる基本型で、各辺に並んでいる数の和がどれもみな7になっています。真ん中のますはこの場合は関係がないので無視することにします。このように8個のますに、3, 1, 3のような数字を並べ、各辺の数の和がいつも一定の7になるようにする遊びです。

3	1	3
1		1
3	1	3

江戸時代の数学入門書「算法童子問」(1784)からのものですが、もとは中国から入ってきました。

見張りのいる城に盗人たちがやってきて、かくまってくれるように頼みます。そこで、みんなで知恵を出し合い、全体の人数が増えたのに、外側の4辺に並ぶ人の数をたしても和が変わらないようにしたといいます。

日本では碁石を使った遊びの1つとして室町時代には定着していたようです。

「和算」(佐藤, 2006)

b 教材化にあたって

問題が多少複雑なので、問題提示をていねいに扱う必要があるだろう。

正解が複数あり、解決方法も様々に考えられるので、自分の考えに固執せず、ほかの子の考えをよく聞き、自分の考えと比較してさらに高めようとする場面があると期待できる。

また、「もしこのますに○(数)を入れると、こどうまくいかなくなる。だから、ここに○は入らない。」といった筋道立てた表現を必要とする場面が多く表れるはずである。表現力を鍛えるためにもすぐれた教材と考えられる。

(3) 鶴亀算

a 鶴亀算とは

鶴亀算とは

鶴の頭数と足数、亀の頭数と足数についての問題で、足数の異なる動物を使い、身近にあるものを題材にしています。もともとは古代の中国数学書で紀元2~3世紀にできたという「孫子算経」で出題された問題がもとになっています。「孫子算経」では雉と兎でした。中国の「算法統宗」でもこの

問題は取り上げられています。(中略)

差のあるものについての問題は全て雉兎の問題と解き方は同じということで、小僧と大僧にまんじゅうを分ける問題などもありました。江戸時代には「鶏兎算」と呼ばれており、鶴と亀が登場するのは幕末に著された「算法点竄指南録」以後のことです。

「日本式数学『和算』でパズルを」(佐藤, 2008)

[例題1] ここに鶴と亀が合わせて100頭いる。その足数を合わせると272足である。鶴と亀、それぞれいくらか。

[式] 亀の足数4から鶴の足数2を引くと2。

$$100 \times 4 - 272 = 128$$

$$128 \div 2 = 64$$

$$100 - 64 = 36$$

[答え] 鶴64頭, 亀36頭

現代の生活につながる問題も作ることができる。

[例題2] 会社でパソコン用のUSBメモリを一括購入することになりました。社員は全部で42人、予算は120,000円です。高容量のUSBメモリAが3,600円(税込み)、容量の少ないUSBメモリBが2,300円(税込み)であるとき、できるだけAを多く購入しつつ社員全員にUSBメモリを配布するためには、A・Bをそれぞれ何個ずつ買えばよいでしょうか。(「日本式数学『和算』でパズルを」)

[式][答え] 略

b 教材化にあたって

鶴亀算の問題の作り方は、様々な形に応用可能である。たとえば、足の数のちがうものを登場させて、次のような問題も作ることができる。

[例題] たこといかが合わせて10匹いる。その足数を合わせると、92本である。たこといかは、それぞれ何匹ずついるか。

さらに、登場する動物を自分たちで考えて問題を作ることでもできる。

答えのない問題も作ることでもできる。答えのない問題をどのように変えれば答えがある問題にできるか、その条件について検討することによって、筋道立てた思考力・表現力を発揮する機会になるはずである。

IV 授業の実際

1 俵杉算

(1) 授業の構想、ねらい

二等辺三角形形状に積んだ最下層の俵の数から、俵全体の数を求める問題を取り上げて、1時間の授業を組み立てた。

最下段の俵の数は、[問題1]で5個、[問題2]で9個、[問題3]で19個とした。[問題2]は、 $1 + 9$, $2 + 8$, ……で10を、[問題3]は、 $1 + 19$, $2 + 18$, ……で20を作れる数値にした。

最下段の俵の数が大きくなると、総数を求める計算は煩雑になる。順番にたしていったのでは手間がかかるし、まちがえる確率が高くなる。それを見通し、何らかの工夫をし、それを絵、図、式などで的確に表現することが1つめのねらいである。

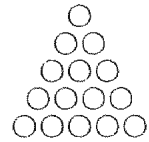
さらに、前の問題を解決するときにはほかの子から出された方法の中から、今取り組んでいる問題を解決するのに適した方法を選ぶために、その方法のもっているよさを読み取ろうとすることが2つめのねらいである。

(2) 授業の実際

T:「和算の中の『俵杉算』をやってみましょう。

俵というのは、わらを編んでこういう形（円筒状）に作ったもので、米を入れていました。米が60 kg入ったそうです。」

〔問題1〕 米俵を、いちばん下が5個でいちばん上が1個になるように積みました。
米俵は全部で何個あるでしょう。
米俵を積んだ形が杉の木に似ていたの、俵杉算と呼ばれているそうです。



T:「では、答えが分かった人。」

C:「はい。15個です。」

T:「あら、計算が速いねえ。どういうふう考えたの？」

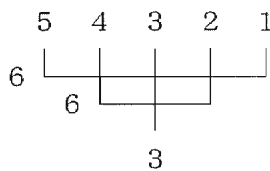
C:「3つつグループを作っていって、 3×5 の計算で求めた。」(※1)

C:「 3×5 っていうのは、絵をかいて3個ずつグループを作って丸で囲んだの。」

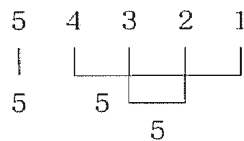
T:「ああ、そういうことか。」

C:「5と1で6を作って、4と2で6を作って、 $6 \times 2 + 3 = 15$ で求めた。」(図1)

C:「5はそのまま、4と1、3と2で5を作れば、 5×3 になる。」(図2)



(図1)



(図2)

C:「いちばん下の段が5個で、あとは10個だから、 $5 + 10$ で15。」

T:「いちばん上から4段目までの合計が10個っていうのは、どうして分かったの。」

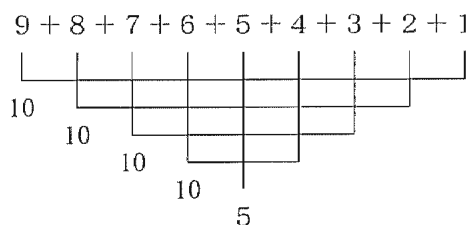
C:「それは覚えているから。」

T:「へえ。そうなのか。こういうのを覚えていると便利だね。」

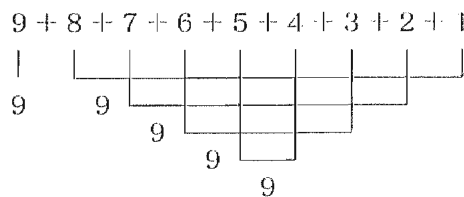
〔問題2〕 では、今度は、いちばん下が9個のときで、いちばん上は1個のときです。俵の数は、全部で何個でしょう。

C:「今度は、9と1を組み合わせればいい。 $10 \times 4 + 5 = 45$ 。」(図3)

C:「8と1を組み合わせてもできる。 $9 \times 5 = 45$ 。」(図4)



(図3)



(図4)

C:「 $55 - 10 = 45$ 。」

C:「え、55って何？」

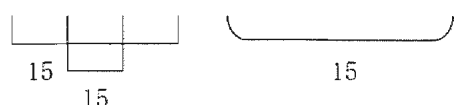
T:「55は、どこから出てきたの？」

C:「1から10までたすと55だから、そこから10を引けば1から9までたした45が分かる。」

T:「1から10までたすと55っていうのを覚えているのか。」

C:「〔問題1〕で、1から5までたすと15って分かっているから、それを使う。 $15 \times 3 = 45$ 。」(図5)

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$



(図5)

T:「なるほど。分かっていることを使うっていうのもいいね。」

[問題3] 次は、いちばん下が19個のとき。いちばん上は1個のとき、俵の数は全部で何個でしょう。

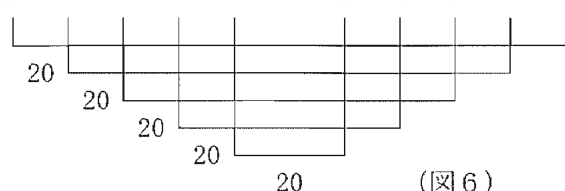
C:「ええ、計算がたいへんそう。」

C:「……。あ、できた。」

C:「はや〜い。」

C:「19と1を組み合わせると20ができる。 $20 \times 9 + 10 = 190$ 。」(図6)

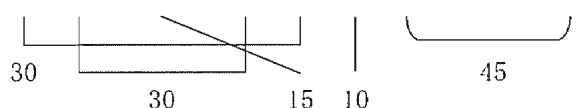
$$19 + 18 + 17 + 16 + 15 + \cdots + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$



(図6)

C:「9から1までをたすと45っていうのを使った方がいい。 $30 \times 4 + 15 + 10 + 45 = 190$ 。」(図7)

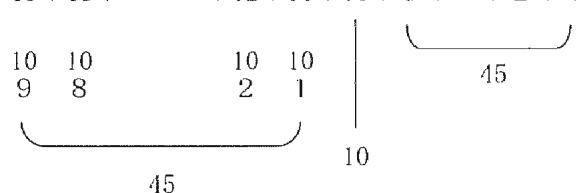
$$19 + 18 + \cdots + 12 + 11 + 10 + 9 + \cdots + 2 + 1$$



(図7)

C:「19を10+9って考えれば簡単にできる。 $10 \times 9 + 45 + 10 + 45 = 190$ 。」(図8)

$$19 + 18 + \cdots + 12 + 11 + 10 + 9 + \cdots + 2 + 1$$

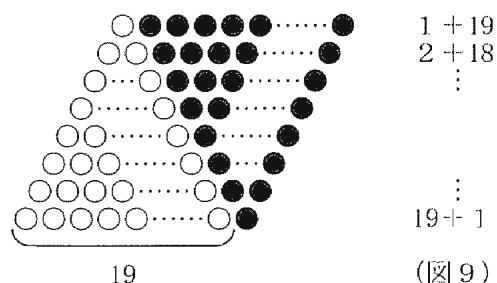


(図8)

T:「なるほど。9から1までたす式が2つできて、あとは10が残るから計算が楽にできるわけか。」

C:「俵をひっくり返して、こういうふうに並べると、全部20になる。 $20 \times 19 = 380$ 。この半分だから190。」

(図9)



(図9)

(3) 単元の考察

[問題1] の俵を同じ数ずつ囲む方法(※1)は稚拙ではあるが、かけ算ができれば計算がしやすくなるというヒントを全体に投げかける役割を果たした。かけ算ができる形にするために、2つの数を組み合わせるという発想につながった。

[問題2] では、9を5つ作る考え方と、10というきりの良い数を作る考え方が出てきている。一つの

かけ算で表せるよさと、10や20を作る組み合わせのよさがあることに気付いたようである。さらに、[問題1]で答えがすでに分かっている部分は、それを使うという発想が出てきている。

[問題3]を出題したときに、「この問題は、あの方法がよさそうだ。」「あの解き方でやってみよう。」というつぶやきが聞こえてきた。問題に適した組み合わせ方を見通したり、前の問題で答えが分かっている部分を使うとよさそうだという見通しをもったりしていると考えられる。さらに、同じ部分を作ることができれば計算が楽になるという見通しから、数を分解するという方法も出てきている。(図8の $9+8+\cdots+2+1$ の部分)

(図9)は、授業が終わってから言いに来た。倍積変形の考え方である。次時に学級全体に紹介した。

最下段の依の数を5個、9個、19個にして問題を構成したが、[問題3]はたとえば23個にすれば $1+23$ が24となりきりのよい数にならない。このような場合の処理について考えさせると、より思考が深まったかもしれない。

2 盗人隠し

(1) 授業の構想、ねらい

これは、使う計算はたし算だけなので、3年生でも十分取り組める。そして、パズル的なおもしろさがある。

ももとの問題は、総和が16で、各辺の和がそれぞれ7から総和が増える場合である。しかし、これでは3年生にはむずかしそうなので、総和が12で、各辺の和がそれぞれ5の場合について、まず確認をする。そして、総和が増えて(盗人が来て)14になった場合のならび方について考えさせる。

うまくいったならび方を見て、帰納的に「総和から各辺の和の2倍を引くと☆+★になる」ことが分かり、これを使うと問題解決が楽にできることに気付くことをねらっている。

	☆	
	★	

さらに、この問題では、「もしここに○(数)を入れると、こうこうこうなってしまう。だから、ここには○は入らない。」という説明が必要になる。このような考え方、表現のしかたに慣れるようにすることが2つめのねらいである。

(2) 授業の実際

第1時

[問題] 江戸時代、あるお城では、敵が攻めてきたらすぐに分かるように、高いところに見張りを置いていました。北、西、東、南のそれぞれの方角に5人ずつ、全部で12人で見張ることにしていました。

ある日、お城に盗人がやってきて、かくまってほしいと頼みました。そこで、見張りの中に紛れ込ませ、かくまってやることにしました。それぞれの方角の5人は変えず、合計の人数を1人増やして13人にします。右のように並び方を変え、それぞれの方角の5人はそのまま、全部で13人になるようにしました。

しばらくして、また1人の盗人が来て、かくまってほしいと頼みました。そこで、またかくまってやることにしました。それぞれの方角の5人はそのまま、全部で14人にするにはどのように並んだらよいでしょうか。

2	1	2
1	×	1
2	1	2

2	1	2
1	×	2
2	2	1

考えるための時間を取った。

C:「あ、できた。」

T:「それでは、紙にかいてもらおう。」

C:「こうやって数をならべたら、できた。」

T:「確かめるよ。北向きの数の合計はいくつですか。」

C:「5です。」

1	2	2
2		2
2	2	1

C : 「西，東，南のそれぞれの合計も， 5 になっている。」

T : 「全体の数の合計は， 14 になっていますか。」

C : 「えっと。あ， なっているよ。」

T : 「ほんとだ。これは， どういうふうにかえたらできたの？」

C : 「あ， どういうふうにかえたか分かった。」

C : 「うん。分かる分かる。」

T : 「じゃあ， 先にほかの人に聞いてみようか。」

C : 「たぶん， 合計が 12 のときは， どの方角の角にも 2 があって， 合計が 13 のときは， 3 つの角に 2 があるから， 合計が 14 のときは 2 つの角に 2 があるようにしたんだと思う。」

T : 「本人はどうですか。」

C : 「合計が 13 のときと比べて， 1 増やせばいいから， 1 を 1 つ 2 にして考えた。」

2	1	2
1	X	1
2	1	2

合計が 12

2	1	2
1	X	2
2	2	1

合計が 13

1	2	2
2	X	2
2	2	1

合計が 14

〔発問 1〕 ほかのならば方でもできると言っている人がいました。では， グループで相談をして， 探してみてください。見つかったグループは， ますのかいてある画用紙を取りに来て， ここに書き込んでください。角の数は赤， 真ん中の数は青で書いてください。1 回に 1 枚をかいて， グループのみんなで確認をしてから出してくださいね。

しばらく時間を取った。

10 のグループから， 次の 12 枚が出された。

(ア)

1	2	2
2	X	2
2	2	1

(イ)

3	1	1
1	X	3
1	3	1

(ウ)

2	2	1
1	X	3
2	2	1

(エ)

2	2	1
2	X	2
1	2	2

(オ)

1	3	1
3	X	1
1	1	3

(カ)

1	2	2
3	X	1
1	2	2

(キ)

1	3	1
1	X	3
3	1	1

(ク)

1	2	2
3	X	1
1	2	2

(ケ)

1	1	3
3	X	1
1	3	1

(コ)

1	3	1
1	X	3
3	1	1

(カ)

3	1	1
1	X	1
1	1	3

(シ)

1	3	1
3	X	3
1	3	1

〔発問 2〕 これを見て， 気がついたことはありますか。

C : 「(カ) はちがう。」

C : 「あ， 合計が 12 になっている。」

C : 「(シ) もちがうんじゃないの。」

C : 「ほんとだ。合計が 16 だ。」

T : 「(カ) (シ) 以外の 10 個は， 合計が 14 というのはいいですか。合計がちがっていたものも， あとで役に立つかもしれないよ。」

C : 「合計は合っているけど， 同じものがある。」

C : 「(キ) と (コ) は同じ。」

C : 「(カ) と (ク) も同じ。」

C : 「(オ) と (キ) は， 裏返すと同じになる。」

C : 「(ケ)と(コ)は、回すと同じ。」

C : 「(ア)と(エ)も、回すと同じ。」

C : 「(ア)と(エ)は、裏返しても同じ。」

裏返すと同じもの、回すと同じものを整理して、次の3つのグループに分類することになった。

Aグループ

(7)

1	2	2
2	X	2
2	2	1

(8)

2	2	1
2	X	2
1	2	2

Bグループ

(イ)

3	1	1
1	✕	3
1	3	1

(オ)

1	3	1
3	✕	1
1	1	3

(キ)

1	3	1
1	✕	3
3	1	1

(ケ)

1	1	3
3	✕	1
1	3	1

(コ)

1	3	1
1	✕	3
3	1	1

Cグループ

(ウ)	(カ)	(ク)																											
<table border="1"><tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>X</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	2	2	1	1	X	3	2	2	1	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>X</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	1	2	2	3	X	1	1	2	2	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>X</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	1	2	2	3	X	1	1	2	2
2	2	1																											
1	X	3																											
2	2	1																											
1	2	2																											
3	X	1																											
1	2	2																											
1	2	2																											
3	X	1																											
1	2	2																											

〔発問3〕 そうすると、この3つのグループにまとめられそうですね。

A	B	C																											
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>X</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	1	2	2	2	X	2	2	2	1	<table border="1"><tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>X</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	3	1	1	1	X	3	1	3	1	<table border="1"><tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>X</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	2	2	1	1	X	3	2	2	1
1	2	2																											
2	X	2																											
2	2	1																											
3	1	1																											
1	X	3																											
1	3	1																											
2	2	1																											
1	X	3																											
2	2	1																											

それぞれの青い数（明朝体の数）を見て、気がついたことはないですか。

C : 「青い数の合計が、みんな8になっている。」

C : 「あ、ほんとだ。」

〔発問4〕 青い数の合計が8になるって言っていましたね。では、青い数がこういうふうに（右）ならんでいるときは、できるのかな、できないのかな。

	1	
3	X	3
	1	

C : 「できないんじゃない？」

C : 「できないよ。」

C : 「16になっちゃう。」

T : 「では、どうしてできないと言えるのか、ノートに書いてください。」

第2時

昨日の問題について改めて聞くと、全員が上の並び方ではできないと答えた。

理由を聞いた。

C：「たとえば、左上に①を入れると右上は③にしないと北向きが5にならないんだけど、そうすると東向きがもう6になってしまっていて、うまくできない。」

C：「左下に①を入れると、南向きの合計を5にするために右下が③で、そうすると東向きの合計が9になってしまう。」

C：「調べてみたら、一つの方法が5にならないか、合計が14にならないかになってしまう。」

C：「青の合計が8で、北の青と南の青の合計が4で、西の青と東の青の合計が4のときにできるんじゃないの。」

T：「①と①の合計が4になっていて、③と③の合計が4になっていればできるっていうこと？」

C：「そうそう。」

T：「きのうまとめた3つのグループの並び方も、皆そうになっている？」

A	B	C																											
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>X</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	1	2	2	2	X	2	2	2	1	<table border="1"><tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>X</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	3	1	1	1	X	3	1	3	1	<table border="1"><tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>X</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	2	2	1	1	X	3	2	2	1
1	2	2																											
2	X	2																											
2	2	1																											
3	1	1																											
1	X	3																											
1	3	1																											
2	2	1																											
1	X	3																											
2	2	1																											

C：「あ、ほんとだ。なってる。」

T：「でも、どうしてそんなことが言えるんだろうね。」

C：「？」

C：「……。」

C：「たぶん、こういうことだと思うんだけど。8つの数の合計が14でしょ。それで、北向きの数の合計は5、南向きの数の合計も5。だから $14 - 5 - 5 = 4$ 。」

<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>X</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	1	2	2	2	X	2	2	2	1	→合計は5
1	2	2								
2	X	2								
2	2	1								
<table><tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	2	2	1	→合計は5						
2	2	1								

C：「ああ、それで、西向きの青と東向きの青の合計が4なのか。」

T：「それだったら、北向きの青と南向きの青の合計は？」

C：「やっぱり4？」

C：「左のたてと右のたての合計がそれぞれ5だから、北向きの青と南向きの青の合計はやっぱり4になる。」

<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>X</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	1	2	2	2	X	2	2	2	1	↓	合計は5
1	2	2									
2	X	2									
2	2	1									
<table border="1"><tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	2	2	1	↓	合計は5						
2	2	1									

T：「それなら、AとAで4、BとBで4になるように青を並べて、その後で赤を決めればできるんだ。」

①	1	③
3	X	3
	1	

①	1	③
3	X	3
①	1	③

	(A)	
(B)	X	(B)
	(A)	

(3) 単元の考察

辺の3つの数の合計の2倍を総和から引くと☆+★になるということは意外に気がつかない。実は筆者も初めは気がつかなかった。

	☆	
	★	

筆者は、初めは、辺の数の合計の4倍から総和を引いて、角の数の合計を出して、それを整理してならべることでパターンを検討していた。

本時の問題であれば、 $5 \times 4 - 14 = 6$ である。

そして、4つの角の数の合計が6で、それぞれは1以上の整数になるという条件を満たす組み合わせを考えた。それは、次の2つしかない。

(7) 1, 1, 1, 3

(4) 1, 1, 2, 2

(4)は、並べ方は2通りある。1と1が同じ辺にならぶタイプと向かい合う角に並ぶタイプである。

(7) (4) - 1 (4) - 2

1	3	1
3	X	1
1	1	3

1	3	1
2	X	2
2	1	2

1	2	2
2	X	2
2	2	1

当然、同じ答えが出てくるわけだが、こちらの方は数が大きくなると作業が繁雑になる。角の数の合計から、組み合わせを考え、それぞれのならび方に枝分かれさせなければならない。

この作業をいくつか進めていく途中で、向かい合う真ん中の数の合計が、「総和－辺の和×2」になることに気づいた。

〔発問1〕では、角の数を赤、真ん中の数を青にすることで、注目しやすくしたが、やはり簡単には気づけなかった。

そこで、青の数の合計を出してみるように促し、1と1が向かい合い、3と3が向かい合う図を見せて、考えさせたわけである。

〔問題1〕を提示したところで、使われている数が1と2だけの場合、合計が1増えると、8つの数の中の2の個数が4つ、5つ、6つと増えていく。このことに気づいたようだ。

さらに、グループで相談をしていて、4は使えないことに気づいたところがいくつかあった。「4を使ってしまうと、1つの方角の合計が5だから、どこかが0になってしまうので。」と説明ができていた。つまり、この問題では、角のますに入る数は1, 2, 3のどれかということになるわけである。

しかし、本時のねらいにはまだ気づいていないようで、どのグループも試行錯誤をしていた。

3年生にとって、問題自体は決してやさしくはない。しかし、数が入る枠が8か所と少ないため、自分の考えを相手に分かるように説明することには、抵抗なく取り組めたようである。計算が3つの数のたし算で、暗算でもすぐにできる数値だったこともよかった。自分の考えを安心して説明することができたと考えられる。

小グループでの話し合い、全体での話し合いでも、ほかの子の話をよく聞き、自分の考えを修正していく姿が見られた。

トピックなので、2時間扱いとした。しかし、もっと時間をかけて本格的に取り組ませるのであれば、各辺の和が5で総和が15の場合、16の場合……と考えさせることができる。「盗人隠し」のもともとの問題である、各辺の和が7で総和が16から、総和が増えていく問題にもぜひ取り組ませたい。

3年生ではなく、もう少し上の学年であれば、どのような反応があるか、試してみたいところである。

3 鶴亀算

(1) 授業の構想、ねらい

単元を次の3つに分けて構想した。

- a 鶴亀算の解き方
- b 鶴亀算が成立するための条件
- c 鶴と亀以外の問題の解き方，問題作り

a では，鶴亀算の問題を解く。数値はだんだん大きくなるようにし，スモールステップで進めることにした。

b では，鶴亀算の問題の答えがない場合があることを知り，答えがある条件について考えさせる。足の数が2と4以外の組み合わせの問題にも取り組ませる。展開は，次のとおりである。

- (a) 鶴と亀が合わせて5匹で，足の数の合計が22本のときの鶴と亀のそれぞれの数を求める。
- (b) 答えがないことに気づき，答えがあるのは，足の数の合計がいくつのときかを考える。
- (c) 鶴と亀が合わせて5匹のときは，足の数が10から20までの中の偶数であれば答えが出せることが分かる。
- (d) 鶴と蟻が合わせて5匹で，足の数の合計が16本のときの鶴と蟻のそれぞれの数を求める。
- (e) また答えがないことに気づき，足の数の合計がどのような数のときに，答えがあるかを考える。

c では，正解が複数ある問題も対象にする。さらに，問題作りをさせる。

本単元は，単に鶴亀算を解かせるのがねらいではない。鶴亀算，鶴蟻算などのそれぞれのきまり，きまりの違いを発見できるようにしたい。

そのために，答えがない問題を設定した。問題に答えがない場合があることを知り，その謎を解明するために，思考力・表現力を駆使させたいと考えた。

(2) 授業の実際

第1時

T：「今日は，和算シリーズの『鶴亀算』です。」

C：「え，何それ？聞いたことないよ。」

〔問題1〕つるとかめが，合わせて3びきいます。足の数は，合わせて8本です。つるとかめは，それぞれ何びきずついるでしょう。

鶴と亀の絵を用意して掲示し，それぞれの足の数を確認した。鶴は2本，亀は4本である。

T：「こういう問題を鶴亀算と言います。」

C：「あ，分かった。」

C：「できた。」

T：「え，もう答えが分かったの？」

C：「うん。分かった。」

ノートにいきなり答えを書いている子もいるし，鶴と亀の絵をかいている子もいる。

T：「では，鶴が何羽で，亀が何匹ですか。」

C：「鶴が2羽で，亀が1匹です。」

鶴2羽と亀1匹の絵を黒板にはった。

T：「ほんとかな。確認をしよう。鶴2羽の足の数を求める式は？」

C：「 $2 \times 2 = 4$ 。」

T：「亀1匹の足の数を求める式は？」

C：「 $1 \times 4 = 4$ 。」

C：「ちがうよ。 $4 \times 1 = 4$ だよ。」

T：「そうですね。それで，足の数の合計は？」

C : 「 $4 + 4 = 8$ 。」

T : 「あ、ほんとだ。よくできましたね。では、もう少したくさんいる問題を出すよ。」

〔問題2〕つるとかめが、合わせて6ひきいます。足の本数は、合わせて20本です。つるとかめは、それぞれ何びきずついるでしょう。

少し時間を取った。

T : 「答えはどうになりましたか。」

C : 「鶴が2匹、亀が4羽です。」

T : 「足の本数を求める式を言ってみますよ。」

C : 「 $2 \times 2 + 4 \times 4 = 4 + 16 = 20$ です。」

鶴と亀の絵を黒板にはって、確かめをした。

T : 「では、どうやって答えを出しましたか。」

絵をかいていたらできたという子もいた。

C : 「亀が5匹だと足が20本になる。でも、これだと1匹たりないから、亀1匹を鶴2羽に変えてみたら、うまくいった。」

C : 「答えが20より少なくなる4の段のかけ算を探した。そうしたら、 $4 \times 4 = 16$ だったので、あと鶴が2羽で足の本数は $2 \times 2 = 4$ で、 $16 + 4 = 20$ だから、うまくいった。」

T : 「よし。では、もう少し鶴と亀の数を多くしてみよう。」

〔問題3〕つるとかめが、合わせて11ひきいます。足の本数は、合わせて32本です。つるとかめは、それぞれ何びきずついるでしょう。

少し時間を取った。

絵をかいて、見当をつけて答えを出そうとしている子が多い。

T : 「答えは、どうになりましたか。」

C : 「鶴が6羽で、亀が5匹。」

T : 「自分の考えを説明できる人はいますか。」

C : 「 $32 \div 2 = 16$ 。これは鶴が16羽ということ。

$16 - 11 = 5$ 。だから、5羽減らさないといけない。

亀の足は4本で、鶴2羽分。だから、鶴に両替した亀を鶴にもどす。

鶴が4羽分、亀が2匹分。

$16 - 4 = 12$ 。だから、鶴が12羽。」

C : 「え？なんだか分からない。」

C : 「鶴が12羽なの？」

C : 「鶴は6羽だよ。」

T : 「鶴を5羽減らすってところで、鶴を5羽減らして、それを亀にするって言いたいんじゃないの？」

C : 「鶴を5羽減らして、それを亀にすれば答えになるよ。」

C : 「う〜ん。それでいいのかな。」

C : 「足が32本。全部亀なら $32 \div 4 = 8$ で8匹。

亀の足が4本で、鶴の足が2本だから、亀1匹が鶴2羽分。

1匹ずつ両替していくと、

亀8, 鶴0 → 合わせて8匹

亀7, 鶴2 → 合わせて9匹

亀6, 鶴4 → 合わせて10匹

亀5, 鶴6 → 合わせて11匹

亀5匹，鶴6羽で，合計が11匹になる。」

C：「ほかの答えもあるよ。鶴が4羽，亀が7匹。」

T：「足の数は何本かな？」

C：「 $2 \times 4 + 4 \times 7$ だから。」

C：「36だよ。ちがうよ。」

第2時

〔問題4〕つるとかめが，合わせ5ひきいます。足の数は，合わせて22本です。つるとかめは，それぞれ何びきずついるでしょう。

C：「あれ？」

C：「答えがないんじゃない？」

C：「答えがない。」

C：「え，答えあったよ。」

C：「答えはないよ。」

C：「あ，まちがえていた。答えはやっぱりない。」

T：「答えがないなんてことはないでしょ。」

C：「だって，ほんとに答えがない。」

C：「合わせて6ひきだったら，答えがある。」

T：「6ひきじゃなくて，5ひきです。」

C：「かめのしっぽも入れていいんだったら，答えがある。」

T：「亀は，しっぽでは歩かないでしょ。」（笑）

C：「だったら，答えはない。」

C：「5ひき全部が亀だとしても20本だから，足の数はそれより多くならない。」

C：「そうそう。」

T：「そうかなあ。」

〔問題5〕だったら，「足の数は，合わせて□本です。」の□がいくつのときに，答えがあるの？

C：「全部亀だったら20本だから，20。」

C：「全部鶴のときの10本。」

C：「14本。」

C：「18本。」

C：「16本。」

子どもたちから出てきた順に板書をしていった。

C：「数の大きい順にならべて書いた方が見やすい。」（※）

C：「その方がきまりが分かる。」

数の大きい順にならべ直した。

T：「はい，これでいいですか。」

C：「あ，12が抜けている。」

T：「『20，18，16，14，12，10』でいいですか。」

T：「じゃあ，たとえば足の数の合計が14本のときは，鶴が何羽で亀が何匹ですか。」

C：「えっとね。鶴が3羽で，亀が2匹。」

T：「鶴3羽の足の数を求める式は？」

C：「 $2 \times 3 = 6$ 。」

T：「亀2匹の足の数を求める式は？」

C:「 $4 \times 2 = 8$ 。」

T:「ああ、なるほど。これでたと $6 + 8 = 14$ になるわけね。」

T:「それじゃあね、この□に入る数をまとめて言うというふうに言えますか。」

C:「10から20までの偶数。」

T:「え、偶数なんて知ってるの？」

C:「知ってるよ。2年のとき出てきたよな。」

「偶数」という言葉を聞いたことがあるという子に手を挙げてもらったら、6割くらいだった。

T:「全員が聞いたことがあるわけではないから確認するけど、『偶数』って何？」

C:「えっと、2でわりきれ数。」

C:「2, 4, 6, 8, 10, ……っていう数。」

T:「そうなの。みんな、それでいいですか。」

C:「いいです。」

T:「じゃあ、だいぶ分かってきたみたいだから、次の問題へいってみよう。」

T:「亀は、最近忙しくて疲れてしまったのでお休みです。亀の代わりに、蟻が来ました。」

C:「変なの。」

C:「ありつる算か？」

C:「つるあり算じゃない。」

〔問題6〕つるとありが、合わせて5ひきいます。足の数は合わせて16本です。つるとありは、それぞれ何ひきずついるでしょう。

C:「蟻って足が何本？」

C:「6本だよ。」

T:「鶴は足が2本、蟻は足が6本ですよ。」

C:「あれ、変だなあ。」

C:「答えがない。」

C:「また、答えがない。」

計算の速い数人の子が「答えがない」と言っているが、何も答えないでおいた。2, 3分時間を取った。

C:「ねえ、先生。答えがないよ。」

T:「ええ？そう？じゃあ、足の数がいちばん多いときは、何本ですか。」

C:「全部蟻のときで、30本。」

⑧ ⑧ ⑧ ⑧ ⑧ $6 \times 5 = 30$

C:「 $6 \times 5 = 30$ 。」

C:「いちばん少ないのは、さっきと同じで鶴が5羽のときで10本。」

T:「いちばん多いときが30本で、いちばん少ないときが10本なんですよ。その間の数で、偶数だったら答えがあるんだから、16本なら答えがあるはずだよ。」

C:「でも、調べたら、答えがないんだもの。」

鶴亀算のとき、「10から20の偶数のとき、答えがある」と言った子が困った顔をしている。

C:「分かった。足の数の差の数で減っていくんだ。」

T:「『足の数の差』？『差』って何？」

C:「えっとね。ちがいのこと。」

T:「みんな、『差』って『ちがひ』のことなんだって。分かる？」

C:「鶴の足の数と蟻の足の数のちがひが4本っていうこと？」

C:「そうそう。」

T:「その4本が何なの？」

C：「だから、偶数じゃなくて、4 とびで変わっていくから、16本のときは答えがない。」

T：「じゃあ、鶴亀算で答えがあるのは、いくつのときですか。10と30は、もう分かっているね。」

前の席の数人に聞いてみたが、分からないというので、答えは出さず本時はここまでとした。

第3時

T：「つるあり算の続きです。」

〔問題7〕つるとありが、合わせて5 ひきいます。足の本数は合わせて□本です。つるとありが、それぞれ何びきずついるでしょう。

T：「□に入る数がいくつのときに、答えがあるかを考えていました。」

C：「4 とびになる。」

T：「念のために確認するよ。では、足の本数がいちばん多いのは、どういうときですか？」

C：「全部蟻のとき。」

     $6 \times 5 = 30$

T：「足の本数がいちばん少ないのは？」

C：「全部鶴のとき。」

     $2 \times 5 = 10$

C：「たぶんなんだけど、鶴亀算は偶数のときにできて、鶴蟻算は奇数のときにできる。」

C：「奇数にはならないよ。鶴も蟻も足は偶数なんだから。」

C：「鶴亀算は足の本数の合計が偶数でいいけど。」

「奇数」と言った子は、「奇数」の意味をまちがえて解釈していたのかもしれない。

T：「それでは、足の本数が2 番目に少ないのは、足の本数が何本のときですか。」

C：「11本。」

C：「奇数にはならないよ。12本。」

C：「14本じゃないかな。」

T：「意見が分かれたね。だったら、足の本数が2 番目に少ないのは、鶴が何羽で蟻が何匹のときですか。」

C：「？」

C：「鶴を1羽だけ、蟻に替えたときなんじゃないの。」

C：「鶴が4羽で、蟻が1匹。」

     $2 \times 4 + 6 \times 1 = 14$

C：「あ、これで14本か。」

C：「鶴と蟻の足の本数の差が4本だから、4ずつ増えていくんだよ。だから、14の次は18。」

T：「そうかなあ。じゃあ、次に足の本数の合計が次に少ないのは、どういうとき？」

C：「鶴が3羽で、蟻が2匹になったとき。」

     $2 \times 3 + 6 \times 2 = 18$

C：「ほらね。」

C：「ほんとだ。」

1匹ずつ変化させていることが分かるように、たてに並べていねいに図と式をかいていったので、ほとんどの子が「そういうことか」と納得できたようだ。

T：「じゃあ、10, 14, 18ときて、次は？」

C：「次は22で、その次が26, 次が30。」

C：「だから、16本のときは、答えがない。」

T：「ふうん。なるほどね。だけど、鶴亀算は4 とびじゃないんでしょ。」

C：「鶴亀算は、足の本数の差が2なので、2ずつ変わる。」

T：「ほんとかな。これも確かめてみよう。足の本数がいちばん多いのは？」

C：「亀が5ひきで20本。」

④ ④ ④ ④ ④ $4 \times 5 = 20$

T：「いちばん少ないときは？」

C：「鶴が5羽で10本。」

④ ④ ④ ④ ④ $2 \times 5 = 10$

C：「それで、10から始めて、10, 12, 14, 16, 18, 20のときに答えがある。」

T：「だいふ、謎が分かってきましたね。」

T：「では、次の問題。鶴も何度も登場したので、今日はお休みです。」(笑)

C：「今度は、何が出るんだろ？」

〔問題8〕うさぎとかめが、合わせて5ひきいます。足の本数は、合わせて20本です。うさぎとかめは、それぞれ何匹ずついるでしょう。

C：「うさぎとかめって、なんだか聞いたことがある。」

C：「あ、今度は、答えがある。」

C：「答えが2つあるんじゃない。」

C：「答えは3つあるよ。」

私の予想よりはるかに早く、答えが複数あることが見破られてしまった。

C：「答えは4つ。」

C：「え、6つだよ。」

少し時間を取った。

T：「なんか、答えがいくつもあるって言っていた人がいたけど。」

C：「そう。4つあるよ。」

C：「うさぎが4羽で、亀が1匹。」

C：「うさぎが3羽で、亀が2匹でもいい。」

C：「うさぎが2羽で、亀が3匹。」

C：「うさぎが1羽で、亀が4匹。」

C：「どちらかが0でもいいんだったら、うさぎが5羽で亀が0匹、うさぎが0羽で亀が5匹でもいい。」

T：「ずいぶん、簡単にできちゃったなあ。」

〔問題9〕これまでの問題で、足の本数が奇数になったことがありません。足の本数の合計が奇数になる問題を作ってみて。

C：「無理だよ。」

C：「足の本数はみんな偶数だから、できないよ。」

C：「魚にしたら？」

C：「魚は、足がないよ。」

T：「『鯛と鮪が合わせて5匹います。足の本数は合わせて□本です。鯛と鮪はそれぞれ何匹ずついるでしょう。』これでいい？」

C：「□には0しか入らない。」

C：「それじゃあ、だめじゃん。」

C：「ヒトデの足って何本？」

C：「5本のヒトデっているよね。」

C：「あれは、足なのかな。」

T：「え、ヒトデで作るの？」

〔問題10〕 ヒトデとウツボが、合わせて5ひきいます。足の数は、合わせて□本です。ヒトデとウツボは、それぞれ何びきずついるでしょう。

C：「ヒトデはいいけど、なんでウツボなの？」

T：「これでいいの？□にいくつを入れるの？」

C：「10かな。」

C：「10は偶数だからだめ。15ならいい。」

T：「『合わせて15本』ならいいの？」

C：「それなら解ける。」

C：「答えは1とおりにだけになる。」

T：「答えを出してみて。」

C：「ヒトデが3匹で、ウツボが2匹。」

C：「□÷5で、簡単に答えが出ちゃってつまらない。」

(3) 単元の考察

鶴亀算から、鶴蟻算、兎亀算と進み、ヒトデウツボ算まで3時間扱いだった。

鶴亀算は、「もし全部が鶴だとしたら」という考え方から出発し、計算を進めていくのが一般的な解法である。たとえば〔問題1〕であれば、「もし3匹全部が鶴であれば、足は $2 \times 3 = 6$ で6本。しかし実際は8本なので2本たりない。」と考えていく。

合計の数が偶数であれば、「もし鶴と亀が同じ数だとしたら」という考え方も使える。〔問題2〕であれば、「鶴と亀が3匹ずつであれば、足は $3 \times 6 = 18$ で18本（ $(2 + 4) \div 2 = 3$ ）。しかし、実際は20本なので2本たりない。」と考えていく。

いずれにしても、「もし〜だとしたら」という考え方を使っている。

〔問題2〕の時点では、この方法ならまちがいをなく解決できるという確信があって取り組んでいる子はおそらくいなかっただろう。偶然当たったとか、ちょっと変えてみたらうまくいったという状態である。

たとえば、全部亀からスタートするとしたら、亀1匹を鶴1羽に変えると、足の数が2本減るという考え方に気付けば、数値が大きくなっても簡単に解決できる。しかし、これを教えてしまつてはおもしろくない。

〔問題3〕を解決する際、合計の11を固定して、

鶴11, 亀0 → 足の数は合わせて22

鶴10, 亀1 → 足の数は合わせて24

という考えは発表されなかった。両替方式の方が考えやすいのだろうか。

〔問題3〕では、答えが複数あると考える子が何人かいた。別の正解もあるのではないかと考えを進めるのは、たいへん良いことである。この問題の場合は正解は1つしかない。周りの子の説明を聞いて納得することができた。

〔問題4〕と〔問題6〕で、答えがない問題を提示した。答えがない問題に対峙する経験は、子どもたちにとっては初めてだったかもしれない。これにより、子どもたちは答えがない理由を説明しないではいられなくなった。

〔問題4〕は、頭の数に対して足の数が多すぎて答えがない場合である。〔問題6〕は、足の数が、すべて鶴の場合とすべて蟻の場合の間の数値になっているのに正解がない。子どもたちは図をかいたり、一つ一つ計算をしたりしながら変化のしかたが鶴亀算と鶴蟻算ではちがうことを見つけ、差の倍数で変化することに気付くことができた。

〔問題5〕の(※)の発言は、板書をより見やすくするため、順序よく表現してほしいという要求である。表現のしかたによって、構造が見やすくなることに気付いていると言えるだろう。

〔問題10〕は、ヒトデとヤドカリあたりにすればおもしろかったかもしれない。

鶴亀算+αの3時間の授業は、授業者も楽しめた。

V 考 察

1 和算の教材化の可能性

和算の特徴として「生活に密着した具体性」を挙げたが、例えば「盗人隠し」は、子どもたちの生活に密着しているとはいえない。そのため、問題の把握のために多少時間をかけた。また、城の略図と見張りの様子をかいた図を用意した。

数値が大きくなると、答えの見通しが立たず、解決がむずかしい。解決のアイデアがいくつか出てくるまではスモールステップで進めることにした。盗人隠し、鶴亀算は数値は適切であったが、俵杉算はもう少し大きな数値の方が、それぞれの解法のよさが分かりやすかっただろう。

このように、数値や発問の配列に気を配らなければならないが、和算は十分教材と成り得ることが分かった。

今回の授業実践は対象が3年生だった。高学年が対象であれば、別の問題も取り上げられるし、今回の問題をさらに発展させることも可能である。

2 思考力・表現力育成における和算の有効性

「俵杉算」は、絵、図、式などを使って様々な解法が出された。数をどのように組み合わせると計算が楽に正確にできるかを、子どもたちはよく考え、表現していた。さらに、数値が複雑な問題が出されたとき、どの考えがよさそうかという見通しを立てることもできていた。

「盗人隠し」は、3年生にとってはむずかしい問題である。そのため、授業者は他の教材に比べ、絞り込んでいく発問を多く使っている。子どもたちは、条件を確認したり、同じ答えをまとめ、整理したりして問題解決に向けて着々と進むことができていた。小グループ、全体での話し合いにおいて、ほかの子の話をよく聞き、自分の考えを修正していく姿が見られた。

「鶴亀算」では、初めは絵をかいてあてずっぽうで正解を見つける方法を取る子が多かった。しかし、正解のない問題に対し、絵、図、式などを駆使し、規則性から正解がある場合の条件を見つけることができた。[問題5]では、ばらばらに出された正解に対し、「数の大きい順にならべて書いた方がいい。」という発言(※)が出ている。何とかして規則性を見つけようという意欲が表れている。

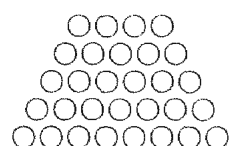
VI 今後の課題

1 今回の実践の修正、追加

(1) 俵杉算

本実践では、時間の関係で1時間扱いとした。さらに時間をとって発展させるのであれば、次のような展開が考えられる。

[例題1] 米俵を、いちばん下が8個、いちばん上が4個になるように積みます。俵の数は全部で何個ですか。



上のように、台形になる。

$8 + 7 + 6 + 5 + 4$ という式から、三角形に積んだ場合と同じように数を組み合わせる考え方が使える。

その他にも様々な解法が考えられる。

同じ並びの米俵をひっくり返してならべる発想が出れば、台形の求積をする際、倍積変形が使えるだろう。

〔例題2〕米俵を、いちばん下が19個、いちばん上が10個になるように積みます。俵の数は全部で何個ですか。

〔例題1〕の解法が使えるが、さらに新しいアイデアも期待できる。

〔例題3〕俵を三角形になるように積み上げたら、その数が120個でした。このとき、いちばん下の俵の数はいくつでしょう。

様々なアイデアが出そうである。ほかの子にそれを伝えるため、絵、図、式などを駆使することになるだろう。

1 から10までの整数の和が55であることを知っていると、そこから続けていくことができる。

$55+11=66$, $66+12=78$, $78+13=91$, $91+14=105$, $105+15=120$ 。

だから、いちばん下の俵の数は15個。

(2) 鶴亀算

鶴亀算の問題作りにおいては、〔問題9〕として「これまでの問題で、足の数が奇数になったことがありません。足の数の合計が奇数になる問題を作ってみて。」と出題している。これはこれで意味がある。

しかし、問題の構造を理解させるには、同じ数値で全くちがって見える問題を作らせる活動が有効だろう。たとえば、〔問題3〕と同じ考え方で解ける問題を作らせる。

〔問題3〕つるとかめが、合わせて11ひきいます。足の数は、合わせて32本です。つるとかめは、それぞれ何ひきずついるでしょう。

例として、次のような問題が考えられる。

おとなと子どもが合わせて11人います。おとなにはおにぎりを4個ずつ、子どもにはおにぎりを2個ずつ配ったら、全部で32個必要でした。おとなと子どもは何人ずついるでしょう。

2 教材化したい和算の問題

今回の授業実践は、対象が3年生であった。高学年であれば、さらに別の問題を取り上げることも可能である。たとえば、次の問題で教材化を試みたい。

(1) からす算

〔問題〕999羽のからすが999の海辺で、どのからすも999声ずつ鳴くと全部で何声か。

「江戸の『算』と『術』」(佐藤, 2008)

〔式〕 $999 \times 999 \times 999 = 997002999$

〔答え〕997, 002, 999声

手間のかかる計算をどのように解決するのが興味深い。

$$\begin{aligned} & 999 \times 999 \\ &= (1000 - 1) \times 999 \\ &= 999000 - 999 \\ &= 999000 - 1000 + 1 \end{aligned}$$

$$=998000+1$$

$$=998001$$

分配法則を使えば楽にできる。

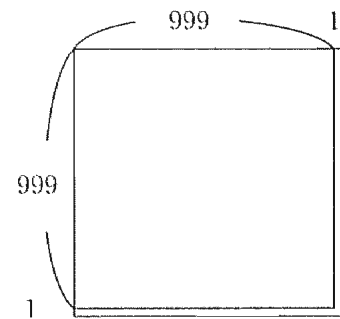
面積図をかくと、次の式変形に気付くかもしれない。

$$999 \times 999$$

$$= (1000 - 1) (1000 - 1)$$

$$= 1000 \times 1000 - 999 - 999 - 1$$

$$= 998001$$



(2) 倍増し問題

〔問題〕曾呂利新左衛門がおもしろい狂歌をつくって太閤殿下にお読みいただいたところ、太閤殿下はとてもお喜びになって、なんでも望みをかなえてやろうとおっしゃいました。曾呂利は「それでは、1文を30日の間、日に1倍増しにいただきとうございます。」とお願いしました。30日目にはいくらもらえるでしょうか。（「日に1倍増し」とは毎日2倍にするという意味）

「日本式数学『和算』でパズルを」（佐藤，2008）

〔式〕 $2^{29} = 536870912$

〔答え〕 536, 870, 912文

逸話が興味深く、計算結果に驚く。

数値を小さくするか、電卓を使用させるかすれば教材化することができる。

途中まで調べて下のような表を作り、この後の変化を予想するのもおもしろい。グラフにすると、変化の予想がしやすくなる。目的に合わせて表、グラフなどを自分で選択することも、表現力の育成につながる。

〇日目（日）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
もらえるお金（文）	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1,024	2,048	...

〔引用・参考文献〕

深川和久（2005）方程式にたよらない 和算的思考力をつける。ベレ出版。

伊藤洋美（2003）おもしろ和算。明治図書。

桐山光弘・歳森宏（2006）再発見 江戸の数学。日刊工業新聞社。

文部科学省（2008）小学校学習指導要領。東洋館出版社。

文部科学省（2008）小学校学習指導要領解説算数編。東洋館出版社。

桜井進（2006）雪月花の数学。祥伝社。

佐藤健一（2005）大人のドリル「和算」で能力アップ。実業之日本社。

佐藤健一（2005）和算で遊ぼう！。かんき出版。

佐藤健一・安富有恒・足田伸汎・松本登志雄（2005）和算用語集。研成社。

佐藤健一・和算研究所（2006）和算。文溪堂。

佐藤健一（2008）江戸の「算」と「術」。研成社。

佐藤健一（2008）日本式数学「和算」でパズルを。東京書籍。

高橋誠・金谷俊秀（2006）やわらか頭「江戸脳」をつくる和算ドリル。講談社。