離散的無限大と連続的無限大

Digital Infinitive and Analog Infinitive

三浦明香子

MIURA Sayaka

（お茶の水女子大学）

1．はじめに

日常生活においてひとつの概念に属する対象（ひとつの名詞で表はされる）の数または量を「数へる」または「量る」とき，我々はこれを「單位」を用ゐて数へたり量つたりする．例へば，「3個の蜜柑」や「3杯の紅茶」などである．ここでは，「個」や「杯」が單位である．

「3個の蜜柑」をひとつの集合と見做すと，この集合の要素（元）は個々の蜜柑，すなはち單位そのものであり，その要素数は3である．

これに対し「3杯の紅茶」の場合はその單位である1杯の中に液体である紅茶は分割不可能に連続にあるので（実際には分子の段階では分割可能であるが，いまは分子を考へない），これを集合の要素とする譯にはいかない．すなはちその要素数は無限大となつてしまふ．

ところが，恒河の砂全部をひとつの集合としたり，宇宙にあるすべての星をひとつの集合とすると，これは各砂または各星が單位であり，かつ，集合の要素となりうるので，確かに数へらるであらうが，おそらくはその要素（砂や星）は無限にあるであらう．事実，英語においては砂などは不可算名詞とされる．

すると，紅茶の無限と砂の無限は同じと考へてよいのか，それとも異なる無限と考へるべきなのかといふ疑問が生じよう．砂の数が無限であつても，砂1粒1粒は明確な最小單位である．紅茶の場合は1滴1滴は明らかに最小單位ではない．やはり異なる概念のはずである．以下，これを考へてみよう．

2．有限集合の要素数

（ア）要素数の数え方

集合Bの**要素数** cardinality を，$|B|$で表はす．要素数が互ひに等しい集合を，同型といふ．すなはち，$|B|=|C|$のとき，集合BとCは同型であるといふ．

2つの集合が同型か否かは，2つの集合の要素を1対1に対応させることが出来るか否かで判定することができる．要素数が有限な集合の場合は，その要素を1つづつ取り出してこれを自然数の集合の要素の値が小さい方から（1から順に）順に1対1の対応をつけ，その最後の要素に対応する自然数nを以てその要素数とすることが出来る．すなはち，

$$n=|B|$$

である．この様にすることを，集合の要素を数へ上げるといふ．集合の要素を数へ上げられれば，その集合の要素数は求まる．

（イ）和集合，積集合，直積集合

集合BとCの**和集合** union を$B+C$，**積集合** intersection をBC，**直積集合** product を$B\otimes C$で表はす．すると，これらの演算結果の集合の要素数は，

$$|B+C|=|B|+|C|-|BC| \quad (1)$$

$$|BC|=|B|+|C|-|B+C| \quad (2)$$

$$|B\otimes C|=|B|\times|C| \quad (3)$$

となる．式(1)と(2)は單に互ひに移項しただけである．

もし，集合BとCが**互ひに素** disjoint であるならば，すなはち，$|BC|=0$であれば，式(1)と(2)は

$$|B+C|=|B|+|C| \quad (4)$$

と簡單になる．

（ウ）冪集合

集合Bのすべての部分集合（空集合0も，集合B自身もこの部分集合のひとつに数へる）を要素とする集合を，集合Bの**冪集合** power set といふ．集合Bの要素数をnとしたとき，冪集合の要素数を求めてみよう．要素数kの部分集合の数は$\binom{n}{k}$なので，冪集合の要素数は，

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

である．したがつて，Bの冪集合を2^Bと書く．よつて，

$$|2^B|=2^{|B|} \quad (5)$$

であることがわかる．

3．離散無限集合

（ア）自然数N

自然数全体の集合をNで表はす．集合Nの要素数は無限にあるので，先ほどの数へ上げの方法はそのままでは使へない．1個，2個と数へていつても切りがないからである．しかし目の前にある要素を取り敢へず数へ続けることはできる．よつてこの集合Nの要素数をDとしよう．すなはち

$$D\equiv|N| \quad (6)$$

である．Dは明らかに無限大∞である．しかしすべての無限大∞がDとは限らない．したがつて以下にどの無限大がDに等しいかを見てみよう．

まず，$|B|=n$である有限集合Bと，$|C|=D$である無限集合Cとを考へる．ここで有限集合Bと無限集合Cとは互ひに素であるとする．すると(4)式より

$$|B+C|=|B|+|C|=n+D$$

となるはずであるが，この左辺の集合$B+C$を数へ上げる際に，Cから数へ始めると，いつまで経つてもBを数へ始めることができない．目前の有限の要素すら数へ上げられなければ，その集合の要素数は数へることとは出来ない．しかし，Fig. 1a に示す様に，有限集合Bから先に数へ始めれば，この全体は自然数集合Nと1対1の対応がつくので，$|B+C|$の要素数はDそのものである．したがつて

$$n+D=D \quad (7)$$

が成り立つ．

（イ）整数Z

次に，$|B|=|C|=D$であるふたつの無限集合BとCを考へる（BとCは互ひに素であるとする）．すると(4)式より

$$|B+C|=|B|+|C|=D+D$$

となるはずであるが，この左辺の数へ上げを工夫して Fig. 1b の順序で行なへば，これも自然数集合Nと1対

1の対応がつく．すなはち，$|B+C|=D$である（もしこの様な順序で數へずに，ひとつのBまたはCにこだはつてゐれば，いつまでももうひとつの集合の數へ上げを始めることが出来なくなる）．したがつて，

$$D+D=2D=D$$

であり，この操作を続ければ，

$$nD=D \tag{8}$$

であることがわかる．

ここで，**整数**全体の集合をZとすれば，これは負の整数の集合Bと，0を唯一の要素とする集合Cと，自然数全体の集合Nとの互ひに素な和なので，

$$|Z|=|B+C+N|=|B|+|C|+|N|$$
$$=D+1+D=D+D=D$$

すなはち，整数集合Zと自然数集合の要素数等しいことがわかる．

（ウ）有理数Q

有理数とは2つの整数mとnの比$q=m/n$で表はされる數のことである．有理数全体の集合をQとする．この要素数$|Q|$を求めてみよう．

有理数を表はす分数の分子の整数iの全体の集合をZ_1，分子の整数jの全体の集合をZ_2としよう．するとすべての有理数は整数の組(i, j)で表はすことができるので，有理数集合Qは$Z_1 \otimes Z_2$で表はすことができる．したがつて，(3)式より

$$|Q|=|Z_1 \otimes Z_2|=|Z_1|\times|Z_2|=D\times D$$

となるはずである．ところがこれも，Fig. 1cの順序で數へれば，數へ上げ可能であり，これもDとなる．この図において，ひとつの行やひとつの列にこだはつてはいけない．次が數へられなくなる．

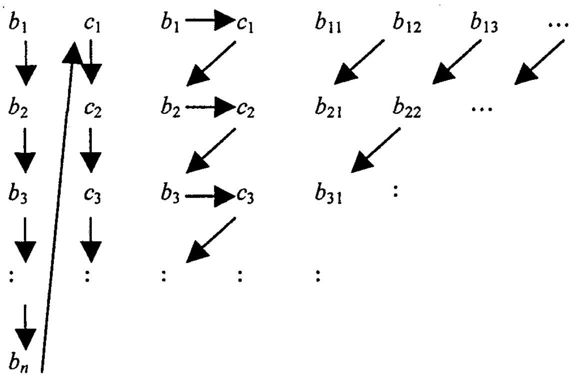
以上より，

$$D\times D=D^2=D$$

であり，この操作を続ければ，

$$D^n=D \tag{9}$$

であることがわかる．



$n+D$　　$D+D$　　$D\times D$
(a)　　(b)　　(c)

fig. 1 Unit and product

4．連続無限集合

（1）無理数

有理数$q=m/n$を10進数の小數で表はすと，分母數nの素因数が2と5だけの場合は**有限小數**に，それ以外の場合は**無限循環小數**になる（2進數で表はす場合は，分母が$n=2^k$（kは自然数）のときのみ有限小數となり，他はすべて無限循環小数となる）．

すると，無限小数でありながら，循環小數でない數，すなはち**無限非循環小数**は，有理數ではなく，これを名付ければ**無理數**とでもいふしかなくなる．無理數と有理數とを合はせて**実數**といふ．したがつて実數とは，小數（有限小數，無限循環小數，無限非循環小数すべてを含む）で表はされるすべての數といふことになる．

（2）実数R

すべての実數を2進法で表はすと，その無限の桁は数字1か0かであるので，各桁の場合數は2，無限の桁數はDなので，結局2^D個の実數があることになる．すなはち実數全体の集合Rの要素数は，

$$|R|=2^D \tag{10}$$

である．

この式(10)の形は，要素数Dの集合の冪集合の要素数2^Dとなつてゐるので，結局，実數全体の集合Rは，整数全体の集合Zの冪集合と同型といふことになる．

さて，ここで，2^Dが果たしてDに等しいかどうかを考へねばならない．実はこれはDには等しくなく，それよりも濃度の濃い無限大AであることがCantorの対角線論法により示される（附録1）．すなはち，ディジタルDは濃い様に見えて実はすかすかの**離散**であり，その間をべつたりと**連続**に埋めることによりアナログのAになるのである．そしてその両者の間の関係は

$$A=2^D \tag{10}$$

であることがわかる．

（3）[0,1) I

0から1未満の実數すべての集合[0,1)の要素数は，先の実數での論法と同じく，ただし，小数点以下の桁だけを考へればよいので，2の自然數全体の數乗だけあるので，これも2^D個であり，したがつてアナログAの數だけあることが分かる．すなはちこの集合Iと実數全体の集合Rとは同型である．

（4）D^Dはどうなるか？

式(9)より，$D^n=D$だつたので，この式のnにDを代入した式も成り立つかどうかを見てみよう．まあ，一見して式(10)より$D^D=D$が成り立つはずはないのだが，これは以下の様にすれば分かる：

$$A=2^D\le D^D\le(2^D)^D=2^{DD}=2^D=A$$

となので，第3項のD^Dは，$A\le D^D\le A$となり，やはり2^Dと同じくAに等しい．すなはち，

$$D^D=2^D=A$$

である．

5．おはりに

無限大にはディジタルの無限大Dと，アナログの無限大Aとがあり，互ひに異なることがわかつた．勿論，$D<A\,(=2^D)$である．

それでは，これと同じ形式で考へて，$A<2^A$なるさらなる濃度の濃い無限大があるのではなからうかといふ疑問が生ずる．想像がつかないのだが，やはりあるのである．勿論そのまた上も，それこそ無限にある．そこで，ああ，切りがないのだなあ，と思ふのである．