ラプラス演算子とその表現
Laplacian and its Expressions

會川義寛，池田寛子，兒玉步，前田育子，大久保淳子，岡田祐美，三浦明香子，小沼良雄，山下順三
Yoshihiro AIKAWA, Hiroko IKEDA, Ayumi KODAMA, Ikuko MAEDA, Junko OKUBO, Yumi OKADA, Sayaka MIURA, Yoshio ONUMA, Junzo YAMASHITA
（お茶の水女子大学，福島県立医科大学，小沼技研，東京医科大学）

1．はじめに

ラプラス演算子は，一般には「$(\partial/\partial r)^2$」や「∇^2」や「Δ」と表記される．これは理工学のあらゆる分野に出て来る重要な演算子であり，具体的には各座標系によりそれぞれ異なる形に表現される．

ところが，その表現がデカルト座標系ならば何の問題もないのだが，円筒座標系や球座標系での表現となると，まづ見た目にも大変複雑であり，さらに，大抵の教科書は，その表現をなぜかいつも所与のものとして扱つてをり，しかも，それを必須の前提・基礎として説明を始めてゐるので，大抵の人はそこで嫌になつてしまふ．

そこで，寺寛の數學概論[1]の微分幾何・曲線座標のところを見始めると，その説明を見てゐるうちにすつかり気分が滅入つて来る．親しみが湧かないのである．他書も種本が同じなのか説明方法は大同小異であり，特に工夫がある様にも思へない．

ところが授業においては，量子力學や量子化學における波動方程式の前提としてラプラス演算子の球座標系表現を先に教へておく必要があるし，移動現象論や傳熱工学の必須の前提としての拡散方程式や傳熱方程式においてはラプラス演算子の円筒座標系表現をまづ教へておかなければ Bessel 函數すら持ち出せない．すなはち，目前に學生を抱える現実の教師としては，ラプラス演算子の３座標系（デカルト座標系，円筒座標系，球座標系）における表現を，學生に納得できる様に教へる必要がある．

そこで，本稿ではこれを紹介する．

2．三つの座標系

まづは，３つの座標系の特徴を述べよう．

（1）デカルト座標系

デカルト座標系は，原点に自分がゐるとして，その「**前後**」，「**左右**」，「**上下**」の方向をそれぞれこの順に，x, y, z で表はすものである．いづれも正方向は，「前」，「左」，「上」である．

原点からの各方向への距離を x, y, z で表はすが，その方向でかつ x, y, z の値が増える方向に單位ベクトル e_x, e_y, e_z を取り，これをデカルト座標系の**基底ベクトル**とする．この３つの基底ベクトルは，e_x, e_y, e_z の順に右手系の正規直交系を作る（$|e_x\, e_y\, e_z|=1$）．

位置ベクトル r は，３つの基底ベクトルの線形結合として，

$$r = e_x x + e_y y + e_z z \tag{1}$$

と表はされる．

この座標系においては「前後」，「左右」，「上下」の扱ひは平等であり，**等方性**の座標系となつてゐる．

（2）円筒座標系

円筒座標系は，上記デカルト座標系の「前後」，「左右」，「上下」の３つを，「**水平面**（xy 平面）」と「**上下軸**（z 軸）」の２対１に分離する．すなはち，「上下」は**主軸**としてそのまま残すが，「前後左右」は融合して主軸に垂直な「水平面」とする．

水平面内に関する２つの自由度は，「主軸からの距離ρ」と，その水平面内の方位，すなはち「方位角φ」とで指定する．

水平面内では z 軸の周りをρ 軸が，x 軸からの方位角φ を以て廻轉する．基底ベクトルは，z 軸からの距離ρ が増える方向に e_ρを，方位角φが増える方向に e_φを取るので，e_ρ と e_φは，e_x と e_yを水平面内において主軸（z 軸）の周りにそれぞれφだけ廻轉したものになつてゐる．すなはち，

$$\begin{pmatrix} e_\rho \\ e_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} \tag{2}$$

である．したがつて，e_ρ, e_φ, e_z は，デカルト座標系と同じくこの順に，右手系の正規直交系を作る（$|e_\rho\, e_\varphi\, e_z|=1$）．

ρ 軸と φ 軸は，x 軸と y 軸を，z 軸の周りにφ だけ廻轉したものであるから，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

が成り立つ．この水平位置に，水平面からの「高さ z」を併せた (ρ, φ, z) にて，空間内位置 r を表はす．

位置ベクトル r は，

$$r = e_\rho \rho + e_z z \tag{4}$$

と，２つの基底ベクトルの線形結合で表はされる．先の(1)式と較べて，用ゐる基底ベクトルの数が１つ減つてゐる．e_ρ の中にφ の情報も入つてゐるからである．

高さ z を問題にしない場合は平面極座標系ともいふが，これは円筒座標系の特別な場合である．

結局，円筒座標系は，主軸（z 軸）を基本として，主軸からの距離ρ と主軸の周りの方位角φ とで表はす**軸対称性**の座標系である（正しくは，軸対称性問題の記述に好都合な座標系）．

（3）球座標系

最後の**球座標系**は，原点を対称中心とする**点対称性**の座標系である．

まづ，原点からの距離 r を取る．あとはこの r 方向を表はす角度を２つ必要とする．そのためにそれぞれの角度が廻る廻轉軸と廻轉面（廻轉軸に垂直）を２組指定しなければならない．

一般に，点対称の系において（原点を通る）主軸が与へられると（点対称の場合は，同格の主軸が複数あるのが普通であるが，ここでは１本の場合を想定），これに対応または附随する面（原点を通る）として，最初に，主軸に垂直な**主面**σ_h を考へる．それから，その主面内に（原点を通る）**副軸**を取る（これも一般には複数本存在する）．さうして，この副軸に垂直な**副面**σ_v を考へる．副面は主軸をその面内に含み，主面と副面は直交する．

球座標系では，主軸に z 軸を，主面に**赤道面**（xy 平面）を取る（ここまでは円筒座標系と同じ）．さらに副軸としてφ 軸を取り，これに対応する副面として**子午面**（$z\rho$平面）を取る．赤道面と子午面との交線はρ 軸である．

赤道面（xy 平面）内において，ρ 軸が，（x 軸から）方位角φ で（z 軸の周りを）右廻りに廻る．

子午面（$z\rho$平面）内において，r 軸が，（z 軸から）天頂角θ で（φ 軸の周りを）右廻りに廻る．

基底ベクトルの e_r と e_θはそれぞれ子午面（$z\rho$平面）内において，e_z と e_ρを φ 軸の周りに天頂角θだけ右廻りに廻轉したものになつてをり，e_r，e_θ，e_φはこの順に右手系の正規直交系を作つてゐる（$|e_r\, e_\theta\, e_\varphi| = 1$）．すなはち，$e_r$の方向を規定する２つの角度は，

赤道面では，x, y の対が，φだけ廻つて，ρ, φに

子午面では，z, ρ の対が，θだけ廻つて，r, θに

なる様にと，ρの廻轉（角度φ）と r の廻轉（角度θ）として指定されてゐる．

したがつて，(2), (3)式と同様に，

$$\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_z \\ e_\rho \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} z \\ \rho \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2}$$

が成り立つ．

(2)式と(5)式を併せると，

$$\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_z \\ e_x \\ e_y \end{pmatrix} \tag{8}$$

となり，(3)式と(6)式をまとめると，

$$\begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{9}$$

となる．

位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は，

$$\boldsymbol{r} = e_r r \tag{10}$$

と１つの基底ベクトルのみで表はされる．基底ベクトル e_rの中に，方位角φの情報も，天頂角θの情報も含まれてゐるからである．

（４）Euler 角

デカルト座標系の z 軸の周りに方位角φだけ右廻りに廻轉して円筒座標系とした．そのとき x 軸がρ軸に，y 軸がφ軸へと廻轉した．

次に，円筒座標系のφ軸の周りに天頂角θ だけ右廻りに廻轉して球座標系を作つた．今度は，x 軸が r 軸に，ρ 軸がθ軸へと廻轉した．

そこで再び，r 軸の周りに第３の角ψだけ右廻りに廻轉することを考へる．これを図示すれば，以下の様になる．

$$\begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\ \varphi\ } \begin{pmatrix} z \\ \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \xrightarrow{\ \theta\ } \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \xrightarrow{\ \psi\ } \begin{pmatrix} Z \\ X \\ Y \end{pmatrix}$$

この３回の廻轉の積によつて，原点の周りの自由な廻轉を記述できる．この３つの角 (φ,θ,ψ) を，**Euler 角**といふ．

３．変位ベクトル

前節の３座標系における位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の式(1)，(4)，(9)をまとめて列挙すると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= e_x x + e_y y + e_z z \\ \boldsymbol{r} &= e_\rho \rho + e_z z \\ \boldsymbol{r} &= e_r r \end{aligned} \tag{11}$$

となる．

そこで，この位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を微分して，変位ベクトル d$\boldsymbol{r}$ を求めよう．

ここで，(11)式右辺を微分するに当つて注意しなければならないことは，各座標系の基底ベクトルの微分が必ずしも０にはならないことである．これはデカルト座標系においては基底ベクトルが座標系に固定されてゐるので問題にならないが，円筒座標系の基底ベクトル e_ρと e_φは方位角φとともに動き，球座標系の基底ベクトル e_r と e_θはさらに天頂角θ によつても動く．すなはち，デカルト座標系に用ゐる基底ベクトル以外の基底ベクトルは，角度φ，θとともに変化する（基底ベクトルの方向を変へない z，ρ，r は，いづれの基底ベクトルをも変化させない）．したがつて，これらの角度変化による基底ベクトルの変化（微分）を，あらかじめ求めておかう．

正規直交系の任意の２つの基底ベクトルの内積は Kronecker のδなので，その微分は０である．すなはち，

$$\mathrm{d}e_i \cdot e_j + e_i \cdot \mathrm{d}e_j = \mathrm{d}(e_i \cdot e_j) = \mathrm{d}\delta_{ij} = 0$$

従つて，基底ベクトルの微分の基底ベクトルによる表現は，交替行列を用ゐて，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}\theta \\ -\mathrm{d}\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \end{pmatrix} \\ \mathrm{d}\begin{pmatrix} e_\rho \\ e_\varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}\varphi \\ -\mathrm{d}\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_\rho \\ e_\varphi \end{pmatrix} \\ \mathrm{d}\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}\theta & \mathrm{d}\varphi\sin\theta \\ -\mathrm{d}\theta & 0 & \mathrm{d}\varphi\cos\theta \\ -\mathrm{d}\varphi\sin\theta & -\mathrm{d}\varphi\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{12}$$

と表はされる．

この(12)式を用ゐて(11)式を微分すると，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= e_x\,\mathrm{d}x + e_y\,\mathrm{d}y + e_z\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= e_\rho\,\mathrm{d}\rho + e_\varphi\,\rho\,\mathrm{d}\varphi + e_z\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= e_r\,\mathrm{d}r + e_\theta\,r\,\mathrm{d}\theta + e_\varphi\,\rho\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned} \tag{13}$$

が得られる．

すなはち，各座標系における３つの直交方向の長さ要素は，羅列して書けば，「dx」，「dy」，「dz」，「dρ」，「dr」などのそれぞれ e_x，e_y，e_z，e_ρ，e_rの方向を向いた直接的な長さ要素のほかに，e_φ と e_θ の方向を向いてゐる「$\rho\,\mathrm{d}\varphi$」と「$r\,\mathrm{d}\theta$」の角度変化に基づく間接的な長さ要素があることがわかる．

(13)式より直ちに，偏微分式，

$$\begin{aligned} \partial\boldsymbol{r}/\partial z &= e_z \\ \partial\boldsymbol{r}/\partial\rho &= e_\rho \\ \partial\boldsymbol{r}/\partial r &= e_r \\ \partial\boldsymbol{r}/\rho\,\partial\varphi &= e_\varphi \\ \partial\boldsymbol{r}/r\,\partial\theta &= e_\theta \end{aligned} \tag{14}$$

が得られる．

また，各座標系における互ひに直交する微小長さ要素がわかつたので，それらを１辺とする微小体積要素（素体積）dVは，３辺の長さを掛け合はせて，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}V &= \mathrm{d}\rho\,\rho\,\mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}V &= \mathrm{d}r\,r\,\mathrm{d}\theta\ \rho\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned} \tag{15}$$

となる．

平面極座標系では dV = dS dz なので，微小面積要素（素面積）dS は，

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}\rho\,\rho\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}(\rho^2/2)\,\mathrm{d}\varphi$$

または，円対称性ならばφを積分して，

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}\rho\,\rho\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho = \mathrm{d}(\pi\rho^2)$$

が得られる．これは，半径ρ，幅 dρの円環の面積である．

4．空間微分ベクトル nabra

次に，空間で微分することを考へる．これは nabra 演算子（「$\partial/\partial\boldsymbol{r}$」または「$\nabla$」と表はす）といひ，互ひに直交する３つの方向に関する傾きをその方向成分とするベクトルを導出する演算子である．いま，この互ひに直交する３つの方向を x，y，z とすれば，nabra 演算子は，

$$\partial/\partial\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x\,\partial/\partial x + \boldsymbol{e}_y\,\partial/\partial y + \boldsymbol{e}_z\,\partial/\partial z$$

と表はされるが，この３つのベクトルは互ひに直交してゐさへすればどの方向でもよく，また，偏微分の分母の長さもそのベクトルの方向の長さであればいいので，結局，(13)式の長さ要素をすべて分母に持つて来た微分形に変へればそのままよいことがわかる．すなはち，(13)式をそのまま変更して，

$$\begin{aligned}\partial/\partial\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{e}_x\,\partial/\partial x + \boldsymbol{e}_y\,\partial/\partial y + \boldsymbol{e}_z\,\partial/\partial z\\ \partial/\partial\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{e}_\rho\,\partial/\partial\rho + \boldsymbol{e}_\varphi\,\partial/(\rho\,\partial\varphi) + \boldsymbol{e}_z\,\partial/\partial z \qquad (16)\\ \partial/\partial\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{e}_r\,\partial/\partial r + \boldsymbol{e}_\theta\,\partial/(r\,\mathrm{d}\theta) + \boldsymbol{e}_\varphi\,\partial/(\rho\,\partial\varphi)\end{aligned}$$

が得られる．各項はそれぞれ，互ひに直交する方向の長さ要素による微分（すなはち，傾き）となつてゐる．長さ要素「$r\,\mathrm{d}\theta$」や「$\rho\,\partial\varphi$」による割算が出て来てゐることに注意しよう．

(14)式と同様に，(16)式から直ちに，

$$\begin{aligned}\partial z/\partial\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{e}_z\\ \partial\rho/\partial\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{e}_\rho\\ \partial r/\partial\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{e}_r \qquad (17)\\ \rho\,\partial\varphi/\partial\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{e}_\varphi\\ r\,\partial\theta/\partial\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{e}_\theta\end{aligned}$$

が得られる．

(14)，(17)式を見較べてまとめれば，結局

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_z &= \partial\boldsymbol{r}/\partial z = \partial z/\partial\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{e}_\rho &= \partial\boldsymbol{r}/\partial\rho = \partial\rho/\partial\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{e}_r &= \partial\boldsymbol{r}/\partial r = \partial r/\partial\boldsymbol{r} \qquad (18)\\ \boldsymbol{e}_\varphi &= \partial\boldsymbol{r}/\rho\,\partial\varphi = \rho\,\partial\varphi/\partial\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{e}_\theta &= \partial\boldsymbol{r}/\,r\,\partial\theta = r\,\partial\theta/\partial\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

となる．すなはち，(18)式は，右辺の分母と分子が入れ替つても，いづれも当該方向の同じ単位ベクトルとなることを示してゐる．このことが，所謂 nabra ∇ を，$\partial/\partial\boldsymbol{r}$ と表はすこと [2)] の便利さの所以となつてゐる．

5．ベクトルの発散 div

以上，nabra ∇，すなはち，$\partial/\partial\boldsymbol{r}$ の各座標系における表現が求まつたので，これを用ゐて，任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ の発散 div $\boldsymbol{a} = \nabla\cdot\boldsymbol{a} = (\partial/\partial\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{a}$ の各座標系における表現を求めておかう．なぜこれを求めるかと言へば，この div $\boldsymbol{a}$ の表現を求めておけば，この $\boldsymbol{a}$ を，$\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\,f = \nabla f = (\partial/\partial\boldsymbol{r})\cdot f$ と置くことによつて，直ちに，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = \mathrm{div\,grad}\,f = \nabla^2 f = (\partial/\partial\boldsymbol{r})^2\cdot f$$

として，目的のラプラス演算子の表現が求まるからである．

勿論ここで，ベクトル $\boldsymbol{a}$ は，各座標系において，その基底ベクトルの線形結合として，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{e}_x a_x + \boldsymbol{e}_y a_y + \boldsymbol{e}_z a_z\\ \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{e}_\rho a_\rho + \boldsymbol{e}_\varphi a_\varphi + \boldsymbol{e}_z a_z \qquad (19)\\ \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{e}_r a_r + \boldsymbol{e}_\theta a_\theta + \boldsymbol{e}_\varphi a_\varphi\end{aligned}$$

と表現されてゐることが前提である．各係数 a_i が，

$$a_i = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{a}$$

であることは既知である（これは(11)式においても同様である）．

すると，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = \nabla\cdot\boldsymbol{a} = (\partial/\partial\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{a}$$

の，演算子 $\partial/\partial\boldsymbol{r}$ に(16)式を，ベクトル $\boldsymbol{a}$ に(19)式を代入して，微分計算を実行し，さらにその過程で，各基底ベクトルの微分の計算に(12)式を用ゐれば，かなり面倒な計算の末に，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial x}a_x + \frac{\partial}{\partial y}a_y + \frac{\partial}{\partial z}a_z$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = (\rho^{-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho)\,a_\rho + \frac{\partial}{\rho\,\partial\varphi}a_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}a_z \qquad (20)$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = (r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}r^2)\,a_r + (\rho^{-1}\frac{\partial}{r\,\partial\theta}\rho)\,a_\theta + \frac{\partial}{\rho\,\partial\varphi}a_\varphi$$

が得られる．

ここで，a_ρ に対する微分や，a_r に対する微分が，単純な $\partial/\partial\rho$ や $\partial/\partial r$ そのものではなくて，その前後に ρ^{-1} と ρ や，r^{-2} と r^2 がついてゐることに注意せねばならない．これらは前後に互ひの逆数を掛けてゐるので，これらを掛けることによつて次元が変化することはない．また，ρ が１乗で，r が２乗であるのは，それらの依存する角度がそれぞれ１個（φ のみ）であるか，２個（φ と θ）であるかに対応してゐる．「$r\,\mathrm{d}\theta$」による偏微分にも前後に ρ^{-1} と ρ がついてゐることにも注意しよう．

ここで，微分演算子の変形を求めておかう．

一般に，微分演算子を $\hat{p} \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ と表はすと，Poisson 括弧式を用ゐて，あたかも本当に微分したかの様に表はすことができるので，

$$[\,\hat{p}\,, x^{-n}] = -nx^{-n-1}$$

となるが，これの右側から x^n を掛ければ直ちに，

$$x^{-n}\,\hat{p}\,x^n = \hat{p} + nx^{-1} \qquad (21)$$

が得られる．

したがつて，(20)式の角度項を略して，動径項だけを書き替へて表はせば，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = (\rho^{-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho)\,a_\rho = (\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho})\,a_\rho$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = (r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}r^2)\,a_r = (\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r})\,a_r \qquad (22)$$

とも書かれることがわかる．

6．ラプラス演算子 ∇^2

前節で述べた様に，div $\boldsymbol{a}$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ を，

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\,f = \nabla f = (\partial/\partial\boldsymbol{r})\cdot f$$

と置けば，

$$\nabla^2 f = \mathrm{div\,grad}\,f$$

としてラプラス演算子 ∇^2 の各座標系における表現が求められる．ここで，(20)式を利用するには，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の各座標系における成分 a_i を求めておかなければならない．これは(16)式より，

$$a_x = \frac{\partial}{\partial x}f,\qquad a_y = \frac{\partial}{\partial y}f,\qquad a_z = \frac{\partial}{\partial z}f$$

$$a_\rho = \frac{\partial}{\partial\rho}f,\qquad a_\varphi = \frac{\partial}{\rho\,\partial\varphi}f,\qquad a_z = \frac{\partial}{\partial z}f$$

$$a_r = \frac{\partial}{\partial r}f,\qquad a_\theta = \frac{\partial}{r\,\partial\theta}f,\qquad a_\varphi = \frac{\partial}{\rho\,\partial\varphi}f$$

であるから，これと (20)式を併せると，

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2$$

$$\nabla^2 = \rho^{-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \left(\frac{\partial}{\rho\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \tag{23}$$

$$\nabla^2 = r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \rho^{-1}\frac{\partial}{r\partial\theta}\rho\frac{\partial}{r\partial\theta} + \left(\frac{\partial}{\rho\partial\varphi}\right)^2$$

を得る．また，(22)式を用ゐ，かつ，$\rho = \sin\theta$ に注意すれば，

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \left(\frac{\partial}{\rho\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2$$

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(\frac{\partial}{\rho\partial\varphi}\right)^2 \tag{24}$$

と書き替へることも出来る．

7．三角函数と円筒函数

ラプラス演算子(23)，(24)式の動徑部分のみを抜き出して書けば(すなはち，対象に角度依存性がないとすれば)，各座標系に対してそれぞれ

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2$$

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} \tag{24}$$

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

が示される．

いま，ラプラス演算子の固有値を$-k^2$として固有方程式を書けば

$$(\nabla^2 + k^2)\,\psi(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{25}$$

となる（Helmholtz の微分方程式）．これを(24)式の各座標系に関してその長さをそれぞれ，

$x = kz$,　　$x = k\rho$,　　$x = kr$

と無次元化すれば，(25)式は，

$$[(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^2 + 1]\,f(x) = 0$$
$$[(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^2 + (1/x)\,(\mathrm{d}/\mathrm{d}x) + 1]\,f(x) = 0 \tag{26}$$
$$[(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^2 + (2/x)\,(\mathrm{d}/\mathrm{d}x) + 1]\,f(x) = 0$$

なる微分方程式になる．勿論ここで，

$\psi(\boldsymbol{r}) = f(x)$　or　$f(kz)$　or　$f(k\rho)$　or　$f(kr)$

である．

(26)式の最初の式の実数解は周知の三角函数である．第2，第3の式は，第2項の存在が第1式と異なるだけであるが，この項はxが大きくなると消え去るので，その解は三角函数と似たものとならう．事實，(26)式の第1および第2の式の級數解$f(x)$を併記すれば

$$f(x) = \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

$$f(x) = J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} \tag{27}$$

であり，Stirling の近似を取り入れれば互ひに極めて似てゐることがわかる．すなはち，デカルト座標系における三角函数と，円筒座標系における円筒函数である[3]．

(26)式の第3式は，(23)式の第3式の形を用ゐて，

$$[x^{-2}(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\,x^2(\mathrm{d}/\mathrm{d}x) + 1]\,f(x) = 0$$

としたあと，これを

$$x^{-1}\,[x^{-1}\,(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\,x^2(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\,x^{-1} + 1]\,x\,f(x) = 0$$

と変形すれば，

$$[x^{-1}\,(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\,x^2(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\,x^{-1} + 1]\,x\,f(x) = 0$$

であるが，

$$\hat{p}\,x^2\,\hat{p} = x\,\hat{p}^2\,x$$

より，

$$x^{-1}\,\hat{p}\,x^2\,\hat{p}\,x^{-1} = \hat{p}^2$$

なので，結局

$$[\,\hat{p}^2 + 1]\,x\,f(x) = 0 \tag{28}$$

と，(26)式の第1式と同じ形になる．

6．おはりに

ラプラス演算子の円筒座標系および球座標系における表現の意味が大學1年生のうちに直感的にわかつてゐたら，どんなにその後の色々な問題において樂だつたであらうと今から振り返つて後悔を込めて想像する．

若いときには色々なことの全体像が見えず，何が基本的に重要できちんと押さへておかねばならないものであり，何が枝葉末節でどうでもいいことなのかの判断が，自分ではつきにくい．したがつて，偶々よい指導者に恵まれて適切に指導・強制されれば別であるが，獨學にて要点を適格に見極め，ここは少々の時間をかけてでも明確に自分のものとしておくべき箇所と判断することは，余程よい教科書にでも巡り合はない限り，なかなか難しい．よい教師が必要な所以である．

参考文献

1．寺澤寛一「數學概論」岩波書店，1954．
2．ランダウ・リフシッツ「力学」東京図書，1974．
3．アラマノヴィッチ・レーヴィン「数理物理學入門」東京図書，1966．