曲線と曲面

Curves and surfaces

三浦明香子，岸紘子，會川義寛
MIURA Sayaka, KISHI Hiroko, AIKAWA Yoshihiro
（お茶の水女子大学大学院ライフサイエンス）

1．はじめに

1次元空間 R^1（直線）中の点

$$l(t) = e_t t \tag{1}$$

を，3次元空間 R^3 中の点

$$r(t) = e_x x(t) + e_y y(t) + e_z z(t) \tag{2}$$

に対応させる写像

$$l(t) \xrightarrow{f} r(t) \tag{3}$$

を考へる．

もしこの写像 f が連続であれば，点 $l(t)$ が t とともに直線上を動くと，点 $r(t)$ は3次元空間中のある曲線C上を動くことになる．よつてこれを，**t 直線から曲線Cへの写像**といふ．

同様に，2次元空間 R^2（平面）中の点

$$l(u,v) = e_u u + e_v v \tag{4}$$

を，3次元空間 R^3 中の点

$$r(u,v) = e_x x(u,v) + e_y y(u,v) + e_z z(u,v) \tag{5}$$

に対応させる連続な写像

$$l(u,v) \xrightarrow{g} r(u,v) \tag{6}$$

を考へ，この平面上の点 $l(u,v)$ が u,v の変化により uv 平面上を動かせば，点 $r(t)$ は3次元空間中のある曲面S上を動く．これを，**uv 平面から曲面Sへの写像**といふ．

本稿では曲線や曲面の性質を，この $r(t)$ や $r(u,v)$ を用ゐて表はすことについて解説する．

2．曲線C

（1）線素ベクトル $d\boldsymbol{r}$ と曲線の長さ s

$r(t)$ で表はされる曲線Cを考へる．ここで，t を時間と見做すと，点 $r(t)$ はこの曲線C上を走ることになるので，この点の動きを**運動**といひ，曲線Cを**軌道**といふ．

点 $r(t)$ が走る軌道の長さを s とすると，曲線Cの微小長さ ds は，

$$ds = |d\boldsymbol{r}| \tag{7}$$

で表はされるので，軌道上を点 $r(t)$ が走る速さ v は，

$$v = ds/dt \tag{8}$$

となる．

(7)式で表はされる軌道長さは，(2)式を用ゐて，

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \tag{9}$$

と計算される．

この曲線Cが（xy 平面上の）平面曲線の場合はさらに，(9)式におけるパラメータ t として x を用ゐて，

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

が得られる．

（2）軌道基底ベクトル

曲線Cのパラメータ t の替りに，曲線長さ s を用ゐて，曲線 $r(t)$ を $r(s)$ として表現しよう．これは，点 $r(t)$ が単位速さで軌道上を運動してゐることに相当する．これを等速軌道運動といふ．

ここで，$r(t)$ の s による微分を prime 記号「′」を用ゐて，$r' \equiv dr/ds$，$r'' \equiv d^2r/ds^2$ と表はさう．このとき，上記の等速軌道運動における速度ベクトル r' と加速度ベクトル r'' と同じ方向の単位ベクトルをそれぞれ e_t，e_n，とし，この両単位ベクトルと直交する単位ベクトル e_b を(10)式の様に定義する：

$$\begin{aligned} e_t &\equiv r' / |r'| = r' \\ e_n &\equiv r'' / |r''| \\ e_b &\equiv e_t \times e_n = (r' \times r'') / |r''| \end{aligned} \tag{10}$$

この3つの単位ベクトル e_t，e_n，e_b をそれぞれ**接線**ベクトル，**法線**ベクトル，**陪法線**ベクトルといひ，e_t，e_n，e_b がなす右手系基底による座標系を**軌道座標系**といふ．

（3）曲率と捩率

法線ベクトル e_n は r'' の単位ベクトルであるが，r'' の長さ $|r''|$ を

$$\kappa \equiv |r''| \tag{11}$$

と表はせば，r'' は

$$r'' = \kappa e_n \tag{12}$$

と表はされる．この κ を**曲率** curvature といふ．

周知の通り，直交基底の微分は反対称行列を用ゐて表はされる．3次の反対称行列は3つのパラメータで規定されるが，この(e_t，e_n，e_b)系の場合は，de_t が

$$de_t = \kappa e_n\, ds$$

であることが分かつてをり，e_b 成分がないことを考慮すると，3つのパラメータのうちの1つは0といふことになるので，パラメータはあとひとつ，曲率 κ のほかに，τ があれば，行列を

$$d\begin{pmatrix} e_t \\ e_n \\ e_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & \\ -\kappa & 0 & \tau \\ & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_t \\ e_n \\ e_b \end{pmatrix} ds \tag{13}$$

の形に表はすことができる．この新たなパラメータ τ を**捩率** tortion といひ，(13)式右辺の反対称行列を **Frenet-Serret 行列**，(13)式を **Frenet-Serret の公式**といふ．

この公式を見ると，いま軌道に沿つて前 e_t を向いて走つてゐたとき，もし軌道が左 e_n に曲率 κ で曲がると，進行方向 e_t は κ で左 (e_n) に，法線は κ で後 ($-e_t$) にずれる．また，もし進行方向左に見る法線が上 (e_b) に捩率 τ で浮き上がるとすると，陪法線は τ で右

($-e_n$) に捩ぢれることがわかる．したがつて，曲率κは軌道単位長さ当りの曲がり角を，捩率τは軌道単位長さ当りの捩ぢれ角を表はしてゐる．

曲線長さ s による軌道位置 $r(s)$の 1 次および 2 次微分はそれぞれ，$r' = e_t$，$r'' = \kappa e_n$ であつたが，さらに，3 次微分は $r''' = -\kappa^2 e_t + \kappa' e_n + \kappa\tau e_b$ なので，これらをまとめると，

$$\begin{pmatrix} r' \\ r'' \\ r''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \kappa & \\ -\kappa^2 & \kappa' & \kappa\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_t \\ e_n \\ e_b \end{pmatrix} \tag{14}$$

となる．これより直ちに

$$|r'| = 1$$
$$|r' \times r''| = \kappa \tag{15}$$
$$|r' r'' r'''| = \kappa^2 \tau$$

が得られる．この(15)式の計算より，曲率κ と捩率τが容易に求められる．

例へば，曲率κは，(15)式を s 微分から t 微分に変換すれば，直ちに

$$\kappa = |v \times a| / v^3 \tag{16}$$

となる．

また，平面曲線 $r(t) = e_x x(t) + e_y y(t)$ の場合を考へると，(16)式より

$$\kappa = |\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}| / v^3$$

となるが，$t = x$ とおけば，

$$\kappa = \frac{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left(1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{17}$$

が得られる．この式より，もし傾き dy/dx が小さければ，曲率κ を 2 次微分係数 d^2y/dx^2 で近似できることが分かる．

円筒座標で表はした平面曲線 $r(t) = e_\rho \rho(t)$ の場合は，

$$v = e_\rho \dot{\rho} + e_\varphi \rho \dot{\varphi}$$

$$a = e_\rho(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) + e_\varphi(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})$$

となるので，その外積を取り，かつ $t = \varphi$ とおけば，

$$\kappa = \frac{\left|\rho^2 + 2\left(\dfrac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 - \rho\dfrac{d^2\rho}{d\varphi^2}\right|}{\left(\rho^2 + \left(\dfrac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{18}$$

が得られる．この様な計算ができるのも(15), (16)式の効用である．

（4）法平面

e_t，e_n，e_b に垂直な平面をそれぞれ，法平面，展直平面，接触平面といふ．軌道はこれらの平面上に射影を落とす．

いま，軌道 $r(s)$上のある点を $r(0) = 0$ とし，ここで s に関して $r(s)$を級数展開してみよう．すると，(14)式を使つて直ちに s の 3 次の項まで展開できる．すなはち

$$r(s) \approx e_t s + (1/2!)\kappa e_n s^2 + (1/3!)(-\kappa^2 e_t + \kappa' e_n + \kappa\tau e_b)\, s^3$$
$$= t(s)\, e_t + n(s)\, e_n + b(s)\, e_b$$

ただし，

$$t(s) = s - (\kappa^2/6)\, s^3$$
$$n(s) = (\kappa/2)\, s^2 + (\kappa'/6)\, s^3 \tag{19}$$
$$b(s) = (\kappa\tau/6)\, s^3$$

となるので，この式から s を消去して，t，n，b との相互関係

$$b^2 = (2\tau^2/9\kappa)\, n^3$$
$$b = (\kappa\tau/6)\, t^3 \tag{20}$$
$$n = (\kappa/2)\, t^2$$

を求めれば，これらがそれぞれ法平面（n-b），展直平面（b-t），接触平面（t-n）上の軌道射影となる．

（5）運動

運動する点 $r(t)$の速度 v と加速度 a は，(14)式の s に関する微分を，(16)式のときと同様に，$v = ds/dt$ を使つて変換すれば，

$$\begin{pmatrix} v \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & 0 \\ \dot{v} & \kappa v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_t \\ e_n \end{pmatrix} \tag{21}$$

が得られる．行列右下の項は，軌道の曲率κ に基づく法線加速度 $a_n = \kappa v^2$ である．

（6）各種曲線

【直線（$\kappa = \tau = 0$)】

曲率κも捩率τも 0 の場合（$\kappa = \tau = 0$）を考へる．すなはち，曲がりもしなければ捩ぢれもしない曲線である（これは直感的に直線であることが分かる)．

$\kappa = \tau = 0$ なので，(13)式右辺の Frenet-Serret 行列は 0 になり，左辺の 3 つの軌道基底ベクトルの変化はない．したがつて，進行方向が一定なので，直線である．

【捩れ直線（$\kappa = 0$)】

捩ぢることはできるが（$\tau \neq 0$)，曲がることはできない（$\kappa = 0$）曲線を考へてみよう．曲がることが出来ないので當然直線である．ただし，この直線は捩ぢれてゐる．しかし，直線に太さがなければ捩ぢれがあるのかないのかは実際には見分けられない．

【平面曲線（$\tau = 0$)】

逆に，曲がることは出来るが（$\kappa \neq 0$)，捩ぢれることはない（$\tau = 0$）曲線を考へてみよう．これは直感的には平面曲線である．

$\tau = 0$ の Frenet-Serret 行列は，第 3 行要素がすべて 0 になるので，Frenet-Serret 式(13)より陪法線ベクトル e_bが一定となる．この e_b の方向を z 方向とすると，e_t と e_n はいづれも xy 平面内にあることになるので，明らかにこれは平面曲線である．

【円軌道（$\kappa = 1/a$, $\tau = 0$)】

上の平面曲線の条件に加へて，さらに，曲率κ が一定である場合を考へよう．直感的には，平面上で同じ曲がりを続けてゐれば円になることは容易に想像できる．

いま，$\tau=0$ なので，Frenet-Serret 式(13)は２次元となる．すなはち，

$$\mathrm{d}\begin{pmatrix} e_t \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_t \\ e_n \end{pmatrix} \mathrm{d}s \tag{22}$$

ところが，円筒座標系の基底ベクトル微分は，

$$\mathrm{d}\begin{pmatrix} e_\rho \\ e_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}\varphi \\ -\mathrm{d}\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_\rho \\ e_\varphi \end{pmatrix} \tag{23}$$

であつたので，両式を較べて，

$$e_t = e_\varphi \qquad e_n = -e_\rho \qquad e_b = e_z \tag{24}$$

とし，かつ，$\mathrm{d}\varphi = \kappa\,\mathrm{d}s$ とすれば，両式は同じになる．

また，円筒座標系での変位 $\mathrm{d}r$ は，

$$\mathrm{d}r = e_\rho\,\mathrm{d}\rho + e_\varphi\,\rho\,\mathrm{d}\varphi + e_z\,\mathrm{d}z$$

なので，$\rho=a$ として $\mathrm{d}\rho=0$ であれば($\mathrm{d}z=0$ なので)，$\mathrm{d}s = a\,\mathrm{d}\varphi$ となり，これと先の式 $\mathrm{d}\varphi = \kappa\,\mathrm{d}s$ より，$\kappa = 1/a$ であることがわかる．

$\rho=a$ といふことは，半径 a の円軌道

$$r(\varphi) = e_\rho\,\rho = e_\rho\,a \tag{25}$$

を意味する．

ここで，円軌道（半径 a）上での等速運動を考へれば，角速度ωが一定であるから，方位角φは

$$\varphi = \omega t$$

と，時間 t をパラメータに用ゐて表はすことができる．したがつて速度 v と加速度 a はそれぞれ

$$v(\varphi) = e_\varphi\,a\omega$$
$$a(\varphi) = -e_\rho\,a\omega^2$$

と表はされる．

【螺旋軌道（$\kappa = a/(a^2+b^2)$, $\tau = b/(a^2+b^2)$）】

曲率κも捩率τもともに一定不変の曲線を考へる．これは，一定曲率で曲げれば円になるところを，さらに一定捩率で捩ぢるのである．

いま，左に曲がる曲線を考へる．曲線を左に曲げつつ，右に捩ぢれば，曲線は上に昇つていく．逆に左に捩ぢれば，曲線は下に降つていく．左に曲がりながら上に昇つて行くのであるから，これは右巻螺旋である．

この螺旋の**螺旋円周**を $2\pi a$（螺旋半径 a），**螺旋波長**を $2\pi b$ とすれば，a と b は，曲率κと捩率τと，

$$a = \kappa/(\kappa^2+\tau^2) \qquad b = \tau/(\kappa^2+\tau^2) \tag{26}$$

の関係にある．また，逆に

$$\kappa = a/(a^2+b^2) \qquad \tau = b/(a^2+b^2) \tag{27}$$

である．a，b が**実空間**の概念であるのに対し，κ，τが**逆空間**の概念であり，互ひに対称であることが，この両式からよくわかる．

螺旋軌道は，円筒座標系を使つて，

$$r(\varphi) = e_\rho\,a + e_z\,b\varphi \tag{28}$$

と表はされる．すなはち，

$$\rho = a,\ z = b\varphi$$

である．

(28)式を微分すると，

$$\mathrm{d}r = (e_\varphi a + e_z b)\,\mathrm{d}\varphi \tag{29}$$

なので，

$$\mathrm{d}s = (a+b)^{1/2}\,\mathrm{d}\varphi \tag{30}$$

となる．

ここで，**螺旋角**θを

$$\cos\theta = a/(a+b)^{1/2} \qquad \sin\theta = b/(a+b)^{1/2} \tag{31}$$

と定義すれば，

$$e_t = e_\varphi\cos\theta + e_z\sin\theta \qquad e_n = -e_\rho \qquad e_b = -e_\varphi\sin\theta + e_z\cos\theta \tag{32}$$

となるが，これはまとめれば，

$$\begin{pmatrix} e_t \\ e_b \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \\ -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_\varphi \\ e_z \\ e_\rho \end{pmatrix} \tag{33}$$

となるので，進行方向（e_t）は水平面よりθだけ上向きになつてをり，それにつられて e_b はθだけ後にのけぞつてゐることがわかる．したがつて，螺旋角θは，円筒座標系と螺旋軌道座標系との間の角度を表はすものとして，

$$\cos\theta = e_n\cdot e_t = e_z\cdot e_b$$

とも定義できる．

e_n が常に水平面上にあつて向軸方向に向いてゐる（$e_n = -e_\rho$）ことは，円軌道と同様である．この e_n を基準に，忠実に左に曲がり（$\mathrm{d}e_t = \kappa e_n$），右に捩ぢれ（$\mathrm{d}e_b = -\tau e_n$）てゐる．

すなはち，曲がりは e_t の，捩ぢれは e_b の，曲がり及び捩ぢれを指すことが，ここでも明らかになつた．これを明確にするには，Frenet-Serret の公式を

$$\mathrm{d}\begin{pmatrix} e_t \\ e_b \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \kappa \\ & 0 & -\tau \\ -\kappa & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_t \\ e_b \\ e_n \end{pmatrix} \mathrm{d}s \tag{34}$$

とした方が，その左曲がり（κe_n）と右捩ぢれ（$-\tau e_n$）がいづれも左法線（e_n）に依存してゐることが明確になつて，かへつてよいかも知れない．

3．曲面 S

（1）面素ベクトル dS と曲面の面積 S

$r(u,v)$で表はされる曲面 S を考へる．ここで，uv 平面上の微小長方形（点(u, v)と点$(u+\mathrm{d}u, v+\mathrm{d}v)$を対角とする長方形）が，３次元空間内のどの様な曲面片に対応するかを考へる．

元の uv 平面上の長方形の下の辺を，uv 平面上の点

$$l(u,v) = e_u u + e_v v$$

が，(u, v)から$(u+\mathrm{d}u, v)$まで動いたとする．するとこれに伴ひ，３次元空間中の点

$$r(u,v) = e_x x(u,v) + e_y y(u,v) + e_z z(u,v) \tag{5}$$

は，$r(u,v)$から

$$\frac{\partial r}{\partial u}\,\mathrm{d}u$$

だけ動く．同様に点 $l(u,v)$が長方形の左の辺を，(u, v)から$(u, v+\mathrm{d}v)$まで動くと，点 $r(u,v)$は

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\,\mathrm{d}v$$

だけ動く．したがつて，この２つの変位ベクトルの張る平行四辺形が，元の uv 平面上の微小長方形に対応する曲面片であることがわかる．

２つのベクトルの張る平行四辺形の面ベクトルはその２つのベクトルの外積なので，この微小長方形に対応する曲面片の面素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \qquad (35)$$

である．

この式の右辺に(5)式を代入して各基底ベクトルごとにまとめると

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \left(\boldsymbol{e}_x \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

となる．ここで，

$$\mathrm{d}y \times \mathrm{d}z \equiv \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \qquad (36)$$

なる記号を定義すると，面素ベクトルは

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e}_x\,\mathrm{d}y \times \mathrm{d}z + \boldsymbol{e}_y\,\mathrm{d}z \times \mathrm{d}x + \boldsymbol{e}_z\,\mathrm{d}x \times \mathrm{d}y \qquad (37)$$

と簡潔に表はされる．

もし，平面パラメータを $u = x, v = y$ と取り，高さ z を平面(x, y) の函數として，$z = z(x, y)$ として表はすとすれば，Jacobian が簡單になり，

$$\mathrm{d}y \times \mathrm{d}z = -(\partial z/\partial x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\mathrm{d}z \times \mathrm{d}x = -(\partial z/\partial y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\mathrm{d}x \times \mathrm{d}y = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

なので，面素ベクトルは

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = (-\boldsymbol{e}_x\,\partial z/\partial x - \boldsymbol{e}_y\,\partial z/\partial x + \boldsymbol{e}_z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (38)$$

となり，その面積 $\mathrm{d}S$ は

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2 + 1}\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (39)$$

と計算しやすくなる．

（２）接平面

これから先，曲面上の各点における接平面を求め，それからこの接平面を２つの曲率でそれぞれの方向に曲げて，曲面に近づけることを考へるのだが，これはまた稿を改めることにしたい．

４．おはりに

接平面の途中で龍頭蛇尾に終ることはまことに遺憾である．ここに楕円軌道に関して少々付け加へ，その弊を稍緩和したいと思ふ．

楕円は色々な観点から考察することができるが，最も簡單には，円（半徑 a）を縦に（b/a 倍に）つぶしたものと見做すことができる．この観点から楕円を表はした式が

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1 \qquad (40)$$

である．

これは，楕円の対称心を楕円の象徴としたものであり，これを原点に取つてゐる．

軌道上の点 $\boldsymbol{r}(\varphi) = \boldsymbol{e}_x x(\varphi) + \boldsymbol{e}_y y(\varphi)$ は

$$\boldsymbol{r}(\varphi) = \boldsymbol{e}_x\, a \cos\varphi + \boldsymbol{e}_y\, b \sin\varphi \qquad (41)$$

と，パラメータ φ を以て表はされる．

このとき $\mathrm{d}s$ は，(9)式より，

$$\mathrm{d}s = \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}\;\mathrm{d}\varphi$$

であるから，順序よく計算していくと，法線ベクトル $\boldsymbol{e}_n$ と曲率 κ はそれぞれ

$$\boldsymbol{e}_n = \frac{-1}{\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}} (\boldsymbol{e}_x b \cos\varphi + \boldsymbol{e}_y a \sin\varphi)$$

$$\kappa = \frac{ab}{\left(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi\right)^{3/2}} \qquad (42)$$

である．曲率 κ は $\sin\varphi$ が０のときが最も大きく，$\cos\varphi$ が０のときが最も小さい．

これに対し，対称心が楕円の象徴点ではない．円の中心は，楕円になることにより離心した２つの**焦点** f に分かれたのだ，といふ観点もある．この観点に立つて，楕円の**長徑** a に対し，離心した割合 ε

$$\varepsilon \equiv f/a = \sin\theta \qquad (43)$$

を，**離心率**といふ．θ は**離心角**である．

楕円の３つの徑，すなはち，長徑 a，**短徑** b，**弦徑** h は，それぞれ長徑との比を離心角を用ゐて，

$$b/a = \cos\theta = \delta$$
$$h/a = \cos^2\theta = \delta^2 \qquad (44)$$

と表はされるので，$\varepsilon = \sin\theta$ が離心率であつたのに対し，$\delta = \cos\theta$ は**扁平率**であることがわかる．すなはち，

$$\delta = \cos\theta$$
$$\varepsilon = \sin\theta \qquad (45)$$

であり，縦に扁平につぶした（扁平率 δ ）ので，横に焦点が離心した（離心率 ε ）と考へることができる．

さて，この楕円軌道を，ひとつの焦点を原点として円筒座標系で表はせば，

$$\boldsymbol{r}(\varphi) = \boldsymbol{e}_\rho \rho(\varphi) \qquad (46)$$
$$\rho(\varphi) = h/(1 + \varepsilon\cos\varphi) = a\delta^2/(1 + \varepsilon\cos\varphi)$$

である．これを(18)式に代入すれば，曲率 κ が，

$$\kappa = \frac{(1 + \varepsilon\cos\varphi)^3}{\left(1 + 2\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon^2\right)^{3/2}} \qquad (47)$$

と求まる．これもかなり複雑な式である．

謝辞

御指導頂きました白鳥高行先生に感謝致します．

参考文献

１．寺澤寛一「自然科学者のための數學概論（増訂版）」，岩波書店，1954.
２．中原一郎「材料力学（上・下）」養賢堂，1965.
３．C.R. Calladine, H.R. Drew「なぜ遺傳子は螺旋を巻くのか」共立出版（譯），1992.
４．M. Ougizawa et al., "A twisted filament and its helix structure formation", *Textile Res. J.*, **74**, 629 - 633 (2004).