# 論理式とその表現
# Logical Formulae and their Expressions

三浦明香子，前田育子，會川義寛
MIURA Sayaka, MAEDA Ikuko, AIKAWA Yoshihiro
お茶の水女子大学

## 1．はじめに

世界は事のすべてである．事は物の結合により生じ，命題によつて表はされる．命題を $a, b$ で表はせば，これが正しいか否かは，事が成立するか否かにより判定される．したがつてこの判定は実験によつてのみ行なふことができ，論理によつては判定できない．

命題 $a$ が正しいとき（事 $a$ が成立するとき），この命題 $a$ は成立値1を取るといひ，

$$X(a) = 1$$

と表はす．逆に，命題 $a$ が正しくないとき（事 $a$ が成立しないとき），この命題 $a$ は成立値0を取るといひ，

$$X(a) = 0$$

と表はす．すなはち，命題 $a$ の成立値 $X(a)$ は，1または0の値を取る2値函數である．

事には，これ以上に分解不可能な要素的な事と，要素的な事の結合として表現される複合的な事とがある．前者を表はす命題を**要素命題**，後者を表はす命題を**複合命題**といふ．要素命題 $a, b, c,$ ……の組合せで表はされる複合命題 $z$ を

$$z = f(a, b, c, \cdots\cdots)$$

と表はしたとき，式 $f(a, b, c, \cdots\cdots)$ を**論理式**または**論理函數**といふ．

要素命題の成立値は実験でしか求められないが，その組合せである複合命題の成立値は，これを構成する要素命題の成立値がわかりさへすれば，これを論理函數として數學的に求めることができる．本稿では，複合命題を要素命題の結合として論理式で表現し，その成立値および妥当性を論ずる．

## 2．演算子と成立値

（1）否定演算子

1項命題 $a$ の**否定**命題を $a^*$ と表はす．否定を2回続けて行なへば，元に戻るので，

$$a^{**} = a \qquad (1)$$

が成り立つ．すなはち $a^*$ の否定は $a$ であり，この2つの命題は演算子「*」に関して対称である．この意味で，命題 $a$ と $a^*$ は互ひに**表裏**関係にあるといふ．

（2）2項演算子

次に，2つの命題 $a$，$b$ から，1つの複合命題を作る方式を考へてみよう．2つの命題 $a$，$b$ の結合には，**選言**「$a$ または $b$」や，**連言**「$a$ かつ $b$」，**条件**「$a$ ならば $b$」，**双条件**「$a$ ならば $b$，かつ，$b$ ならば $a$」などがある．そこでまづ，命題 $a$ と $b$ の選言と連言とをそれぞれ

$$a + b \qquad (2)$$

$$a \times b \text{ または } ab \qquad (3)$$

と表はす．

この選言「+」と連言「×」，ならびに否定「*」の3つの演算子を用ゐると，他のすべての複合命題は要素命題のこの3つの演算子による組合せで表はすことができるが，これは後で示さう．その前に，条件「$a$ ならば $b$」と，双条件「$a$ ならば $b$，かつ，$b$ ならば $a$」とを，それぞれ

$$a \to b \qquad (4)$$

$$a \leftrightarrows b \qquad (5)$$

で表はしておかう．

## 3．命題から2値変数へ

（1）命題とその成立

命題 $a$ と命題 $b$ とが全く同じ内容を表はしてゐるとき，これを

$$a = b \qquad (6)$$

と式で表現する．すると，同じ命題の成立値は等しいので，

$$X(a) = X(b) \qquad (7)$$

が成り立つ．(6)式の等号は両辺の命題の意味が同じであるといふ意味であり，(7)式の等号は両辺の命題の成立値が等しいといふ意味である．(6)式が成り立

てば当然 (7)式は成り立つが，(7)式が成り立つとしても (6)式が成り立つ譯ではない．

命題 $a$ =「1 + 1 は 2 である」と，命題 $b$ =「2 + 3 は 5 である」は，いづれも真であるから，その成立値は両者とも 1 である．すなはち，$X(a) = X(b) = 1$ であるが，命題 $a$ と命題 $b$ とは明らかに異なるので $a \neq b$ である．ただ，どちらの命題も成立するといふ意味においてのみ同じであり，命題自体は異なるが，その成立性といふ性質が共通である，といふに過ぎない．

（２）命題の意味の捨象

ところがこれから先，命題の中身，その意味するところに関しては気にせずに，その成立値のみに関心を持つことにしてみよう．すなはち，

$$X(a) = X(b) \tag{7}$$

であることを，もうそのまま

$$a = b \tag{6}$$

と表はすことにするのである．すなはち，(6)式の表記法を以て (7)式の意味を表はすことにするのである．さうすると，$a$ や $b$ の記号は，單に 1 か 0 かの値を取りうる変數記号に過ぎなくなつてしまふ．

したがつてこれからは，命題 $a$，$b$ といふことはやめて，單に２値変數 $a$，$b$ と呼ぶことにしよう．さうすれば，(6)式の表記法を以て (7)式の意味を表はす，などと面倒なことをいふ必要はなくなる．もはや命題の意味は関係ない．命題の成立値のみが関係するのである．したがつて，連言は論理積と，選言は論理和と，否定は表裏変換演算（後出）と名付ける方が適切であらう．そして複合命題は，複数の２値変數の函數であるところの論理函數，すなはち論理式となる．

## ４．論理式の表裏関係と式の双対性

（１）否定から表裏変換へ

命題 $a$ の否定 $a^*$ に関しては，以下のことが言へる．$X(a) = 1$ なる命題 $a$ を否定した命題 $a^*$ の成立値 $X(a^*)$ は，明らかに $X(a^*) = 0$ であり，また，$X(a) = 0$ なる命題 $a$ を否定した命題 $a^*$ の成立値 $X(a^*)$ は，当然 $X(a^*) = 1$ である．すなはち

$$X(a) = 1 \quad \text{ならば，} \quad X(a^*) = 0$$
$$X(a) = 0 \quad \text{ならば，} \quad X(a^*) = 1$$

が成り立つ．

ここで，先ほどの命題の意味の捨象を行なつて，命題 $a$ を單に２値変數 $a$ としてしまへば，

$$X(a^*) = a^* = [X(a)]^*$$

となるので，

$$1^* = 0$$
$$0^* = 1 \tag{8}$$

が成り立つ．これを，成立値 1 と 0 は互ひに表裏関係にあるといふ． $a$ と $a^*$ が互ひに表裏関係にあることは先述した．したがつて演算子「*」は，否定の意味がすでに捨象されてをり，表裏変換を行なふ演算子に抽象化されてゐる．

（２）表裏関係と双対性

論理和と論理積に関しては，**相補則**

$$a + a^* = 1$$
$$aa^* = 0 \tag{6}$$

が成り立つ．ところが２つの (6)式の右辺同士は互ひに表裏関係にあるので，その左辺同士も表裏関係にあるはずである．すなはち，

$$(a + a^*)^* = aa^*$$
$$(aa^*)^* = a + a^*$$

が成り立つ．さらに，**de Morgan の定理**

$$(a + b)^* = a^*b^*$$
$$(ab)^* = a^* + b^* \tag{7}$$

も成り立つことが容易に証明できる．これらの式を見ると，２項演算子に関して

$$(+)^* = \times$$
$$(\times)^* = + \tag{8}$$

が成り立つてゐることがわかる．すなはち，２項演算子「+」と「×」とは互ひに表裏関係にある．

表裏関係にある等式は，互ひに鏡像関係にある様なものだから，一方を証明すれば他方も成立する．これを表裏式の**双対性** duality といふ．

ある論理式の 1 と 0 とを交換して，さらに+と×とを交換して作られた式を，もとの式の双対論理式といふ．

## ５．論理式の基本則

論理式の３つの基本則，すなはち，**相補・冪等則**，**分配則**，**吸収・残存則**を以下に示す．各則ごとに２つの式があるが，これらは互ひに双対式となつてゐる．

（1）相補・冪等則

$a+a^*=1$ $\qquad a+a=a$

$aa^*=0$ $\qquad aa=a$

【相補則】 【冪等則】 (9)

（2）分配則

$a(b+c)=ab+ac$

$a+(bc)=(a+b)(a+c)$

【分配則】 (10)

（3）吸収・残存則

$a+ab=a$ $\qquad a+a^*b=a+b$

$a(a+b)=a$ $\qquad a(a^*+b)=ab$

【吸収則】 【残存則】 (11)

## 6．論理式の展開とカルノー図

（1）論理式の標準展開

3つの2値変数 $a, b, c$ の函数 $f(a, b, c)$ を考へる．この式は $a$ に関して

$$f(a, b, c)=af(1, b, c)+a^*f(0, b, c) \tag{12}$$

と展開することが出来る．

この証明は，$a$ が單に2値，すなはち1と0しか値を取らないことを利用して，1および0を(9)式の $a$ に直接代入して証明することができる．$a=1$ の場合は直ちに両辺ともに $f(1, b, c)$ である．$a=0$ の場合も同様に直ちに両辺とも $f(0, b, c)$ であり，問題はない．すなはち(12)式は証明された．

すると今度は(12)式右辺の $f(1, b, c)$ を，$b$ に関して同様に展開することが出来る．これらを続ければ，結局

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= abc\,f(1,1,1)+abc^*f(1,1,0) \\ &+ab^*c\,f(1,0,1)+ab^*c^*f(1,0,0) \\ &+a^*bc\,f(0,1,1)+a^*bc^*f(0,1,0) \\ &+a^*b^*c\,f(0,0,1)+a^*b^*c^*f(0,0,0) \end{aligned} \tag{13}$$

と全変数に関して展開することができる．これを論理式 $f(a, b, c)$ の**標準展開**といふ．

（2）論理和，論理積の標準展開とカルノー図

論理和 $a+b$ や，論理積 $ab$ は，2つの変数 $a, b$ の函数 $f(a, b)$ であるから，一般に

$$\begin{aligned} f(a, b) &= ab\,f(1,1)+ab^*f(1,0) \\ &+a^*b\,f(0,1)+a^*b^*f(0,0) \\ &= ab\,f_{11}+ab^*f_{10} \\ &+a^*b\,f_{01}+a^*b^*f_{00} \end{aligned} \tag{14}$$

と表はされる．ここで，$f_{ij}\equiv f(i, j)$ とした．

このとき函数 $f$ を

$$f \sim \begin{pmatrix} f_{11} & f_{10} \\ f_{01} & f_{00} \end{pmatrix} \tag{15}$$

として行列と対応させる．この行列を**カルノー図 Karnaugh diagram** といふ．

(14)式の両辺の裏返しを取ると，

$$\begin{aligned} [f(a, b)]^* &= [ab\,f_{11}+ab^*f_{10} \\ &+a^*b\,f_{01}+a^*b^*f_{00}]^* \\ &=(a^*+b^*+f_{11}^*)(a^*+b+f_{10}^*) \\ &+(a+b^*+f_{01}^*)(a+b+f_{00}^*) \\ &=ab\,f_{11}^*+ab^*f_{10}^* \\ &+a^*b\,f_{01}^*+a^*b^*f_{00}^* \end{aligned}$$

となるので，函数 $f^*$ のカルノー図は單に

$$f^* \sim \begin{pmatrix} f_{11}^* & f_{10}^* \\ f_{01}^* & f_{00}^* \end{pmatrix} \tag{16}$$

と表はせることが分かる．

論理和 $a+b$ は

$$\begin{aligned} a+b &= a(b+b^*)+b(a+a^*) \\ &=ab+ab^*+ba+ba^* \\ &=ab+ab^*+a^*b \\ &=ab\,1+ab^*\,1 \\ &+a^*b\,1+a^*b^*\,0 \end{aligned}$$

となるので，論理和 $a+b$ のカルノー図は

$$a+b \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．論理積 $ab$ は直ちに

$$ab \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であることがわかる．

さらに，

$$a \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であることも明白である．

（３）条件と双条件

条件「$a \to b$」（$a$ ならば $b$）は，その意味よりカルノー図が

$$a \to b \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と求まる．これを標準式に直せば，

$$\begin{aligned}(a \to b) &= ab + a^*b + a^*b^* \\ &= (a + a^*)\,b + a^*b^* \\ &= b + a^*b^* = a^* + b \qquad (17)\end{aligned}$$

となる．この最後の導出部分に残存則を用ゐた．

次に双条件「$a \leftrightarrows b$」（$a$ ならば $b$，かつ，$b$ ならば $a$）は，（$a \to b$）と（$b \to a$）の連言であるから，(11) 式を用ゐて，

$$\begin{aligned}(a \leftrightarrows b) &= (a \to b)\,(b \to a) \\ &= (a^* + b)\,(b^* + a) \\ &= ab + a^*b^*\end{aligned}$$

となるので，そのカルノー図は，

$$a \leftrightarrows b \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，これはまさに一致を意味する「$a = b$」であることがわかる．よつて以降は双条件「$a \leftrightarrows b$」の記号をやめて一致「$a = b$」を使ふことにする．すなはち，

$$a = b \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．これをまた，「$a \equiv b$」と書いて IAND (inclusive AND) といふこともある．

ここでさらに，一致の否定である不一致「$a \neq b$」を求めておかう．

$$\begin{aligned}(a \neq b) &= (a = b)^* = (ab + a^*b^*)^* \\ &= (ab)^*\,(a^*b^*)^* \\ &= (a^* + b^*)\,(a + b) \\ &= ab^* + a^*b \\ &= (a = b^*) \\ &= (a^* = b)\end{aligned}$$

であり，「$a \neq b$」と「$(a = b)^*$」，「$a = b^*$」，「$a^* = b$」はすべて同じものであることが分かる．

この不一致「$a \neq b$」のカルノー図は，

$$a \neq b \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

この不一致「$a \neq b$」を「$a \oplus b$」と書いて，排他和 EOR (exclusive OR) といふこともある．

（４）全２項カルノー図と論理式

２項 Karnaugh 図は，各要素が 1 と 0 との２つの値を取る可能性があるので，すべてで $2^4 = 16$ 個あるはずである．これを Fig. 1 にその論理式とともに示す．図は全体として左右対称になつてゐるが，左右はそれぞれ相手の否定（白黒反轉）になつてゐる．すなはち(16)式を表はしてゐる．

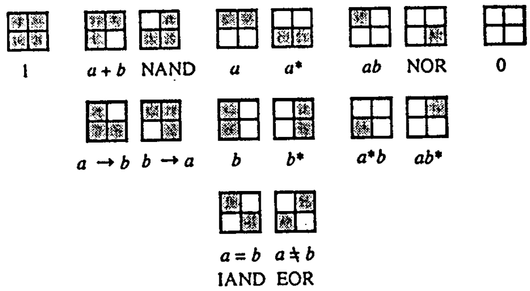



Fig. 1 Karnaugh diagrams for two term logical function

## ７．定理と証明

先述した様に，要素命題はこれを論理的に証明することはできない．要素命題が成立するか否かは，実験によつてのみ分かることである．したがつて，論理で証明すべきは，ある前提があつたとき，ある結論が正しいことを証明するか，または，ある前提があつたとき，別の命題がそれと同意義であることを証明するか，のいづれかである．前者は「$a \to b$」が正しいか否かの証明であり，後者は「$a = b$」が正しいか否かの証明である．ここで命題 $a$ と命題 $b$ とは独立ではなく，互ひに従属してゐなければならない．もし互ひに独立ならば，両者間に論理的な関係はなく，論理では証明できないからである．別個に実験でもして証明するしかない．

「$a \to b$」が正しい，または，「$a = b$」が正しい，といふことは

$$(a \to b) = 1$$

$$(a = b) = 1$$

といふことを意味する．この様に，ある論理式が 1 に等しいとき，これを**恒真式** tautology といふ．恒真式はいはば当然の式であり，何ら新しい情報を加へてゐる譯ではない．數學的には本来初めから分かつてゐるはずのことに過ぎない．実験をして新しい

ことを見出したのではないから，当然であらう．かう假定したらかうなる，といふ一種の定義の様なものである．言つてみれば，單なる言ひ換へに過ぎない．數學の定理とはその様なものだ．物理の法則とは性質が異なるのである．

恒真式を示すことは，その裏である恒偽式（矛盾式 contradiction ともいふ）を示すことと同値である．恒真式と恒偽式は表裏をなすからである．どちらを証明してもよい．

重要な４つの基本定理，すなはち**分離則**，**帰謬則**，**対偶則**，**推移則**を以下に証明しておかう．

（１）分離則

$$(a \to b)\ a \to b$$

$$(a \to b)\ b^* \to a^*$$

【分離則】 (18)

証明：

$$\text{上式} = [(a \to b)\ a \to b]$$
$$= [(a^* + b)\ a]^* + b$$
$$= ab^* + a^* + b$$
$$= ab^* + (ab^*)^* = 1$$

$$\text{下式} = [(a \to b)\ b^* \to a^*]$$
$$= [(a^* + b)\ b^*]^* + a^*$$
$$= ab^* + b + a^*$$
$$= ab^* + (ab^*)^* = 1$$

（２）帰謬則

$$(a \to b)\ (a \to b^*) \to a^*$$

【帰謬則】 (19)

証明：

$$\text{上式} = [(a \to b)\ (a \to b^*) \to a^*]$$
$$= (a^* + b)^* + (a^* + b^*)^* + a^*$$
$$= ab^* + ab + a^*$$
$$= a\,(b^* + b) + a^* = 1$$

（３）対偶則

$$(a \to b) = (b^* \to a^*)$$

【対偶則】 (20)

証明：

$$\text{左辺} = (a \to b) = a^* + b$$
$$= (b^*)^* + a^* = b^* \to a^*$$

（４）推移則

$$(a \to b)\ (b \to c) \to (a \to c)$$

【推移則】 (21)

証明：

$$\text{上式} = [(a \to b)\ (b \to c) \to (a \to c)]$$
$$= (a^* + b)^* + (b^* + c)^* + (a^* + c)$$
$$= ab^* + bc^* + a^* + c$$
$$= (a^* + ab^*) + (c + bc^*) = 1$$
$$= a^* + b^* + c + b = 1$$

## 8．論理回路と NAND 素子

これまで各種の論理式が論理積，論理和，否定の組合せで表はされることを示して来た．ところがこれよりももつと單純に，Fig. 1 に表はした NAND だけを用ゐてすべての２項演算を表はすことができる．これを，NAND 演算は**完全系**をなす，といふ．

（１）NAND 演算

NAND 演算を，論理積の否定として以下に示そう．定義する．すなはち，

$$a * b \equiv (ab)^* \quad (22)$$

である．すると，否定，論理積，論理和は，以下の様に，すべてこの NAND 演算だけを用ゐて表はすことができる．簡単な計算により

$$a^* = a * a$$
$$ab = (a * b) * (a * b) \quad (23)$$
$$a + b = (a * a) * (b * b)$$

であることがわかる．(23)式を用ゐて，否定，論理積，論理和の演算を行なふ素子を，NAND 素子を組合わせた回路で表はすことができる（Fig. 2)．

否定，論理積，論理和の組合せですべての論理式を表はすことができたので，これは，すべての論理式を NAND 演算だけで表はせることを意味してゐる．すなはち，NAND 演算は完全系をなす．

（２）論理素子と論理回路

上記の AND 素子や OR 素子，NAND 素子の様に，２個の入力端子と１個の出力端子を持つ素子で，入力・出力いづれも１または０の値だけを持つとき，これを**論理素子**といふ．論理素子を組み合せて作つた回路を**論理回路**といふ．

先に示した様に，NAND 演算は完全系をなすので，NAND 素子さへあれば，その組合せにより，すべての論理回路を作ることができる．

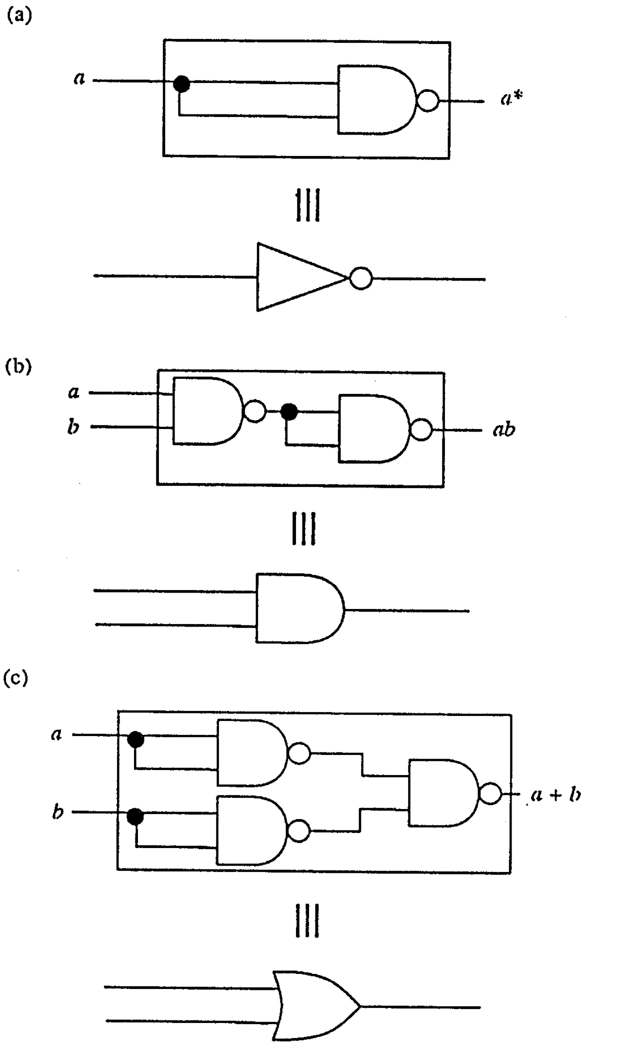



Fig. 2 Circuit elements for NOT, AND and OR composed of NAND elements

（3）加算回路

いま，2 つの数 $a, b$ を，2 進数で表はす．ただし，$a, b$ はいづれも 1 桁の 2 進数，すなわち 0 か 1 のみとする．この $a$ と $b$ を入力とし，$a+b$ を出力とする加算回路を考へる．

出力 $a+b$ は一般には 2 桁の 2 進数になる．従って上桁を $c$，下桁を $s$ とすれば $c$ と $s$ も 2 進数で表はしてゐるので，0 か 1 のみの値をとる．すると上桁 $s$ は $1+1=10$ のとき以外は 0 なので

$$s = ab$$

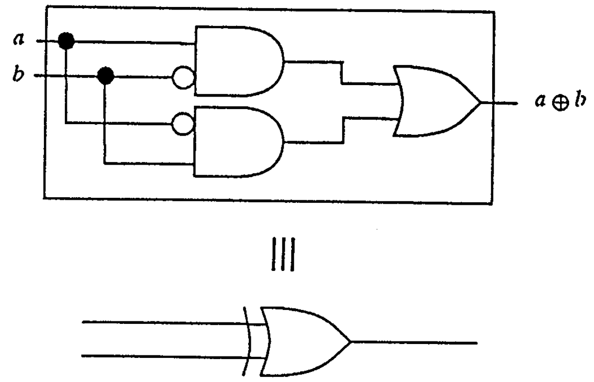
である．

下桁 $c$ は $a+b$ の和が奇数のときのみ 1 となるので

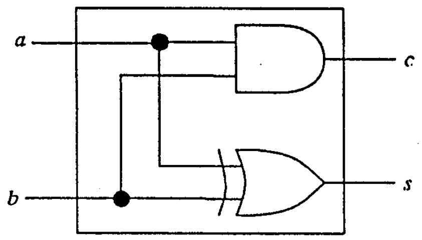
$$c = a \oplus b = a^* b + a b^*$$

であることがわかる．

いま $a \oplus b$ を




で表せば加算回路は




で表はすことができる．この様にしてディジタル回路が作られる．

## 9．おはりに

NAND は完全系を作ることを示したが，双対性を考慮すると，NOR も完全系を作るはずである．簡単な計算をするとすぐわかるが，(23)式は NAND のみならず，NOR に関しても全く同じ式が成り立つ．これらが完全系をなせるのは，基本に，$a$ NAND $a = a$ NOR $a = a^*$ の様に，裏の $a^*$ にこれらの演算で行くことができるところから来てゐる．裏に行くことができればもう 1 回裏に行くことで戻つて来ることが出来る．

ところが，AND や OR は完全系を作れない．これは，NAND や NOR と違つて，その演算内に否定を含まないため，AND や OR は裏側に行くことが出来ないためである．事実，$a$ AND $a = a$ OR $a = a$ となり，$a$ にしかなれない．裏の $a^*$ には行けないのである．

同様に，IAND や EOR も，$a$ IAND $a = 1$，a EOR $a = 0$ となり，完全系を作ることが出来ない．