演算子法とラプラス変換

Operational calculus and Laplace transform

會川義寛, 池田寛子, 兒玉歩, 前田育子, 大久保淳子, 三浦明香子, 岡田祐美, 山下順三
Yoshihiro AIKAWA, Hiroko IKEDA, Ayumi KODAMA, Ikuko MAEDA, Junko OKUBO, Sayaka MIURA, Yumi OKADA, Junzo YAMASHITA
(お茶の水女子大学, 福島県立医科大学, 東京医科大学)

1. はじめに

表の世界における函數と裏の世界における函數とが1対1に対応して, かつ, 表の世界での面倒な函數間の計算が裏の世界では單純な計算に対応してゐれば, 一旦裏に行つて計算した後に表に戻るといふ手順を取るのが便利である. 單純簡明な裏での動きが表に投影されて複雑に見えてゐると考へてもよいだらう. かうなると, 裏こそ真実, イデアの世界と言ひたくなるかも知れないが, その様なものではない. 表裏, 單に見る方向が異なるだけで, 逆に表からの方が單純簡明に見える場合もあるのである.

乗除算を加減算に簡單化するものとして対數がある. この原理を用ゐた計算尺が40年程前まではよく使はれたが (有効数字は約3桁), 電卓のせゐで今はもうない. 微積分演算を乗除算に簡單化するものとして演算子法があるが, これもラプラス変換に取つて替はられ, いまはもうない. ラプラス変換の方が使いやすいからであらう.

しかし演算子法は, 簡單な計算には電卓の様に気樂に使へるので, 知つて損はない. ただ, ラプラス変換を學ぶための余計な障碍になるかも知れないとの危惧は拭へない.

2. 表裏の対応

(1) 裏函數の定義

表の世界から裏の世界へ行く演算子を「*」で表はす. すなはち, 表の世界の函數fは, 裏の世界の函數f^*と対応してゐると考へる. そして, ここで重要なことは, 表の世界における積分といふ演算が, 裏の世界へ行くと單なる掛算になる様な, その様な裏世界を考へるのである. すなはち

$$\left(\int_0^t f\,dt\right)^* = f^*\Delta t^* = f^* t^* \tag{1}$$

が成り立つとする. 積分を0から取つたのは, 過渡応答などの初期値問題に用ゐようといふ深謀遠慮である. ここが定常状態を対象とするフーリエ変換と異なつてゐる. (1)式を見るとf^*はあたかもtが0からt^*までのfの平均値の様である.

この式におけるtは表の世界の時間, すなはち**表時間**tであり, t^*は裏の世界の時間, すなはち**裏時間**t^*である. $f(t)$は表の世界における表時間tの函數であり, これに対し, $f^*(t^*)$は裏の世界における裏時間t^*の函數である.

ここで, 表世界と裏世界との間に成り立つべき関係をいくつか挙げよう. まづ

$$1^* = 1 \tag{2}$$

である. これは(1)式のfに1を代入すれば, 左辺がt^*, 右辺が$1^*\,t^*$になることから分かる. すなはち表世界の1は, 裏世界でも1である. 同様にして

$$a^* = a \tag{3}$$

も成り立つ. 定数は裏の世界でも同じ定数である.

次に, この表と裏との対応は線型であるとする. すなはち演算子*は**線型性**が成り立つとする.

$$(af+bg)^* = af^*+bg^* \tag{4}$$

この線型性(4)式と, (2)式より,

$$a^* = (a1)^* = a1^* = a1 = a$$

として, (3)式を証明することもできる.

ここで, (1)式において, $f = dg/dt$とすれば,

$$g^* - g_0^* = \left(\frac{dg}{dt}\right)^* t^* \tag{5}$$

となるが, (4)式より実際には$g_0^*=g_0$である.

そこで(5)式のgを再びfと置き換へて変形すると

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^* = \frac{\Delta f^*}{\Delta t^*} = \frac{f^* - f_0^*}{t^*} \tag{6}$$

となり, **微分商**は**裏**世界では**差分商**となつてゐることがわかる. すなはち積分が(1)式により掛算になつたのに対し, 微分は(6)式により割算になる. ここでも(4)式より実際には$f_0^*=f_0$である.

(2) 基本函數の裏函數

そこで, この(6)式の$f(t)$として, いくつかの函數を試してみよう.

$f(t)=t$のときは, (6)式の左辺も線型になるので, 特に新しい関係は見い出されない. 強いて言へば,

$$(t)^* = t^* \tag{7}$$

が導かれる. この辺はラプラス変換よりも合理的である.

$f(t)=t^2$のときは, (6)式の左辺は$(2t)^*=2\,t^*$であり, 右辺は$(t^2)^*/t^*$であるから, $(t^2)^* = 2\,t^{*2}$となる. 同じく$f(t)=t^3$とすれば, $(t^3)^* = 3!\,t^{*3}$となる. 同様にして

$$(t^n)^* = n!\,t^{*n} \tag{8}$$

が得られる. この式が基本的に重要である.

ここで, 半整数の階乗$n!$として,

$$(-1/2)! = \sqrt{\pi}$$

を暗記しておくのが便利である.

次に, $f(t)=e^t$のときは, (6)式の左辺は$(e^t)^*$であり, 右辺は$[(e^t)^*-1]/t^*$=であるから, 直ちに

$$\left(e^t\right)^* = \frac{1}{1-t^*} \tag{9}$$

が得られる. (9)式は, 左辺の指数函數を級数展開してその各項を(8)式を用ゐて個別に裏世界に導いても得られる. 級数展開の係数の$1/n!$が(8)式によりうまく消える.

(3) 表裏函數対照表

同様にして計算をすれば, Table 1の表裏函數対照表が得られる.

この表は, 指數函數, 三角函數までは造作なく得られるが, 最後の4つの式を求めるのは容易ではない. しかしこれらの式は, 拡散方程式を解くときには必須の公式であるので, これらを表から除く譯にはいかない (これらの式を求めてくれた先人に感謝するのみ. 私は自分では求めてゐないし, おそらく私には無理であらうと思ふ).

この表の特徴は, 対応する表裏の函數の次元が等しいことである. 1は1に, tはt^*に対応してゐる. デルタ函數$\delta(t)$は$1/t^*$に対応してゐる (ラプラス変換では, これが1に対応する). この点は演算子法の長所であらう.

これに対し, 本法の短所は, 表裏が対称でないことである. 対称にするためには裏函數を裏時間t^*の函數ではなくその逆数sの函數としなければならない. すなはち避けてゐるLaplace変換である.

Table 1 表裏函數対照表

$f(t)$	$f^*(t^*)$

Table 1 表裏函数対照表

$f(t)$	$f^*(t^*)$
1	1
t	t^*
t^n	$n!\, t^{*n}$
$\delta(t)$	$1/t^*$
e^t	$\dfrac{1}{1-t^*}$
$e^{-t/\tau}$	$\dfrac{1}{1+t^*/\tau}$
$e^{i\omega t}$	$\dfrac{1}{1-i\omega t^*}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{1}{1+(\omega t^*)^2}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega t^*}{1+(\omega t^*)^2}$
$\mathrm{erfc}\,(\dfrac{x}{\sqrt{4Dt}})$	$\exp\,(-\dfrac{x}{\sqrt{Dt^*}})$
$\dfrac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\,(-\dfrac{x^2}{4Dt})$	$\dfrac{1}{\sqrt{4Dt^*}}\exp\,(-\dfrac{x}{\sqrt{Dt^*}})$
$\dfrac{1}{t}\dfrac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\,(-\dfrac{x^2}{4Dt})$	$\dfrac{1}{t^*}\dfrac{1}{x}\exp\,(-\dfrac{x}{\sqrt{Dt^*}})$
$e^{t/\tau}\,\mathrm{erfc}\,(\sqrt{t/\tau})$	$\dfrac{1}{1+(t^*/\tau)^{1/2}}$

3．簡単な1階常微分方程式

（1）斉次1階常微分方程式

斉次1階常微分方程式の簡単な例として

$dx/dt+2x=0$　　　（初期条件：　$x_0=3$）

を考へてみよう．

これを常法を用ゐて解けば，以下の様になる．すなはち，微分演算子を

$$\hat{p} \equiv \frac{d}{dt}$$

と書けば，この**微分方程式**は，

$(\hat{p}+2)x=0$　　　（初期条件：　$x_0=3$）

となる．したがつてこの微分方程式の**特性方程式**は，

$p+2=0$

である．特性方程式は，微分方程式の1階に対応して，1次であるから，**特性根**は1つしかなく

$p_1=-2$

となる．よつて，**基本解**も1つしかなく

$x_1=e^{-2t}$

である．**一般解** $x(t)$は，基本解の線形結合なので，

$x(t)=c_1x_1=c_1e^{-2t}$

これに初期条件 $x_0=3$ を取り入れれば，**特殊解**

$x(t)=3e^{-2t}$

が得られる．これが初期条件を満たす微分方程式の解である．

これを演算子法で解くと次の様になる．

まづ，元の微分方程式

$dx/dt+2x=0$（初期条件：　$x_0=3$）

の両辺を裏返す（「*」をつける）．すると，

$(dx/dt)^*+2(x)^*=0$

となるが，ここで，表の微分商は裏では差分商になることに気をつけると，

$\Delta x^*/\Delta t^*+2x^*=0$

となる．ここで，$\Delta x^*=x^*-x_0=x^*-3$，および，$\Delta t^*=t^*$ であることに注意すれば，

$(x^*-x_0)/t^*+2x^*=0$

となる．すなはち，表の世界の微分方程式は，裏の世界の代数方程式となつてゐる．

この代数方程式を x^* について解けば直ちに，

$$x^*=\frac{3}{1+2t^*}=(3e^{-2t})^*$$

となる．最後の部分は表裏函数対応表（Table 1）の6行目の式を参考にした．

この両辺の「*」をはずせば，

$x=3e^{-2t}$

を得る．これが，与へられた微分方程式の，初期条件を満たす解である．すなはち特殊解が一挙に簡単に得られる．面倒な部分は表裏函数対応表（Table 1）を参照する部分のみである．

（2）非斉次1階常微分方程式

次に，非斉次1階常微分方程式の簡単な例として

$dx/dt+2x=e^{4t}$　　　（初期条件：　$x_0=3$）

を考へてみよう．先の式とは右辺の**非斉次項** e^{4t} だけが異なつてゐる．

これもまづ常法で解いてみよう．この微分方程式の**斉次一般解** $x_S(t)$は，先に求めた通り

$x_S(t)=c_1x_1=c_1e^{-2t}$

である．

次に，**非斉次特解** x_T を求めなければならない．これは微分方程式

$(\hat{p}+2)x=e^{4t}$

を，未知函数 x を演算子$(\hat{p}+2)$で e^{4t} に変換する式と考へて，e^{4t} に逆演算を行なふことにより非斉次特解 x_T を求める．すなはち，

$x_T=(\hat{p}+2)^{-1}e^{4t}=(4+2)^{-1}e^{4t}=(1/6)e^{4t}$

である．したがつて**非斉次一般解**は，非斉次特解 x_T に，斉次一般解 $x_S(t)$を足して，

$x(t)=x_T+x_S=(1/6)e^{4t}+c_1e^{-2t}$

と求められる．

この一般解に初期条件 $x_0=3$ を取り入れれば，特殊解

$x(t)=(1/6)e^{4t}+(17/6)e^{-2t}$

が得られる．これが初期条件を満たす微分方程式の解である．

これを演算子法で解くと次の様になる．

元の微分方程式

$dx/dt+2x=e^{4t}$

の裏の世界に入る（両辺に「*」をつける）．すると

$\Delta x^*/\Delta t^*+2(x)^*=(e^{4t})^*$

であるが，右辺は表裏函数対応表（Table 1）を参照して，

$(x^*-3)/t^*+2x^*=1/(1-4t^*)$

となる．これを x^* について解けば，

$$x^*=\frac{3}{1+2t^*}+\frac{1}{(1+2t^*)(1-4t^*)}$$

$$=\frac{17}{6}\frac{1}{1+2t^*}+\frac{1}{6}\frac{1}{1-4t^*}$$

$$=(\frac{17}{6}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{4t})^*$$

となる．両辺から「*」をはずして表の世界に戻り，

$$x=\frac{17}{6}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{4t}$$

を得る．これは先に求めた解に等しい．

この様にして，表裏函數対応表（Table 1）さへあれば，これらの初期条件附き常微分方程式が殆ど頭を使はずに樂に解けるのである．

（3）n 階導函数

先に，函數 f の微分商の＊演算に関しては

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^*=\frac{\Delta f^*}{\Delta t^*}=\frac{f^*-f_0^*}{t^*}$$

であることを示したが，この式中の f として，df/dt を代入すれば，

$$\left(\frac{d(df/dt)}{dt}\right)^*=\frac{\Delta[(df/dt)^*]}{\Delta t^*}=\frac{(df/dt)^*-(df/dt)_0^*}{t^*}$$

$$=\frac{((f^*-f_0^*)/t^*-(df/dt)_0^*}{t^*}$$

$$=\frac{f^*}{t^{*2}}-\frac{f_0^*+t^*(df/dt)_0}{t^{*2}}$$

となるので，２階導函数 f' の裏返し f'^* は，

$$f'^*=[f^*-(f_0+f'_0t^*)]/t^{*2}$$

と書くことが出来る．これを同様にして繰り返すと，n 階導函数 $f^{(n)}$ の裏返しは，

$$f^{(n)*}=[f^*-(f_0+f'_0t^*+f'_0t^{*2}+\cdots+f^{(n-1)}{}_0t^{*\,n-1})]/t^{*n} \tag{10}$$

となることがわかる．その際，n 個の初期条件 $f_0, f_0, f''_0, \cdots, f^{(n-1)}{}_0$ が必要である．右辺の分子が f と同じ次元であることに注意しよう．

4．拡散方程式への応用

波動方程式や拡散方程式などの偏微分方程式は，時間 t だけを変数とする常微分方程式と異なり，空間 r と時間 t の両方の変数による偏微分があるので，解くのは一般に極めて面倒である．ところが時間に関して，表時間 t ではなく裏時間 t^* を用ゐれば，時間に関する偏微分は裏時間による割算になるので，偏微分方程式は空間に関する微分だけを含む常微分方程式（空間が１次元に還元できる場合は）になる．これならば解くのは随分樂になる．一般の１次元拡散方程式の解法と，演算子法を使用した例を示さう．

（1）１次元拡散方程式の標準的解法

拡散定数 D における濃度 $c(r,t)$ の拡散は，拡散方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 c=\frac{\partial c}{\partial Dt} \tag{11}$$

で表はされる．ここで，１次元拡散に問題を限定すると，濃度は $c(x,t)$ と，x と t のみの函數となる．さらに，$-a<x<a$ のみを考へ，初期条件 $c(x,0)=c_0$ $(-a<x<a)$，境界条件 $c(a,t)=c(-a,t)=0$ を假定しよう．

まづ**変数分離**を行なふ．

$$c(x,t)=X(x)\,T(t)$$

これを(11)式に代入すると，

$$\frac{\nabla^2 X}{X}=\frac{dT/dDt}{T}=-k^2$$

として，２つの常微分方程式に分離できる．全体を $-k^2$（ただし k は実数）とおいたので，k は**波數**の次元を持つ．

最初に**空間部分**を考へると，

$$(\nabla^2+k^2)X=0 \tag{12}$$

なる常微分方程式が得られるが，現在は１次元系を考へてゐるので，∇^2 は，

$$\nabla^2=\left(\frac{d}{dx}\right)^2$$

である．ちなみに円筒対称系２次元を１次元化した場合は，∇^2 は，

$$\nabla^2=\left(\frac{d}{d\rho}\right)^2+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}$$

である．

ここで，独立変数を無次元化して

$$z=kx$$

とすると，先程の微分方程式は

$$[(d/dz)^2+1]\cos z=0$$

と三角函數 $\cos z$ で表はされる（円筒対称系の場合は円筒函數 $J(z)$ で表はされる）．ただし境界条件より

$$\cos k_n a=0$$

でなければならないので，波數は

$$k_n a=(1/2)(2n-1)\pi$$

と**量子化**される．すなはち，濃度の空間部分は

$$X_n(x)=\cos k_n x$$

である．

この様にして求まった波數 k_n に対応する**時間部分**は，

$$dT_n/dt=-k_n^2 DT_n$$

より，

$$T_n(t)=\exp(-k_n^2 Dt)$$

となる．これは，波數 k_n の大きい濃度分布パターンは，速い**緩和時間**

$$\tau_n(t)=1/k_n^2 D \tag{13}$$

で消え去ることを意味してゐる．

以上で境界条件を満たす**基本解**が求まつたので，次は初期条件を満たす様に，これらの基本解の線型結合を取らなければならない．線形結合の係数は，基本解の直交性を用ゐて求める．

しかしここではこれ以上は立ち入らずに，演算子法を用ゐた例を以下に示さう．

（2）固相表面からの拡散

ある物質Ａの液相中の濃度を $c(x,t)$ とする．$x=0$ に界面があり，その左側（$x<0$）は固相（Ａ濃度一定），右側（$0<x$）は液相（Ａの初期濃度は０）とする．ここで，液相中のＡの濃度 $c(x,t)$ を考へる．

液相には当初（$t<0$）Ａは全く溶けてゐない（初期条件 $c(x,0)=0$）．ところが $t=0$ に，左側の固相表面から物質Ａが急に滲み出し始める．固相には無尽蔵のＡが含まれてゐるので，少々Ａが液相に溶け出したからとて固相自身には何の変化もない．固相に接してゐる面での液相中Ａ濃度は，固相と平衡にあるので，$t>0$ からは，その平衡濃度 c_E に等しい（境界条件 $c(0,t)=c_E$，$c(\infty,t)=0$）．

さて，これで初期条件 $c(x,0)=0$ と境界条件 $c(0,t)=c_E$，$c(\infty,t)=0$ が揃つたので，拡散方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 c=\frac{\partial c}{\partial Dt} \tag{11}$$

を解かう．まづ最初に

$$\lambda^2 = Dt \tag{14}$$

としておく．すると(11)式は

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial(\lambda^2)}$$

となり，λが長さの次元になつて都合がいい．

早速，両辺の「*」を取つて，裏時間の世界に入らう．すると，式中の

t	は	t^*	に，
$c(x, t)$	は	$c^*(x, t^*)$	に，
$\lambda^2 = Dt$	は	$(\lambda^2)^* = (Dt)^* = Dt^*$	に，
偏微分記号∂	は	差分記号Δ	に

変換される．すなはち，

$$\frac{\partial^2 c^*}{\partial x^2} = \frac{\Delta c^*}{\Delta[(\lambda^2)^*]}$$

ここで，

$$(L^*)^2 = (\lambda^2)^* = (Dt)^* = Dt^*$$

とすると（ちなみに，$(\lambda^*)^2 = (\pi Dt)^* = \pi(\lambda^2)^*$，$\lambda^2 = \pi L^2$ である），右辺分子は

$$\Delta c^* = c^* - c_0{}^* = c^* - c_0 = c^* - c(x, 0) = c^*,$$

右辺分母は

$$\Delta(\lambda^2)^* = (\lambda^2)^* = L^{*2}$$

なので，

$$\frac{\partial^2 c^*}{\partial x^2} = \frac{c^* - c_0}{L^{*2}}$$

となる．この式はすでに x に関する常微分方程式であり，解くのはやさしい．初期条件 $c_0 = c(x, 0) = 0$ を代入して，c^*の常微分方程式を以下の様に書く：

$$[\,\hat{p}^2 - (1/L^*)^2]c^* = 0$$

ただし，$\hat{p} = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ である．あとは常微分方程式の定法に従つて以下の様に解く．

まづこの常微分方程式の**特性方程式**は

$$p^2 - (1/L^*)^2 = 0$$

である．**特性根**は $p = \pm 1/L^*$ なので，微分方程式の**基本解**は $c^*{}_1 = \mathrm{e}^{1/L^*}$ と $c^*{}_2 = \mathrm{e}^{-1/L^*}$ である．

この線型結合である一般解を，境界条件 $c^*(0, t^*) = c_{\mathrm{E}}$, $c^*(\infty, t^*) = 0$ に合はせることにより，$c^*(x, t^*)$の**特殊解**が

$$c^*(x, t^*) = c_{\mathrm{E}}\,\mathrm{e}^{-1/L^*}$$

と得られる．

ここで表時間の世界に戻る．右辺の指数函数 e^{-1/L^*}は Table 1 の表裏函數對照表より余誤函数 $\mathrm{erfc}(x/2\lambda)$に戻されることが分かるので，

$$c(x, t) = c_{\mathrm{E}}\,\mathrm{erfc}(x/2\lambda) = c_{\mathrm{E}}\,\mathrm{erfc}(x/\sqrt{4Dt}) \tag{15}$$

と解が求まる．

この様にして拡散方程式の解を得たが，頭を使はざるを得なかつたところは，最後のところの裏の世界から表の世界に戻るところのみである．しかしその部分に関しては表裏函數對照表に全面的に頼つてゐるので，結局，対照表がなければ何も出来ないが，対照表さへあれば殆ど頭を使はずに機械的に拡散方程式が解ける，といふことになる．

ここで，拡散層の厚みδ_Dを求めておかう．

誤差函数 $\mathrm{erf}(x)$の微分は

$$\mathrm{d}\,\mathrm{erf}(x)/\mathrm{d}x = (2/\pi^{1/2})\exp(-x^2) \tag{16}$$

なので，$\mathrm{d}\,\mathrm{erfc}(x/2\lambda)/\mathrm{d}x = -(1/\pi^{1/2}\lambda)\exp[-(x/2\lambda)^2]$である．そこで，界面における濃度勾配を，(15)式より求めると，

$$(\mathrm{d}c/\mathrm{d}x)_{x=0} = -c_{\mathrm{E}}\,(1/\pi^{1/2}\lambda) = -c_{\mathrm{E}}/\delta_D$$

となり，拡散層の厚みδ_Dが

$$\delta_D = \pi^{1/2}\lambda = \sqrt{\pi Dt} \tag{17}$$

と得られる．この結果は皆が暗記してゐる有名な式である．これより流束密度$j(x)$が

$$j(x) = -D\,\mathrm{d}c/\mathrm{d}x = D\,c_{\mathrm{E}}/\delta_D$$

と簡便に求まる．

5．ラプラス変換との関係

ここで，演算子法とラプラス変換との関係を述べておかう．時間 t の函数$f(t)$のラプラス変換 $\mathcal{L}f(s)$とは，

$$\mathcal{L}f(s) = f^*\,t^* \tag{18}$$

のことである．何のことはない，右辺は(1)式と全く同じである．しかし実は左辺のラプラス変換 $\mathcal{L}f(s)$は，函数としては，裏函数$f^*(t^*)$と本質的に異なるものとなつてゐる．なぜなら $\mathcal{L}f(s)$は裏時間 t^*の函数ではなく，

$$s = 1/t^* \tag{19}$$

の函數になつてゐるからである．

いくつか例を挙げてみよう．

$$\mathcal{L}f = f^*\,t^* = f^*/s$$

なので，

$$\mathcal{L}1 = 1^*\,t^* = 1/s$$
$$\mathcal{L}t = t^*\,t^* = 1/s^2$$
$$\mathcal{L}t^n = (t^n)^*\,t^* = (n!\,t^{*n})/s = n!\,/s^{n+1}$$
$$\mathcal{L}\mathrm{e}^t = (\mathrm{e}^t)^*\,t^* = t^*/(1 - t^*) = 1/(s - 1)$$
$$\mathcal{L}\mathrm{e}^{-t/\tau} = (\mathrm{e}^{-t/\tau})^*\,t^* = t^*/(1 + t^*/\tau) = 1/(s + \tau)$$
$$\mathcal{L}\mathrm{e}^{i\omega t} = (\mathrm{e}^{i\omega t})^*\,t^* = t^*/(1 - i\omega t^*) = 1/(s - i\omega)$$
$$\mathcal{L}\cos\omega t = s/(s^2 + \omega^2)$$
$$\mathcal{L}\sin\omega t = \omega/(s^2 + \omega^2)$$
$$\mathcal{L}\delta(t) = 1$$

などが成り立つ．ラプラス変換を積分で定義しなくてよいところが特徴である．

6．おはりに

この様に書いてくると段々嫌気がさして來て，やはり長いものには巻かれろ，といふ気になつて來るのである．何も今さら大勢に逆らふ必要はないではないか．ラプラス変換で十分ではないか．工學システムや傳達函數もそれでうまくいくではないか，なぜ余計なことを考へるのか，と思つて來ると，こんなことを考へる時間があつたら，もつと他のことでも考へた方がよいのではないかと思へて來るのである．