ラプラス演算子とヘルムホルツ方程式

Laplacian and Helmholtz equation

三浦明香子，前田育子，會川義寛

Sayaka MIURA, Ikuko MAEDA, Yoshihiro AIKAWA

(お茶の水女子大学)

1．はじめに

物理学や工学においてはラプラシアン∇^2の入つたHelmholtzの微分方程式

$$(\nabla^2 + k^2) f(\boldsymbol{r}) = 0 \quad (1)$$

を解くことが多い．その場合，設定された境界条件の対称性に従つてそれぞれデカルト座標系や円筒座標系，球座標系を用ゐて(1)式を解くと便利である．

本稿ではこれらの解法の基礎を解説する．

2．ラプラシアンの表現

ラプラシアン∇^2は，デカルト座標系，円筒座標系，球座標系を用ゐてそれぞれ(2)，(3)，(4)式の様に表はされる．すなはち

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2$$

$$\equiv \nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2 \quad (2)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \left(\frac{\partial}{\rho\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2$$

$$\equiv \nabla_\rho{}^2 + (\hat{M}/\rho)^2 + (\partial/\partial z)^2 \quad (3)$$

$$\nabla_\rho^2 \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\frac{\partial}{\partial \rho}$$

$$\hat{M}^2 \equiv (\partial/\partial\varphi)^2$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{r\partial\theta}\rho\frac{\partial}{r\partial\theta} + \left(\frac{\partial}{\rho\partial\varphi}\right)^2$$

$$\equiv \nabla_r{}^2 + (\hat{\Omega}/r)^2 \quad (4)$$

$$\nabla_r^2 \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\hat{\Omega}^2 \equiv \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 (\hat{O}^2 + \hat{M}^2)$$

$$\hat{O}^2 \equiv \left(\rho\frac{\partial}{r\partial\theta}\right)^2$$

となる．ただしここで，ρはz軸からの距離，rは原点からの距離である．

3．変数分離による常微分方程式化

(1)式における$f(\boldsymbol{r})$が，その対称性により

$$f(\boldsymbol{r}) \equiv f(z) = Z(z)$$

$$f(\boldsymbol{r}) \equiv f(\rho, \varphi) = P(\rho)\,\Phi(\varphi)$$

$$f(\boldsymbol{r}) \equiv f(r, \theta, \varphi) = R(r)\,Y(\theta, \varphi) \quad (5)$$

と表はせる場合を考へる．すると(2)，(3)，(4)式はそれぞれ

$$\nabla^2 = \nabla_z{}^2$$

$$\nabla^2 = \nabla_\rho{}^2 + (\hat{M}/\rho)^2$$

$$\nabla^2 = \nabla_r{}^2 + (\hat{\Omega}/r)^2 \quad (6)$$

と簡単になる．

第1項は長さに関する項である．ここでは(6)式における3つの長さはそれぞれz, ρ, rであり，

$$z = r\cos\theta = z$$

$$\rho = r\sin\theta = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (7)$$

の関係にある．

(6)式の第2項は角度に関する項である．$\hat{M}$は方位角φに関する偏微分を含み，$\hat{\Omega}$はさらに天頂角θに関する偏微分を含む．いづれも長さρ，rの自乗で割つてあるのは，∇^2の長さの逆自乗の次元に対応してゐるからである．

(5)式をHelmholtz微分方程式(1)式に代入して両辺をfで割ればそれぞれ

$$\frac{\nabla_z^2 Z}{Z} + k^2 = 0$$

$$\frac{\nabla_\rho^2 P}{P}+\frac{(\hat{M}/\rho)^2\Phi}{\Phi}+k^2=0$$

$$\frac{\nabla_r^2 R}{R}+\frac{(\hat{\Omega}/r)^2 Y}{Y}+k^2=0$$

となり，最初の式から直ちに，長さ z に関する常微分方程式

$$(\nabla_z^2+k^2)\,Z(z)=0 \tag{8}$$

が得られる．

2つ目の式は両辺に ρ^2 をかけると

$$\rho^2\frac{\nabla_\rho^2 P}{P}+(k\rho)^2+\frac{\hat{M}^2\Phi}{\Phi}=0$$

となるので，この式の左辺第3項は定数でなければならない．これを $-m^2$ とすれば，方位角 φ に関する常微分方程式

$$(\hat{M}^2+m^2)\Phi(\varphi)=0 \tag{9}$$

が得られる．これよりさらに，長さ ρ に関する常微分方程式

$$\left(\nabla_\rho^2-(m/\rho)^2+k^2\right)P(\rho)=0 \tag{10}$$

も得られる．

3つ目の式も両辺に r^2 をかけると

$$r^2\frac{\nabla_r^2 R}{R}+(kr)^2+\frac{\hat{\Omega}^2 Y}{Y}=0$$

となるので，第3項を $-l\,(l+1)$ なる定数とすれば，角度（天頂角 θ，方位角 φ）に関する常微分方程式

$$(\hat{\Omega}^2+l(l+1))\,Y(\theta,\varphi)=0 \tag{11}$$

が得られる．これよりさらに，長さ r に関する常微分方程式

$$\left(\nabla_r^2-\left(\frac{l(l+1)}{r^2}\right)+k^2\right)R(r)=0 \tag{12}$$

が得られる．

4．境界条件と特殊函数

（1）デカルト座標系

1変数2階常微分方程式(8)式における直線の境界条件を $Z(\pm a)=0$ としよう．ここで $x\equiv kz$ と無次元化すれば，(8)式は（z に関して $Z(z)$ が対称であれば）

$$\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^2+k^2\right)\cos x_n=0 \tag{13}$$

と表はされる．ただし x_n は $\cos(x_n)=0$ となる余弦函数の零点，$x_n=k_n a\equiv(n-1/2)\pi$ であり，k_n は量子化される．これより

$$Z_n(z)=\frac{1}{\sqrt{a}}\cos k_n z \tag{14}$$

と解が求まる．直交化条件は

$$\int_{z=-a}^{a} Z_n(z)Z_m(z)dz=\delta_{nm}$$

である．

（2）円筒座標系

1変数2階常微分方程式(9)式においては方位角の境界条件 $\varphi(0)=\varphi(2\pi)$ を用ゐる．すると直ちに

$$\Phi_m(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi} \tag{15}$$

が得られる（ただし m は整数）．直交化条件は

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\Phi_{m_1}{}^*(\varphi)\Phi_{m_2}(\varphi)d\varphi=\delta_{m_1 m_2}$$

である．

次に(10)式における円の境界条件を $P(a)=0$ としよう．ここで $x\equiv k\rho$ と無次元化すれば

$$\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^2+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}-\left(\frac{m}{x}\right)^2+1\right)J_m(x)=0 \tag{16}$$

となり，この $J_m(x)$ は m 次の Bessel 函数であり，そのうち J_0 と J_1 は

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}x^{2n}$$

$$J_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2(n+1)(2^n n!)^2}x^{2n+1} \tag{17}$$

であり，(14)式の解

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \tag{18}$$

にそれぞれ対応してゐる．

ここで $J_0(x)=0$ となる $x_n\approx(n-1/2)\pi$ を Bessel 函数の零点とすれば，境界条件より $k_n a=x_n$ でなければならず，k_n は量子化される．これより

$$P_n(\rho)=J_0(k_n\rho) \tag{19}$$

と解が求まる．直交化条件は

$$\int_{\rho=0}^{a} J_0(k_m\rho)J_0(k_n\rho)\frac{2\pi\rho d\rho}{\pi a^2}=\delta_{mn}J_1^2(k_m\rho)$$

である．

（3）球座標系

2変数2階偏微分方程式(11)式において，$Y(\theta,\varphi)$を変数分離して

$$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi) \tag{20}$$

とする．すると(11)式は

$$\frac{\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)^2\Theta}{\Theta}+\frac{\left(\frac{\hat{M}}{\sin\theta}\right)^2\Phi}{\Phi}+l(l+1)=0$$

となるが，左辺第2項は(9)式と同様にして $-m^2$ となるので，その結果，1変数2階の常微分方程式

$$\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)^2-\left(\frac{m}{\sin\theta}\right)^2+l(l+1)\right)\Theta(\theta)=0 \tag{21}$$

が得られる．

ここで $z\equiv\cos\theta$とすると(21)式は

$$\left(\frac{d}{dz}\left(1-z^2\right)\frac{d}{dz}-\frac{m^2}{1-z^2}+l(l+1)\right)P_l^m(z)=0 \tag{22}$$

となるが，ここの $P_l^m(z)$は l 次 m 階の Legendre 函数である．$m=0$ の場合，すなはち $P_l(z)\equiv P_l^0(z)$ を単に l 次の Legendre 函数といふが，これは

$$P_l(z)=\frac{1}{2^l i!}\left(\frac{d}{dz}\right)^l\left(z^2-1\right)^l \tag{23}$$

であり，

$$P_0(z)=1$$

$$P_1(z)=z$$

$$P_2(z)=\frac{1}{3}(2z^2-1)$$

の n 次多項式となる．また $P_l^m(z)$は

$$P_l^m(z)=\sin^m\theta\left(\frac{d}{dz}\right)^m P_l(z) \tag{24}$$

となる．$P_l(z)$，$P_l^m(z)$の直交条件はそれぞれ

$$\int_{z=-1}^{1}P_{l_1}(z)P_{l_2}(z)dz=\delta_{l_1l_2}\frac{2}{2l+1}$$

$$\int_{z=-1}^{1}P_{l_1}^{m_1}(z)P_{l_2}^{m_2}(z)dz=\delta_{l_1l_2}\delta_{m_1m_2}\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

である．

次に(12)式における球の境界条件を $R(a)=0$ としよう．ここで上述と同じく $x\equiv kr$ と無次元化しようと思ふが，その前にひとまづ球対称の場合，すなはち $l=0$ の場合を考へてみよう．すると(8)式は

$$\left(\nabla_r^2+k^2\right)R(r)=0$$

となるが，$\nabla_r^2=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 r$ であることに注意すると

$$\left(\left(\frac{d}{dr}\right)^2+k^2\right)rR(r)=0$$

となり，これは1次元問題(12)式と同じである．

次に，$k=0$ の場合，すなはち Laplace 方程式 $\nabla^2 f=0$ の場合を考へてみよう．すると(12)式は

$$\left(\nabla_r^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R(r)=0$$

となるがこれは直ちに

$$\left(\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr}-l(l+1)\right)R(r)=0 \tag{25}$$

と書き直せて，この解は見た瞬間に（言はれてみれば）

$$R(r)=r^l \tag{26}$$

となることがわかる．すなはち，(11)式において $\hat{\Omega}^2$ の固有値として$-l(l+1)$を導入したのは，(12)式からの Laplace 方程式

$$\nabla^2R(r)=\left(\nabla_r^2-\left(\frac{l(l+1)}{r^2}\right)\right)R(r)=0$$

の解を $R(r)=r^l$ にするための方便であつたことがわかる．

5．拡散方程式と波動方程式への応用

（1）拡散方程式

拡散方程式は，空間に関しては２階の，時間に関しては１階の偏微分方程式

$$\nabla^2 c = \frac{\partial c}{\partial Dt} \tag{27}$$

で表はされる．ここで，D は拡散定数である．

濃度 $c(\boldsymbol{r}, t)$を空間部 $F(\boldsymbol{r})$と時間部 $T(t)$とに

$c(\boldsymbol{r}, t) = F(\boldsymbol{r})\,T(t)$

と変数分離すれば

$$\frac{\nabla^2 F}{F} = \frac{\dfrac{dT}{dDt}}{T} = -k^2$$

とおいて，２つの微分方程式

$$(\nabla^2 + k_n^2)F_n(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{28}$$

$$\left(\frac{d}{dDt} + k_n^2\right) T_n(t) = 0 \tag{29}$$

が得られる．(28)式は Helmholtz 方程式そのものであり，その解 $F_n(\boldsymbol{r})$は前節までに求めたものであり，k は境界条件により k_n と量子化されてゐる．(29)式の解は

$$T_n(t) = e^{-k_n^2 Dt}$$

と求まり，やはり量子数 n が入り，濃度も

$$c_n(\boldsymbol{r}, t) = F_n(\boldsymbol{r})\, e^{-k_n^2 Dt} \tag{30}$$

と表はされ，波数 k_n の濃度波は緩和時間 $\tau = 1/(k_n^2 D)$で消滅することを意味してゐる．

（2）波動方程式

波動方程式は空間，時間ともに２階の偏微分方程式

$$\nabla^2 \psi = \left(\frac{\partial}{\partial ct}\right)^2 \psi \tag{31}$$

で表はされる．ここで c は波の速度である．

波動 $\psi(\boldsymbol{r}, t)$を空間部 $F(\boldsymbol{r})$と時間部 $T(t)$とに

$\psi(\boldsymbol{r}, t) = F(\boldsymbol{r})\,T(t)$

と変数分離すれば

$$\frac{\nabla^2 F}{F} = \frac{\dfrac{d^2 T}{c^2 dt^2}}{T} = -k^2$$

とおいて，２つの微分方程式

$$(\nabla^2 + k_n^2)F_n(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{32}$$

$$\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + (ck_n)^2\right) T_n(t) = 0 \tag{33}$$

が得られる．(32)式は拡散方程式の空間部(28)式と同じ Helmholtz 方程式である．(33)式の解は $\omega_n \equiv ck_n$ とすれば

$$T_n(t) = e^{-i\omega_n t}$$

と求まり，やはり量子数 n が入り，波も

$$\psi_n(\boldsymbol{r}, t) = F_n(\boldsymbol{r})\, e^{-i\omega_n t} \tag{34}$$

と表はされ，波数 k_n の波は振動数 ω_n で振動することを意味してゐる．

6．おわりに

Helmholtz 方程式は Laplace 方程式や Poisson 方程式とともに工学，物理学において頻出する微分方程式である．その際，境界条件の対称性に基づき，ラプラシアン ∇^2 を円筒座標や球座標で表はすことが必要になる．そしてこれより，三角函数，円筒（Bessel）函数，Legendre 函数などの工学に必須の特殊函数が自然に導出される．これらの知識は量子力学を学ぶためにも必須である．

参考文献

１．アラマノヴィッチ「数理物理学入門」東京図書．1966.

２．堀淳一「物理数学１，２」共立出版．1970.

３．ファーロウ「偏微分方程式」朝倉書店．1982.

４．J. Crank, "*The Mathematics of Diffusion*, 2nd ed.", Clarendon Press, 1975.

５．H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, "Conduction of Heat in Solids, 2nd ed.", Oxford Science Publications, 1959.