標本とその性質
Sample and its character

大久保淳子，池田寛子，會澤重勝*，大瀧雅寛，太田祐治，會川義寛
Junko OKUBO, Hiroko IKEDA, Shigekatsu AIZAWA, Masahiro OTAKI, Yuji OHTA, Yoshihiro AIKAWA
（お茶の水女子大学ライフサイエンス専攻，東京衛生学園基礎医科学研究部*）

1．はじめに

すべての対象 objectは様々な属性propertyを持ち，その属性の中のある値 value を取る．たとへば机ならば高さや色，重さなどの属性を持ち，それぞれその値，たとへば 80 cm，茶色，10 kg などを取る．人間ならば体重や身長，性別や年齢などの属性を持ち，それぞれ 60 kg，165 cm，女，41 歳などの値を取るなどである．

いま，ある対象（たとへば人間）の集団を考へ，この対象（人間）の持つひとつの属性 X（たとへば身長）に着目する．この対象集団が属性 X のある値 x を取る確率 $g(x)$が分かつてゐるとき，この対象集団を確率空間といひ，この属性 X（またはその値 x）を確率変数 random variable といふ．確率空間全体にわたる確率は1なので，

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1 \tag{1}$$

である．また確率は正または 0 の値しか取らないので，$g(x) \geq 0$ である．

本稿ではこの確率空間の持つ性質，ならびにこの確率空間から抽出した標本の集合である標本空間の基本的な性質について解説する．

2．確率変数と期待値

（1）確率変数とその函数

確率空間においては，確率変数xに関する確率$g(x)$が定義されてゐる（正確には，確率密度 probability distribution，または確率密度函数といふ）．この場合，確率変数xの函数を$f(x)$とすれば，

$$g(x)\ dx = g/f'\ df$$

となるので，この $f(x)$をあらたな確率変数，そして g/f' をあらたな確率密度と考へることができる．すなはち確率変数 x の函数はすべて確率変数となることができる．

（2）期待値と平均

確率変数xの函数$f(x)$の期待値 expected value を，xの確率密度 $g(x)$を用ゐて

$$<f> = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \tag{2}$$

と表はす．x 自身も当然 x の函数のひとつであるから，xの期待値$<x>$は(2)式より

$$<x> = \int_{-\infty}^{\infty} x\,g(x)dx \tag{3}$$

となる．これを特に平均 mean といひ，μ で表はす．すなはち

$$\mu \equiv <x> \tag{4}$$

である．また，(2)式より直ちに

$$<ax^2+bx+c> = a<x^2>+b<x>+c \tag{5}$$

が成り立つことが分かる（Appendix 1）．すなはち演算子$<\ \ >$は分配則 distribution law が成り立つ．

（3）分散と標準偏差

平均μ からのずれ $x-<x>$ の自乗 $(x-<x>)^2$ の期待値を分散 variance といひ，σ^2で表はす（Appendix 2）．

$$\sigma^2 \equiv <(x-<x>)^2> = <x^2>-<x>^2 \tag{6}$$

このσ^2 の平方根σは x と同じ次元となり，これを標準偏差 standard deviation Δx といふ．すなはち

$$\Delta x \equiv \sigma = \sqrt{<(x-<x>)^2>} \tag{7}$$

である．定数bの標準偏差は$\Delta b = 0$なので，これより直ちに，

$$\Delta(ax+b) = a\Delta x + \Delta b = a\Delta x$$

や（ただし a >0 とする），

$$\Delta(ax^2+b) = a\Delta(x^2) + \Delta b = a\Delta(x^2)$$

が成り立ち，一般に，x の函数 $f(x)$と定数 b との和の標準偏差は

$$\Delta[\,af(x)+b\,]=a\Delta f(x) \tag{8}$$

となつて（Appendix 3），Δに関する分配則が成り立つ様に見えるが，しかし，２つの x の函數の和，たとへば

$$\Delta(x^2+x)\neq\Delta(x^2)+\Delta(x)$$

は分配できず（Appendix 4），一般に

$$\Delta[f(x)+h(x)]\neq\Delta f(x)+\Delta h(x) \tag{9}$$

となり，演算子Δに関する分配則は成り立たない．

（４）能率と母函數

平均μ からのずれ $x-<x>$ の n 乘 $(x-<x>)^n$ の期待値を n 次の能率 moment といひ，m_n で表はす．

$$m_n\equiv<(x-<x>)^n>$$
$$=\sum_{n_1=0}^{n}(-1)^{n_1}\frac{n!}{n_1!n_2!}<x^{n_1}><x^{n_2}> \tag{10}$$

ここで $n_1+n_2=n$ である．定義より，２次の能率 m_2 は分散σ^2そのものである．すなはち

$$m_0=1, m_1=0, m_2=\sigma^2$$

となる（Appendix 5）．また，s をパラメータとしたときの e^{sx} の期待値$<e^{sx}>$ を，s の函數 $M(s)$と見立てたとき，これを能率の**母函數** generating function といふ．

$$M(s)\equiv<e^{sx}> \tag{11}$$

すると，指數の級數展開と期待値演算の分配則とを用ゐて(11)式右辺は

$$1+<x>s+\frac{<x^2>}{2!}s^2+\cdots+\frac{<x^n>}{n!}s^n+\cdots$$

となるが，これと $M(s)$の直接の Tayler 展開とを照らし合はせれば，

$$<x^n>=M_0^{(n)} \tag{12}$$

が得られる．これを(10)式右辺に用ゐて，各次の能率を簡便に求めることができる．

また，

$$g_n\equiv m_n/\sigma^n \tag{13}$$

と定義したとき，

$$g_0=1, g_1=0, g_2=1$$

であるが，g_3 と g_4 はそれぞれ歪度 skewness，尖度 kurtosis といひ，確率 $g(x)$の分布形状を表はしてゐる．尖度 g_4=3 を正規尖度といひ分布の尖り具合の基準とする．これより尖度の大きいものを峻尖，小さいものを緩尖といふ．

３．二変数の確率

（１）同時確率密度函數

これまでは対象の属性を X１つだけしか考へなかつた．ここで２つの属性 X と Y とを同時に考へる．たとへばある人の体重 X と身長 Y といふ２つの属性を考へてみよう．この場合は２つの属性の次元が異なつてゐる．もしある人の上半身の長さ X と下半身の長さ Y を２つの属性として選べば，この場合の X と Y は長さといふ同じ次元であり，かつその和は身長 Z に等しい．

属性 X と Y の値をx, yとし，この値 (x, y)を取る確率密度を$p(x, y)$としよう．すると，属性 X だけを考へたときの確率密度 $g(x)$は $p(x, y)$を用ゐて

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy \tag{14}$$

と表はされる．同様に属性 Y だけを考へたときの確率密度 $h(y)$は

$$h(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dx \tag{15}$$

である．勿論

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}h(y)dy=1 \tag{16}$$

である．

すると，たとへば$x+y$ の期待値$<x+y>$は，

$$<x+y>=<x>+<y> \tag{17}$$

となり（Appendix 6），(5)式と同様に演算子$<\ \ >$に関する分配則が成り立つ．

(17)式左右両辺の期待値演算子$<\ \ >$は，左辺は確率密度 $p(x, y)$ を用ゐての平均，右辺第一項，第二項はそれぞれ確率密度 $g(x)$，$h(y)$ を用ゐての平均であるから，一見同じ記号$<\ \ >$を用ゐることは間違ひの様に見えるが，実際にはみな確率密度 $p(x, y)$を用ゐた平均に過ぎない．すなはち，確率密度 $p(x, y)$を用ゐて x, y 両空間に関して積分したところ一方の空間に関しては定数だつたために $g(x)$，$h(y)$を使つての計算が可能になつたものである．

先に，上半身の長さ X と下半身の長さ Y との和

が身長 Z に等しいと言つたが，上の式は，身長の平均は上半身の長さの平均と下半身の長さの平均に等しいことを示してゐる．

（2）相関

ここで x と y の相関 correlation を r_{xy} で表はし，以下の式

$$\sigma_{xy}=\Delta x\,\Delta y\,r_{xy} \tag{18}$$

で定義する．この式の左辺 σ_{xy} は x と y との共分散 covarience といひ，

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &\equiv \langle (x-\langle x\rangle)(y-\langle y\rangle)\rangle \\ &= \langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle\end{aligned} \tag{19}$$

と定義するが，これは積の平均と平均の積との差に等しい（Appendix 7）．(18)式右辺の Δx，Δy はそれぞれ x と y の標準偏差であるが，これも先ほどと同じく，演算子 Δ の意味が両者で異なる様に見えるが，本来の2次元演算 Δ が偶々それぞれの x または y の1次元演算 Δ に還元できたものと考へれば，納得がいく．

(18)式は2つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=ab\cos\theta \tag{20}$$

と同じ形をしてをり，標準偏差はベクトルの長さ，共分散はベクトルの内積に対応し，相関はベクトルの重なり $\cos\theta$ に対応してゐる．

さて，先の $x+y$ の和の期待値 $\langle x+y\rangle=\langle x\rangle+\langle y\rangle$ は各期待値の和となり，期待値演算に関する分配則が成り立つたが，標準偏差 $\Delta(x+y)$ に関しては果たして同じく分配則が成り立つのであらうか？

(18)式と(20)式との対応を考へれば，標準偏差 $\Delta(x+y)$ はベクトル $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ の絶対値 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ に相当する．すると

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}$$

なので，同様に，簡単な計算により

$$\Delta(x+y)=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+2\Delta x\Delta y\,r_{xy}} \tag{21}$$

が得られる（Appendix 8）．すなはち標準偏差演算に関する分配則は $r_{xy}=1$ のときしか成り立たない．

相関 $r_{xy}=0$ のとき，x と y は互ひに独立 independent であるといふ．これは上のベクトルの譬へで言へば，2つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが直交 orthogonal してゐることに対応する．このときは，(18)式より

$$\langle xy\rangle=\langle x\rangle\langle y\rangle \tag{22}$$

が成り立ち（Appendix 9），積の期待値は各期待値の積となる．また，このときに限り2次元確率密度函数 $p(x,y)$ は1次元確率密度函数 $g(x)$ と $h(y)$ との積

$$p(x,y)=g(x)\,h(y) \tag{23}$$

として表はされる（Appendix 10）．さらに(22)式より

$$\Delta(x+y)=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \tag{24}$$

となり，**Pythagoras** の定理が成り立つ．

また，$x+y$ の和に関する母函数を $M_{x+y}(s)$ とし，x，y それぞれに関する母函数を $M_x(s)$，$M_y(s)$ とすれば，これも x と y とが互ひに独立であれば，(22)，(23)式より

$$M_{x+y}(s)=M_x(s)\,M_y(s) \tag{25}$$

となり（Appendix 11），和の母函数は母函数の積となる．

以上，x と y とが互ひに独立であれば，(22)，(23)，(24)，(25)の一連の式が成り立つ．

4．正規分布

（1）正規分布函数

Gauss 型函数 $\exp(-x^2)$ や Lorenz 型函数 $1/(x^2+1)$（これを π で割つたものを Cauchy 分布といふ）は，原点で値1を取り，左右対称に小さくなつて0に近づくピーク函数である．この幅を小さくしてかつピークを高くすれば δ 函数になる．この中で Gauss 型函数はそのフーリエ変換もまた Gauss 型となり，変換に関して対称なので特に重要である．確率密度函数 $g(x)$ もこの Gauss 型の形状を取ることが多い．

この Gauss 型函数の積分に関しては以下の公式が成り立つ（Appendix 12, 13）．すなはち

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi} \tag{26}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}/2 \tag{27}$$

である．いま確率密度函数 $g(x)$ をこの Gauss 型とし，パラメータ a と b とを使つて

$$g(x)=\frac{1}{a}e^{-(x/b)^2}$$

と表はし，その全積分，標準偏差ともに 1 となる様にパラメータを合はせれば，(25), (26)式を用ゐて，$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2\pi}$ が得られる．すなはち

$$g(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \tag{28}$$

である．これを標準正規分布函数 standard normal distribution function といふ．これを，平均μ，標準偏差σとなる様にすれば

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{29}$$

となる．これを正規分布函数 normal distribution function といふ．(28)式から(29)式へは

$$z\equiv(x-\mu)/\sigma \tag{30}$$

の変換を行なつたことを意味する．この操作を標準化 standardization，または z 変換 z-transformation といふ．

（2）正規分布の能率

正規分布の n 次の能率 m_n は(10)式に代入して

$$m_n=\frac{(\sqrt{2}\sigma)^n}{\sqrt{\pi}}I_n$$

と計算できる．ここでI_nは

$$I_n\equiv\int_{-\infty}^{\infty}x^n e^{-x^2}dx=\frac{n-1}{2}I_{n-2} \tag{31}$$

である（Appendix 14）．I_n は n が奇数ならば(31)式の積分において 0 となるので，n を偶数 $n=2k$ として計算すれば（Appendix 15），

$$m_n=\sigma^n\,1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdot\quad\cdots(n-1) \tag{32}$$

となる．よつて

$$m_2=\sigma^2,\ \ m_4=3\sigma^4$$

となり，正規分布の尖度g_4は，$g_4=m_4/\sigma^4=3$ となる．これを正規尖度といふ．正規尖度よりも大きい尖度が峻尖，小さい尖度が緩尖である．σ が小さくなると幅が狭くなりピークが高くなるが，峻尖になるわけではない．逆にσ が大きくなつて幅が拡がりピークが低くなつても，緩尖になるわけではないことに注意しよう．

（3）正規分布の母函数

正規分布の母函数は(11)式より

$$M(s)\equiv\ <e^{sx}>\ =\ e^{\frac{\sigma^2}{2}s^2+\mu s} \tag{33}$$

が得られる（Appendix 16）．これと(12)式とから

$$m_4=\ <x^4>\ =M_0^{(4)}=3\sigma^4$$

となり，さきに求めた値に一致する．

5．標本の統計量と点推定

ある属性値 x に関する確率が定義されてゐる対象集団から，1つの対象を抽出する場合を考へる．この抽出した対象を標本 sample といひ，この抽出過程を標本抽出といふ．これに対しもとの対象集団を母集団 population といふ．

抽出した標本の属性値が x_1 だつたとしよう．この x_1 の値を持つ対象が選択されたに当つては母集団の確率が反映されてゐるはずである．ここで値 x_1 を記録しておく．そしてこの対象を母集団に一旦返す．したがつて母集団は最初の状態に戻り，その確率空間に変化はない（もし母集団の大きさが十分に大きければ，標本抽出は母集団に殆ど影響を与へないので，この返還操作をしなくてもよい）．次にまた1個の対象を抽出する．この対象が持つ属性値がx_2であつたとする．そしてこの対象も母集団に返す．これを繰り返して n 個の値 $x_1, x_2, x_3, , , , x_n$ を得る．これを大きさ n の標本空間といふ．母集団は確率が定義されてゐる確率空間であつたが，そこから抽出して得た標本からなる標本空間はすでにその個々の対象が確定してゐるので確率的性質はなくなつてをりもはや確率空間ではない．確率的性質は標本を母集団から抽出する過程にあつたのである．

標本空間は母集団から得るものであるから何らかの意味で母集団の性質を反映してゐるはずである．以下これについて軽く考へてみたい．

（1）標本平均

【標本平均の期待値】

大きさ n の標本空間 $x_1, x_2, x_3, , , , x_n$ の平均 $\bar{x}$ を

$$\bar{x}\equiv(1/n)\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{34}$$

と定義する．

ところが，母集団から標本を抽出する仕方はひと

つではない．たまたまある確率のもとにその標本が選ばれたに過ぎない．したがつて(34)式で定義される平均$\bar{x}$も選ばれた標本によつて変化する．どの標本が選ばれるかは確率過程であり，それは母集団の確率分布を反映する．したがつて標本平均の期待値$<\bar{x}>$を考へることができる．これを求めてみよう．

(34)式より

$$<\bar{x}> = <(1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i> = (1/n)\sum_{i=1}^{n} <x_i>$$

$$= (1/n)\sum_{i=1}^{n} \mu = \mu \qquad (35)$$

となり，標本平均の期待値は母集団の平均となる．ここで和の期待値は期待値の和であるといふ期待値演算の分配則(5)式と(4)式とを使つた．

(35)式の結果より，母集団の平均μの推定値として標本平均$\bar{x}$が使へることがわかる．

【標本平均の標準偏差】

次にこの標本平均$\bar{x}$の標準偏差$\Delta\bar{x}$を求めてみよう．(34)式と Pythagoras の定理(24)式，および(7)式より

$$\Delta\bar{x} = \Delta(1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i = (1/n)\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}$$

$$= (1/n)\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2} = \sigma/\sqrt{n} \qquad (36)$$

が得られる．標本平均$\bar{x}$の揺動$\Delta\bar{x}$は母集団の標準偏差σには等しくなく，標本が大きくなるにつれて0に近づくことがわかる．

【標本平均の分布】

標本平均$\bar{x}$はどの様な確率密度函数で分布をしてゐるのであらうか？　その分布の確率密度函数の少なくとも平均$<\bar{x}>$と標準偏差$\Delta\bar{x}$は上記ですでに求めた．ここで証明はしないが，標本平均$\bar{x}$の分布は（標本の大きさ n が十分に大きければ），母集団の確率密度函数がどんな函数であれ，たとへ正規分布函数で全くなくても，標本平均となれば，正規分布（平均$<\bar{x}>=\mu$，標準偏差$\Delta\bar{x}=\sigma/\sqrt{n}$）を取ることがわかつてゐる．これを中心極限定理 central limit theorem といふ．

【標本平均の母函数】

標本平均$\bar{x}$の母函数$M_{\bar{x}}(s)$を求めてみよう．まづ，標本$x_1, x_2, x_3, , , , x_n$は互ひに独立であることを念頭におくことと，各 x_i の背後にある確率空間は同一のものであることに注意しよう．すると，標本平均の定義と(25)式とから

$$M_{\bar{x}}(s) = <e^{s\bar{x}}> = <e^{s\frac{x}{n}}>^n = [M_{\frac{x}{n}}(s)]^n \qquad (37)$$

となる．

もしここで母集団の x に関する確率分布が平均μ，標準偏差σ の正規分布だつたとしたら，(33)式より

$$M_{\frac{x}{n}}(s) = \exp[\frac{(\sigma/n)^2}{2}s^2 + (\mu/n)s]$$

なので，$M_{\bar{x}}(s)$は

$$M_{\bar{x}}(s) = \exp[\frac{(\sigma/\sqrt{n})^2}{2}s^2 + \mu s] \qquad (38)$$

となる．この式は，標本平均が，平均μ，標準偏差$\sigma/\sqrt{n}$ の正規分布を取ることを意味してゐる．すなはち先に示した(35)式，(36)式の結果と一致してをり，さらに，分布が正規分布であることまでも示してゐる．この結果は母集団の確率分布が正規分布であることを使つて導出したが，実際には母集団がどの様な分布を取らうとも成り立つ．これは上に示した中心極限定理である．すなはちここにてこの中心極限定理の一端を証明した．

（２）標本分散

【標本分散の期待値】

大きさ n の標本空間$x_1, x_2, x_3, , , , x_n$の分散s^2を

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \qquad (39)$$

と定義する．分散は本来，平均μの周りの分散であるべきであり，たかが一標本の平均$\bar{x}$などの周りの分散であつてはならないはずである．しかし母集団の平均μは未知といふか不明である．やむを得ずその代替として標本の平均$\bar{x}$を用ゐたのである．なぜなら(35)式より標本平均$\bar{x}$は母平均μの推定値とし

て使へることがわかつてゐるからである．しかしながらこの代替は勿論正しいものではない．そこでこの代替の補正として(39)式の分母を本来の n ではなく n−1 と置き換へたのである．この補正が適切であつたかどうかは，(39)式で定義される標本分散の期待値が母分散に等しくなるかどうかを見ればよい．

それでは，(39)式で定義した標本分散 s^2 の期待値を求めてみよう．(39)式の期待値を取れば

$$
\begin{aligned}
\langle s^2 \rangle &= \left\langle \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1} \right\rangle \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \langle (x_i-\bar{x})^2 \rangle \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \langle [(x_i-\mu)-(\bar{x}-\mu)]^2 \rangle \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \langle (x_i-\mu)^2+(\bar{x}-\mu)^2 \\
&\qquad -2(x_i-\mu)(\bar{x}-\mu) \rangle \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} [\langle (x_i-\mu)^2 \rangle + \langle (\bar{x}-\mu)^2 \rangle \\
&\qquad -2\langle (x_i-\mu)(\bar{x}-\mu) \rangle] \\
&= \frac{1}{n-1}\{\sum_{i=1}^{n}[\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}] \\
&\qquad -2\langle \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)(\bar{x}-\mu) \rangle\} \\
&= \frac{1}{n-1}\{n\sigma^2+\sigma^2-2\langle n(\bar{x}-\mu)^2 \rangle\} \\
&= \frac{1}{n-1}\{n\sigma^2+\sigma^2-2\sigma^2\} \\
&= \sigma^2
\end{aligned} \tag{40}
$$

となり，標本分散 s^2 の期待値は予想に違はず母分散 σ^2 となる．やはり(39)式の分母を n ではなく，n−1 と補正したのは正しかつたのである．これより，母分散 σ^2 の推定値として標本分散 s^2 が使へることがわかつた．

6．おはりに

科学 science とは何かといふことを考へてゐると，結局，「同じことを誰がやつても同じ様に再現できることのみを真と認め，その真と認めたことのみに依拠して論を進める方法に基づく体系だ」といふ思ひに到る．すなはち再現性 **reproducibility** を重視した体系である．ここに科学が他の非科学と異なるところがあり，このため，科学には説明できることは極めて少ないけれども，科学が説明できるとしたことに関しては明確に説明できるといふ力強さと頼りになるといふ安心感とが与へられる．

ところがこの再現性であるが，「同じこと」をするとは何だらう，「同じ様に再現できる」とは何だらうといふ疑問がすぐに湧く．世界は「同じこと」は２度と起こり得ないのではないか．また，「全く同じ様な再現」などあり得ないのではないかといふ疑問である（もつとも，世界全体としてではなく，その部分系のみを考へれば，同じ状態の再現はありうるとの論もあるのかも知れない．囲碁の劫と同じ様なものである）．

この疑問に対してすぐに思ひつく答らしきものは，「ある誤差の範囲内で同じこと」をするとか，「ある誤差の範囲内で同じ様な再現」ができるとかいふ，やや曖昧さを持たせた範囲で論議することである．ただしさうすると，その誤差の範囲はどう取るのか，とか，その「真」なるものは完全な「真」ではなく，完全な「真」と完全な「偽」とをそれぞれ１と０とすれば，その１と０との間の値を取る不完全なものでしかあり得ないのではないか，そんなものに依拠して論を進めることができるのか，とか，次から次へと疑問が湧いてくる．

ここに，１か０かのディジタル概念をやめて，確率密度函数などといふ曖昧なものを導入して確率空間を考へ，さらにそこから抽出した標本なる概念を考へなければならない様な気がしてくる契機がある．「同じことを誰がやつても同じ様に再現できる」などと単純にいふことが大変恐ろしいことの様に思はれてくるのである．

「同じ」とは何か？　「同じ」などといふことはあり得るのか？　「同じ」といふ概念を使はずに論理的な思考は出来るのか？　かう考へていくと何だか科学の否定の様な気がして，余りよい気がしなくなるのである．

【Appendix】

1.　式(2)を使って

$$\langle ax^2+bx+c\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}(ax^2+bx+c)g(x)dx$$

$$=a\int_{-\infty}^{\infty}x^2g(x)dx+b\int_{-\infty}^{\infty}x\,g(x)dx+c\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx=a\langle x^2\rangle+b\langle x\rangle+c$$

2.　式(6)の最右辺が計算に有用である．この証明は，

$$\sigma^2=\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle=\langle x^2-2x\langle x\rangle+\langle x^2\rangle\rangle=\langle x^2\rangle-2\langle x\rangle\langle x\rangle+\langle x\rangle^2=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2$$

3.　式(7)と(6)を使って

$$\Delta[af(x)+b]=\sqrt{\langle(af(x)+b)^2\rangle-\langle af(x)+b\rangle^2}$$

$$=\sqrt{a^2\left[\langle(f(x))^2\rangle-\langle f(x)\rangle^2\right]+2ab\left[\langle f(x)\rangle-\langle f(x)\rangle\right]+b^2-b^2}=a\Delta f(x)$$

4.　同じく式(6)を使って

$$\Delta(x^2+x)=\sqrt{\langle(x^2+x)^2\rangle-\langle x^2+x\rangle^2}$$

$$=\sqrt{\langle x^4+2x^3+x^2\rangle-(\langle x^2\rangle^2+2\langle x^2\rangle\langle x\rangle+\langle x\rangle^2)}$$

$$=\sqrt{(\langle x^4\rangle-\langle x^2\rangle^2)+2(\langle x^3\rangle-\langle x^2\rangle\langle x\rangle)+(\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2)}$$

$$=\sqrt{\Delta(x^2)+\Delta x+2(\langle x^3\rangle-\langle x^2\rangle\langle x\rangle)}\neq\Delta(x^2)+\Delta x$$

5.　式(6)より

(1) $m_0=\langle(x-\langle x\rangle)^0\rangle=\langle 1\rangle=1$

(2) $m_1=\langle(x-\langle x\rangle)^1\rangle=\langle x\rangle-\langle x\rangle=0$

(3) $m_2=\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2=\sigma^2$

6.　式(14)と(15)より

$$\langle x+y\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)p(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}x\,p(x,y)\,dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}y\,p(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x\left(\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy\right)dx+\int_{-\infty}^{\infty}y\left(\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dx\right)dy=\int_{-\infty}^{\infty}xg(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}yh(y)dy=\langle x\rangle+\langle y\rangle$$

7.　式(6)の証明(Appendix 2)と同様に

$$\sigma_{xy}=\langle(x-\langle x\rangle)(y-\langle y\rangle)\rangle=\langle xy-\langle x\rangle y-x\langle y\rangle+\langle x\rangle\langle y\rangle\rangle$$

$$=\langle xy\rangle-\langle x\rangle\langle y\rangle-\langle x\rangle\langle y\rangle+\langle x\rangle\langle y\rangle=\langle xy\rangle-\langle x\rangle\langle y\rangle$$

8.　式(6)を使って

$$\Delta(x+y)=\sqrt{\langle(x+y)^2\rangle-\langle x+y\rangle^2}=\sqrt{\langle x^2+y^2+2xy\rangle-(\langle x\rangle^2+2\langle x\rangle\langle y\rangle+\langle y\rangle^2)}$$

$$=\sqrt{(\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2)+(\langle y^2\rangle-\langle y\rangle^2)+2(\langle xy\rangle-\langle x\rangle\langle y\rangle)}$$

$$=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+2\langle(x-\langle x\rangle)(y-\langle y\rangle)\rangle}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+2\Delta x\Delta y\,r_{xy}}$$

9.　式(18)と(19)を使って

$\langle xy\rangle-\langle x\rangle\langle y\rangle=\Delta x\Delta y\,r_{xy}=0$　　　　$\therefore\langle xy\rangle=\langle x\rangle\langle y\rangle$

10.　式(22)より

$$\int_{-\infty}^{\infty}xy\,p(x,y)\,dx\,dy=\langle xy\rangle=\langle x\rangle\langle y\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}xg(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}yh(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}xy\,g(x)h(y)\,dxdy$$

$\therefore p(x,y)=g(x)h(y)$

11.　式(11)と(23)を使って

$$M_{x+y}(s)=\langle e^{s(x+y)}\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}e^{s(x+y)}p(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}e^{sx}e^{sy}g(x)h(y)dxdy=M_x(s)\,M_y(s)$$

12. 平面極座標に直す工夫をして

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy} = \sqrt{\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, 2\pi r\, dr} = \sqrt{\pi}\sqrt{\int_0^{\infty} e^{-r^2} d(r^2)} = \sqrt{\pi}$$

13. まづ被積分函数の微分を計算してみる.

$$d(xe^{-x^2}) = e^{-x^2} dx + xe^{-x^2} d(-x^2) = e^{-x^2} dx - 2x^2 e^{-x^2} dx$$

なので

$$x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} e^{-x^2} dx - \frac{1}{2} d(xe^{-x^2})$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx - \frac{1}{2} xe^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \sqrt{\pi}/2$$

14. 同じく，まづ被積分函数の微分を計算してみる.

$$d(x^n e^{-x^2}) = nx^{n-1} e^{-x^2} dx - 2x^{n+1} e^{-x^2} dx$$

なので，n を $n-1$ とすれば

$$d(x^{n-1} e^{-x^2}) = (n-1)x^{n-2} e^{-x^2} dx - 2x^n e^{-x^2} dx$$

$$\therefore x^n e^{-x^2} dx = \frac{n-1}{2} x^{n-2} e^{-x^2} dx - d\left(\frac{1}{2} x^{n-1} e^{-x^2}\right)$$

これより

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx = \frac{n-1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^{n-2} e^{-x^2} dx = \frac{n-1}{2} I_{n-2}$$

15. 式(31)に $n=2k$ を代入すれば

$$I_{2k} = (k-\frac{1}{2}) I_{2(k-1)} = (k-\frac{1}{2})(k-1-\frac{1}{2})(k-2-\frac{1}{2}) \cdots (k-k-\frac{1}{2}) I_0 = \sqrt{\pi}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots(k-\frac{1}{2})$$

$$\therefore m_n = \frac{(\sqrt{2}\sigma)^{2k}}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots(k-\frac{1}{2}) = 2^k \sigma^{2k}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots(k-\frac{1}{2}) = \sigma^n 1\cdot 3\cdot 5 \cdots (\mathrm{n}-1)$$

16. 式(11)と(29)より

$$M(s) = \langle e^{sx}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

ここで $t = \dfrac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ とおく．すると $x = \mu + \sqrt{2}\,\sigma t$，また $dx = \sqrt{2}\,\sigma t$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+\sqrt{2}\sigma st+\mu s}\sqrt{2}\sigma\, dt$$

ここで $t^2 - \sqrt{2}\,\sigma s - \mu s = (t - \frac{\sigma s}{\sqrt{2}})^2 - (\frac{\sigma^2 s^2}{2} + \mu s)$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2}+\mu s}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\frac{\sigma s}{\sqrt{2}})^2} dt$$

$$= e^{\frac{\sigma^2}{2}s^2+\mu s}$$