脈波と波動方程式

Pulse wave and wave equation

大久保淳子，會澤重勝*，山下順三，會川義寛

Junko OKUBO, Shigekatsu AIZAWA, Junzo YAMASHITA, Yoshihiro AIKAWA

（お茶の水女子大学ライフサイエンス専攻，後藤学園基礎医科学研究部*）

1．はじめに

人間の脈は左胸や前頚部・側頭部などの体表から触れることができるが，臨床で脈診として最もよく用いられるのは橈骨動脈である．現代医学において脈診は脈の頻度を測定することにしか用いないが，中医学における脈診では血管半径（洪大・細小），血管位置（浮・沈），脈搏振幅（有力・無力），血管軸方向緊張度（緊・緩），血管径方向弾性度（弦・濡），血管血液間抵抗（渋・滑），脈搏頻度（数・遅）などの多くの情報を脈診から得ている[1]．

脈搏は血管内圧の振動と血管径の振動とからなる．そして，橈骨動脈の脈診位置の一点だけで診ればそれは単なる時間的な振動に過ぎないが，心臓から動脈を経て手根に至る経路を見ればこれは波動が傳播している．すなわち脈波である．

本稿ではこの脈波が血管内に生ずる機構と，その速さが何に依存するのかについて解説する．

2．血流と血圧

人体の血液の総量はほぼ5リットルでありその構成は55%が液相の血漿，45%が分散固相の血球である[2]．このため血液は必ずしもNewton流体ではないが，そのおよその粘性率は$\eta = 3.5$ mPa·secである（血漿だけの粘性率は$\eta = 1.8$ mPa·sec，水の粘性率は$\eta = 1.0$ mPa·secである）[3]．

血液自体は酸素や栄養物・老廃物などの物質および熱の輸送媒体であり，これを全身に循環させるために，その通路としての血管と駆動力としての心臓がある．すなわち循環器系である．

心臓の搏動（心搏）によって作られる血圧は上腕動脈においては $p = 100 \pm 20$ mmHg $= 13.3 \pm 2.7$ kPa であるが，大静脈においては圧がほとんど 0 になっているので，この圧力差 $\Delta p = 13.3 \pm 2.7$ kPa を駆動力として血液は循環していることになる．この血流の流れ，すなわち血流 J は，安静時においては約 $J = 5$ L/min $= 8.3 \times 10^{-5}$ m³/sec である．従って血管の総抵抗 R は

$$R = \Delta p / J = 160 \text{ MPa/(m}^3\text{/sec)}$$
$$= 1.6 \times 10^8 \text{ kg/(m}^4 \cdot \text{sec)}$$

として概算される．この血管総抵抗 R が自律神経によって制御されていることは周知の通りである．

ところが粘性率ηの Newton 流体に関する Hagen-Poiseuille の法則によれば，管半径a，管長lの流体に対する抵抗は

$$R = \frac{8\eta l}{\pi a^4} \qquad (1)$$

となることがわかっている[4]．これは電気抵抗における式

$$R = \frac{\rho l}{\pi a^2} \qquad (2)$$

と比較すると，粘性率ηが抵抗率ρに対応しているが，半径aに対する依存性がa^4とa^2とで本質的に異なっている．すなわち，交感神経によるわづかな血管径aの縮小により血流 Jを

大きく変化させることができるのである.

肝腎の組織に対する物質および熱の交換・授受はほぼ毛細血管においてのみなされるが，そこにおいては血圧だけでなく浸透圧も重要な役割を果たしている[2].

3．波と波動方程式

手首の橈骨動脈を触れると脈を触知する. この脈は心臓の搏動に対応してパルスを搏つものである. 従って心搏数を数える替りに橈骨動脈パルスを数えることが臨床では行なわれる.

橈骨動脈のパルスは心臓の搏動に対応していると言っても時間的に一致しているわけではない. 心臓での搏動パルスが上行大動脈，大動脈弓，鎖骨下動脈，腋窩動脈，上腕動脈，橈骨動脈と傳導して来るものであるから[5]，その傳導に要する時間だけ遅れている. 一般に指尖部での遅れは 180 msec である[6].

この遅れ時間を左心室からの動脈に沿っての長さで割れば脈波の傳導速度 c が求まるが，この c は血流の速度 v とは異なるものである. それは海の波を見るとき海水はその場において単に上下するだけなのに波は海表面を走ることと同様であり，脈波自体は血管中に血液が充満していさえすれば血流があろうとなかろうと生じうるものである.

以下いくつかの波とそれを支配する波動方程式を概観してみよう[7,8].

（1）弦と横波

z（高さ）方向に張力 $\sigma=T/S$ で張った弦（密度 ρ，断面積 S，線密度 $\lambda=\rho S$ ）の横（x）振動を考える.

いま弦が横（x 方向）にずれて z 軸に対して θ だけ傾いているものとする. この弦の z の高さにおける断面を考えると，この断面およびそれ以下は，それ以上の部分より上（z）方向に T の力で引っ張られる. 弦が θ だけ傾いているので横（x）方向には

$$F = T\sin\theta$$

の力が働く.

この弦の z と $z+\mathrm{d}z$ の小区間 $\mathrm{d}z$ を考えればそこに働く力 $\mathrm{d}F$ は，$\sin\theta \fallingdotseq \partial x/\partial z$ であることを考慮に入れれば，

$$dF = Td\sin\theta = T\frac{\partial\sin\theta}{\partial z}dz$$

$$\fallingdotseq T\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}dz$$

である. この微小部分 $\mathrm{d}z$ の質量は $\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}z$ なので，横（x）方向の運動方程式として

$$\lambda dz\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}dz$$

が成り立ち，$\lambda=\rho S$, $T=\sigma S$ を考慮すれば,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{\rho}{\sigma}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \qquad (3)$$

の波動方程式が得られる. ここで一次元ダランベール演算子を

$$\equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad (4)$$

と書けば，(3)式は

$$x = 0 \qquad (5)$$

となる. ここで弦に生ずる横波の速さ c は

$$c = \sqrt{\sigma/\rho} \qquad (6)$$

である.

（2）棒と縦波

z 方向に延びた弾性率 E の棒（断面積 S，密度 ρ）の縦（z）振動を考える.

弦の場合は横（x）波だったので変位を x そのものに取ることができたが，今度の棒の場合は縦（z）波なので，変位を z と取れないので，これをあらためて ζ としよう. ζ の方向は z 方向と同じである.

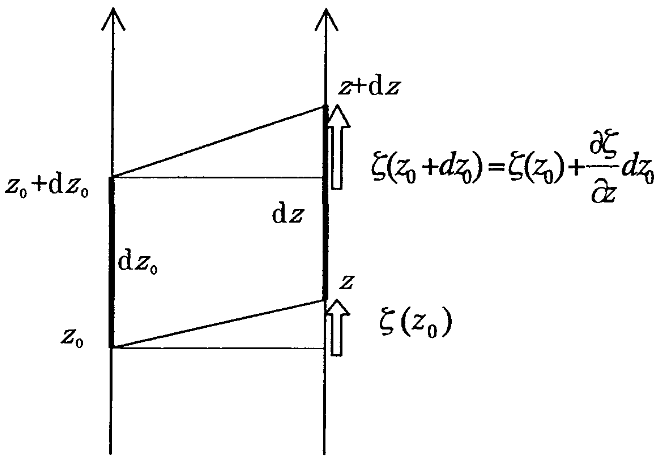

Fig. 1 Strain accompanied with displacement.
ζ: displacement, $\varepsilon=(\mathrm{d}z-\mathrm{d}z_0)/\mathrm{d}z_0$: strain

元来高さ z_0にあった棒中の面が，いま高さ z に移動しているとしよう．このときのこの面の変位 $\zeta(z_0)$は

$$\zeta(z_0)=z-z_0 \qquad (7)$$

である．同じく元来 $z_0+\mathrm{d}z_0$ の面は $\zeta(z_0+dz_0)=\zeta(z_0)+\frac{\partial\zeta}{\partial z}dz_0$ だけ変位して $z+\mathrm{d}z$ にある (Fig. 1).

このとき棒の微小部分 $\mathrm{d}z_0$はいま縦に伸びて $\mathrm{d}z$になっているのでその伸び率，すなわち歪みε は

$$\varepsilon=\frac{dz-dz_0}{dz_0}=\frac{\partial\zeta}{\partial z} \qquad (8)$$

となる．この $\mathrm{d}z$の棒の上下の断面に加わる力 $\mathrm{d}F=F(z+\mathrm{d}z)-F(z)$は応力 stress σと歪み strain ε との関係$\sigma=E\varepsilon$ を用いて

$$dF=d(\sigma S)=d(E\varepsilon S)$$
$$=ES\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}dz$$

となるがこのε に(8)式を用いて

$$dF=ES\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}dz$$

が得られる．この微小部分 $\mathrm{d}z$ の質量は $\mathrm{d}m=\rho S\mathrm{d}z$なので，運動方程式として

$$\rho Sdz\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=ES\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}dz$$

が成り立ち

$$\Box\zeta=0$$

の波動方程式が得られる．ここで棒中に生ずる縦波の速さ cは

$$c=\sqrt{E/\rho} \qquad (9)$$

である．

4．血圧と血管の拡張

前節で弦の振動と棒の振動とを扱った．その際，弦の場合は横方向に変位するとそれに応じて弦に力が生じた．棒の場合は縦方向に変位するとそれに応じて棒に力が生じた．これらの力により振動が生じ波が発生した．同様に血管の場合は血管が拡張したときは血圧が大きくなっている．この血圧の変化と血管径の変化との間の関係が脈波が発生する基本となる[9].

いま半径 rの血管を長さ wだけ切り取り，

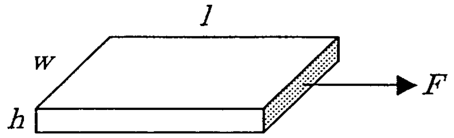

Fig.2 Incised wall of blood vessel.

A blood vessel of length w and radius r is transected and then incised to open out to be flat membrane of thickness h.

次いで血管壁を管軸方向に切り開いて幅 w, 長さ $l=2\pi r$, 厚さ h の長方形の膜を得たとしよう（Fig. 2).

この切り開いた切断面 $S=wh$（Fig. 2 の灰色面）を力 F で引っ張った場合を考える．このとき面に加わる張力 σ は

$$\sigma = F/S = (F/w)/h = \gamma/h$$

である．ここで $\gamma = F/w$ は単位長さ当たりの力で，これを表面張力という．表面張力 γ と応力としての張力 σ との間には

$$\gamma = h\sigma \qquad (10)$$

が成り立つ．また棒の波動のところで述べた様に膜に関しても張力 σ と膜の伸び率 ε との間には

$$\sigma = E\varepsilon$$

の関係が成り立つ [10]．ここに E は膜の材質の弾性率である．

膜の伸び率 ε は

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{2\pi r - 2\pi r_0}{2\pi r_0} = \frac{r - r_0}{r_0}$$

となり，血管半径 r の伸び率に等しい．ここで添字の「0」は圧が加わっていないときの元の寸法を表す．

ところで膜の内外の圧が異なる場合にはその圧力差 $\Delta p = p_{内} - p_{外}$ に応じて膜が曲がり表面張力 γ が発生する．この膜の曲面の主軸を「//」，副軸を「⊥」で表わせば，曲面はそれぞれの軸に対応する 2 つの曲率 $\kappa_{//}$ と $\kappa_{\perp}$ とで表わされ，その方向の表面張力も同様に $\gamma_{//}$，$\gamma_{\perp}$ とで表わされるが，この間に

$$\Delta p = \kappa_{//}\ \gamma_{//} + \kappa_{\perp}\ \gamma_{\perp} \qquad (11)$$

の関係が成り立つ．Young-Laplace の式である．

円管の場合は軸方向の曲率 $\kappa_{//}=0$, 円周方向の曲率 $\kappa_{\perp}=1/r$ なので，(11)式の第 1 項は消え，$\gamma_{\perp}$ をあらためて γ で表わし，Δp を管内圧 p と書けば

$$p = \gamma / r \qquad (12)$$

となる．この式に(10)式の $\gamma = h\sigma$ および $\sigma = E\varepsilon$ を代入すれば

$$p = E\frac{h}{r}\varepsilon$$

となるが，膜を構成する生体材料は一般にそのポアソン比 $\nu = 1/2$ で伸び縮みしても体積は変わらないので [11]，Fig. 2 の膜の体積は

$$w_0 l_0 h_0 = w_0 l h$$

$$\frac{h}{h_0} = \frac{l_0}{l} = \frac{r}{r_0} = \frac{1}{1+\varepsilon}$$

となり

$$p = E\frac{h_0}{r_0}\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}$$

となる．ここで基準伸び率 ε_0 として

$$\varepsilon_0 \equiv \frac{h_0/2}{r_0} \qquad (13)$$

を定義し，これに対応する基準応力 σ_0 として

$$\sigma_0 \equiv E\varepsilon_0 \qquad (14)$$

を定義すれば

$$p = 2\sigma_0\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}$$

が得られるが，ε が小さければ

$$p = 2\sigma_0\varepsilon \qquad (15)$$

となる．これが圧力 p が加わったときの血管の

半径の伸び率ε を表わす式である．両者はほぼ比例している．

いま半径の伸び率$\varepsilon=\Delta r/r_0$を用いたが，もし面積の拡張率$\varepsilon_S=\Delta S/S_0$を用いれば

$$\varepsilon_S=\Delta S/S_0=2\Delta r/r_0=2\varepsilon \tag{16}$$

なので(15)式は

$$p=\sigma_0\varepsilon_s \tag{17}$$

となる．

5．脈波

血管軸をz方向にとり，この中の血液が全体として流動していない状態で，脈波による擾乱があったとする．

擾乱により2つの変化が生ずる．1つはz_0にあった液面がzに変位することである．この変位を，先の棒の場合と同じく，$\xi(z_0)$で表わす．もう1つは血管の断面積がS_0であったのがSにまで拡張することである．この拡張率ε_Sは(16)式に示した．

いまz方向の伸び率ε_zを考えると，これは棒の場合の(8)式と同じなので$\varepsilon_z=\dfrac{\partial\xi}{\partial z}$となる．

すると血液は非圧縮性なのでその体積は変化しない．ここで長さの伸び率がε_z，血管断面積の拡張率が$\varepsilon_S=2\varepsilon$なので，血管内容積の拡張率$\varepsilon_V$は

$$\varepsilon_v=(1+\varepsilon_z)(1+\varepsilon_s)-1 \fallingdotseq \varepsilon_z+\varepsilon_s$$

となるが，血液の非圧縮性よりこれが0にならなければならない．従って血管断面積拡張率ε_Sは

$$\varepsilon_s=-\varepsilon_z=-\frac{\partial\xi}{\partial z} \tag{18}$$

となる．すなわち先に述べた擾乱による2つの変化ε_zとε_Sは(18)式により互いに関連している．

ここでzとz+dzの間の血液を考えてみよう(Fig. 3)．この部分に加わる力は両血管断面に加わる力d$F_{/\!/}$と，血管側面から加わる力d$F_\perp$とからなる．d$F_{/\!/}$は

$$dF_{/\!/}=-d(PS)=-S\cdot dp-p\cdot dS$$

である．d$F_\perp$は血管壁のz軸からの傾きをθとし，これが小さいとすれば

$$dF_\perp=p2\pi r dz\cdot\sin\theta$$
$$\fallingdotseq p2\pi r\frac{dr}{dz}dz$$
$$=p2\pi r dr=pd(\pi r^2)=pdS$$

となる．従ってこの血液部分に加わる力dFはうまく相殺して

$$dF=dF_{/\!/}+dF_\perp=-S\cdot dp \tag{19}$$

となる．

次にこの血管微小長さ部分dzにある血液の質量dmはdm=ρSdzであり，その加速度は$\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$であるから，運動方程式は

$$\rho Sdz\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-S\cdot dp$$

となる．従って，(17)式の$p=\sigma_0\varepsilon_s$より

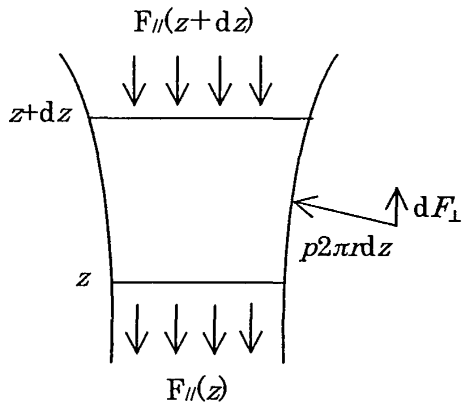

Fig. 3　The force exerting on a small amount of blood in vessel.

$$\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=-\frac{\partial p}{\partial z}=-\sigma_0\frac{\partial\varepsilon_s}{\partial z}$$

さらに(18)式を用いれば

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}=\frac{\rho}{\sigma_0}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$$

すなわち

$$\Box\zeta=0$$

となる．ただし脈波の速さcは

$$c=\sqrt{\sigma_0/\rho}$$

である．ここでρは血液の比重である．σ_0は基準応力$\sigma_0=E\varepsilon_0=E(h_0/2)/r_0$であり，血管の材質が硬いほど，また血管壁が厚いほど大きくなり，血管径が拡がると小さくなる．脈波の速さ c もこれと同じ依存性を示す．血液の粘性率が脈波の速さに関係しないことは驚きである．

6．おわりに

脈波を調べるに当たって，弦と棒の波とを併せて示した．その波の速さcを再度列挙すると，弦・棒・血管に対してそれぞれ

$$c=\sqrt{\sigma/\rho}$$

$$c=\sqrt{E/\rho}$$

$$c=\sqrt{\sigma_0/\rho}$$

と表わせた．ρはいずれも振動する媒体の密度である（血管壁の質量や慣性を無視していることに注意）．σ，E，σ_0はそれぞれ変位に対する抵抗を表している．動脈硬化が進めば血管壁の弾性がなくなり（これは弾性率 E が大きくなることを意味する）脈波の速さは大きくなる．その意味で脈波の速度は局所の血管の弾性を非侵襲的に測定できる指標となりうる．

参考文献

1．神戸中医学研究会，「中医臨床のための舌診と脈診」医歯薬出版．1989.
2．佐藤昭夫，「自律神経生理学」金芳堂．1995.
3．真島英信，「生理学」文光堂．1980.
4．佐野理，「連続体の力学」裳華房．2000.
5．河野邦雄，伊藤隆造，境章，「解剖学」医歯薬出版．1991.
6．吉村正治，三島好雄，「臨床脈波」医学書院．1972.
7．多田政忠，「物理学概説」学術図書出版．1974.
8．有山正孝，「振動・波動」裳華房．1971
9．岡小天，“血液のレオロジー”，高分子，vol.16, No.185, 921, (1967).
10. Y.C.ファン，「連続体の力学入門」培風館．1980.
11. 日本機械学会，「生体材料学」オーム社．1993.