中腔性臟器内容物体積と内部圧

The volume of contents in hollow organ and its internal pressure

池田寛子，宮崎香代子，西野章江，會川義寛

Hiroko IKEDA, Kayoko MIYAZAKI, Akie NISHINO, Yoshihiro AIKAWA

（お茶の水女子大学大学院人間環境科学）

1．はじめに

人体内の内臓は，実質性臓器 viscera と中腔性臓器 bowels とに大別するが，この中腔性臓器には，袋 sac と管 tube の二つの形状のものがある．袋状のものには，胆嚢や膀胱，子宮，心臓，胃などがあり，管状のものには，食道や大腸，小腸，尿道，血管などがある．一般に袋状のものの機能は「溜める」ことにあり，管状のものは，「通す」ことにある．勿論実際の中腔性臓器は大なり小なりこのいづれの機能をも併せ持っているが，この「溜める」と「通す」という相反する二つの機能が袋と管の特徴である．

気体が通ったり溜まったりする管や袋は多くの場合，その形状が一定している．たとえば気管や気管支には，軟骨が小田原提灯の籤竹の様にその形状を維持している．しかし，液体や固体が通ったり溜まったりする管や袋は，中にものが入った場合にのみ内腔がその物の大きさに従って拡がる様になっている．そして中に入るものの量が増えれば圧が上がる様になっている．

本稿では，この中腔性臓器を，球状の袋および円筒状の管をモデルとして，その内体積 V と内圧 p との関係を考察する．

2．圧と表面張力

袋や管を作っている物質は一般に平たい二次元様の膜である．この膜厚を h としよう．膜は厚さ方向に伸ばされることは普通はなく，膜の面に水平な方向に延ばされる．この膜面に垂直な断面を考えると，膜が延びるときには此の断面に応力 σ が加わっている．この断面の形状を高さ h，幅 w としよう（Fig. 1)．

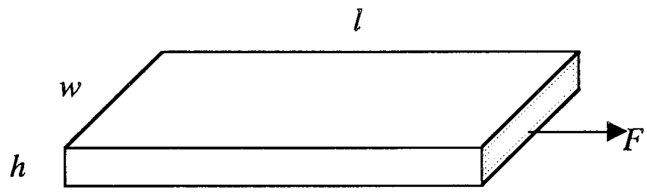

Fig. 1 Membrane with thickness h forming a sac or a tube

すると断面積は $S = wh$ なので，この面に加わる力 F は $F = \sigma S = \sigma wh$ となる．多くの場合，生体の膜は多層構造になっており，均一ではなく，厚さ方向の分布は考察しにくい．そこで

$$\gamma = \sigma h \tag{1}$$

とすれば，

$$F = w\gamma$$

として断面に働く力を表わすことができる．γ は力 F を膜の切れ目の長さ w で割った値であるので，単位切れ目長さ当りの力であり，いわゆる表面張力と同じ物理量である．

膜の内外で圧力差$\Delta p = p - p_0$があるとき，膜は曲ることによってその圧力差に耐える．ここに p は膜内の圧，p_0 は膜外の圧であり，膜は内側を包むように曲がっている．今面倒なので，外圧を$p_0 = 0$とする．したがって以後$\Delta p = p$である．

すると，圧pと膜の曲率κとの間には

$$p = \kappa_{/\!/}\gamma_{/\!/} + \kappa_{\perp}\gamma_{\perp} \tag{2}$$

の式が成り立つことが容易に証明できる．ここに，「//」は膜曲面の主軸方向を表わし，「⊥」は副軸の方向を表わす．二次形式の理論より両軸は直交する．主軸の曲率$\kappa_{/\!/}$は，副軸の曲率$\kappa_{\perp}$よりも小さい（$\kappa_{/\!/} < \kappa_{\perp}$）．$\gamma_{/\!/}$と$\gamma_{\perp}$はそれぞれ主軸方向と副軸方向の表面張力である．この式を Young-Laplace の式という．

（1） 球

球の場合，球面は対称なので，主軸と副軸の区別がなくなり，その二つの曲率は互いに等しくなる．したがって(2)式は，

$$p = 2\kappa\gamma = 2\gamma/r \tag{3}$$

となる．ここに，r は球の半径である．すなわち表面張力は膜面内どの方向でも同じく，

$$\gamma = rp/2 \tag{4}$$

である．

（2） 円筒

円筒面は，主軸は円筒軸方向を向いており，その曲率は0である．すなわち$\kappa_{/\!/} = 0$である．副軸は円筒断面の円周方向を向き，$\kappa_{\perp} = 1/r$ である．ここに，r は円筒断面の半径である．したがって(2)式は

$$p = \kappa_{\perp}\gamma_{\perp} = \gamma_{\perp}/r \tag{5}$$

となる．ゆえに

$$\gamma_{\perp} = rp \tag{6}$$

となるが，このままでは$\gamma_{/\!/}$が求まらない．

そこで，円筒の両端に蓋をすると，蓋の面積はπr^2，したがって蓋に加わる力は$\pi r^2 p$，蓋を支える円周部分に加わる力も同じく$\pi r^2 p$ であり，円周の長さは$2\pi r$ なので，単位長さ当りの力γ は，

$$\gamma_{/\!/} = \frac{\pi r^2 p}{2\pi r} = \frac{rp}{2} \tag{7}$$

となり，

$$\gamma_{\perp} = 2\gamma_{/\!/} \tag{8}$$

であることがわかる．すなわち円周方向により多くの表面張力が加わり，膜の裂け目はまづ主軸方向に走りやすいことが予想される．

3．圧と膨張

（1）袋

自然な大きさの袋の半径を r_0 としよう．このとき，袋の内外の圧力差は 0 である．今，外圧を 0 としているので内圧 $p = 0$ のとき，袋の半径が r_0 であるとしている．

この袋の内部の圧を上げて p としたとき，袋が膨張してその半径が $r_0+\Delta r$ に大きくなったとしよう．するとその半径の伸び率ε_rは，

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta r}{r_0}$$

で定義される．そのとき袋の表面積も S_0 から $S_0+\Delta S$ に大きくなるが，そのときの拡がり率をε_sとすれば，

$$\varepsilon_S = \Delta S/S_0 = 2\varepsilon_r \tag{9}$$

である．さらに膜厚の伸び率を$\varepsilon_h = \Delta h/h_0$ とすれば，膜構成物質の体積膨張率$\Delta V/V_0$は，

$\Delta V/V_0 = \varepsilon_S + \varepsilon_h$

となるが，生体材料に関しては一般にポアソン比$\nu = 1/2$で，体積膨張率$\Delta V/V_0 = 0$なので，

$$\varepsilon_h = -\varepsilon_s = -2\varepsilon_r \qquad (10)$$

が成り立つ．すなわち，袋が大きくなる（$\varepsilon_r>0$）と袋の膜は薄くなる（$\varepsilon_h = -2\varepsilon_r<0$）．

いま，袋の膜の表面張力γは，応力$\sigma = E\varepsilon_r$で，かつ$h = h_0(1+\varepsilon_h)$なので，これに(10)式を用いて

$$\gamma = \sigma h = (E\varepsilon_r)h_0(1+\varepsilon_h)$$
$$= E\,h_0\varepsilon_r\,(1\text{-}2\varepsilon_r)$$

であるが，これと(3)式より

$$p = \frac{2Eh_0}{r_0}\frac{\varepsilon_r(1-2\varepsilon_r)}{1+\varepsilon_r} \approx p_0\varepsilon_v \qquad (11)$$

となる．ここに

$$p_0 \equiv 2Eh_0/(3r_0)$$

であり，またε_rの2次以上の項は省略した．ε_Vは，袋内容積の膨張率で，

$$\varepsilon_V = 3\varepsilon_r$$

である．袋内容積Vは，$V = V_0(1+\varepsilon_V)$なので，

$$p = p_0\,(V - V_0)/V_0 \qquad (12)$$

となる．これを図に表わすと，Fig. 2 の様になる．

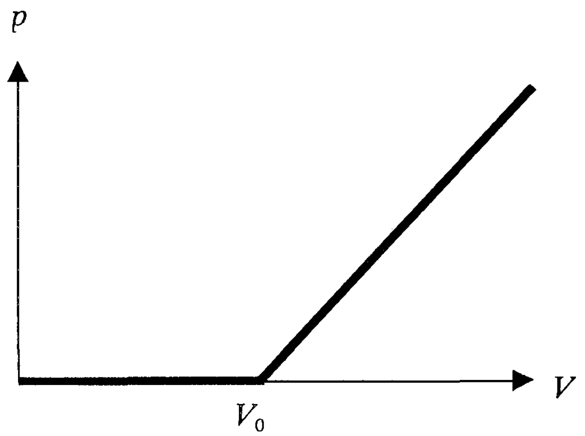

Fig. 2 The variation in internal pressure of a sac with the volume of content

図より，袋の中には容量$V_0 = 4\pi r_0^3/3$まで物を入れても袋内圧は上がらないが，内容物がV_0に達するとそれから直線的に圧が上がっていく．その傾きは，$p_0/V_0 = Eh_0/2\pi r^4$である．従って袋の見掛けの体積弾性率$k = \mathrm{d}p/\mathrm{d}\ln V$は，

$$k = \mathrm{d}p/\mathrm{d}\ln V = p_0 \qquad (13)$$

となる．

したがって，Fig. 2 の替りに横軸を log V，縦軸をpと取り，プロットすれば，その傾きは$p_0 = 2Eh_0/(3r_0)$となり，膜厚h_0が既知ならば膜構成物質の弾性率Eが求められる．

（2）管

自然な大きさの管が，半径r_0，長さl_0であったとしよう．このとき管の内外の圧力差は 0 である．管を構成する膜の厚さはh_0である．

一般に消化管や血管では，主軸方向の平滑筋である外縦筋と，副軸方向の内輪筋とはその物性が異なっている．したがってその弾性率はそれぞれ$E_{/\!/}$と$E_\perp$として区別する．

この管の内圧を 0 から p へと上げると，管は膨張する．そのときの半径r．長さl，厚さhのそれぞれの膨張率をε_r，ε_l，ε_hとすれば，生体材料は一般には体積が変化しないので，

$$\varepsilon_r + \varepsilon_l + \varepsilon_h = 0 \qquad (14)$$

である．

(6)および(7)式より，

$$\gamma_r = pr_0(1+\varepsilon_r)$$

$$\gamma_l = \frac{1}{2}pr_0(1+\varepsilon_r)$$

であるが，また同時に(1)式より，

$$\gamma_r = \sigma_\perp h_0(1+\varepsilon_h)$$
$$= E_\perp h_0\varepsilon_r(1\text{-}\varepsilon_r\text{-}\varepsilon_l)$$

$$\gamma_r = \sigma_{//} h_0 (1+\varepsilon_h)$$
$$= E_{//} h_0 \varepsilon_l (1-\varepsilon_r-\varepsilon_l)$$

なので，

$$p = \frac{E_{\perp} h_0}{r_0} \varepsilon_r \frac{1-\varepsilon_r-\varepsilon_l}{1+\varepsilon_r}$$
$$= \frac{E_{//} h_0}{r_0} \varepsilon_l \frac{1-\varepsilon_r-\varepsilon_l}{1+\varepsilon_r}$$

となる．ところが管内容積の膨張率ε_Vは，

$$\varepsilon_V = 2\varepsilon_r + \varepsilon_l \qquad (15)$$

なので，ε_rの高次の項を無視すれば，

$$p = p_0 \varepsilon_V \qquad (16)$$

となる．ここで，

$$p_{//} \equiv E_{//} h_0 / r_0$$
$$p_{\perp} \equiv E_{\perp} h_0 / r_0$$
$$p_0 \equiv \left(\frac{2}{p_{\perp}} + \frac{1}{2p_{//}} \right)^{-1} \qquad (17)$$

である．すなわち p_0 には，$p_{//}$よりも $p_{\perp}$の方が大きく効いてくる．これより，

$$p = p_0 (V-V_0)/V_0 \qquad (18)$$

となり，袋の場合の(12)式と同じ依存性を示すことになり，Fig. 2 と同じ pV 関係を示し，管の見かけの体積弾性率 k は，

$$k = \mathrm{d}p/\mathrm{d}\ln V = p_0 \qquad (19)$$

となる．

4．おわりに

袋状臓器と管状臓器の内容物量 V と圧 p との関係を述べた．いづれも袋または管の容量までは圧の上昇なく注入することができるが，本来の内腔体積に達するとそれから急に圧が増加し始める．横軸に log V，縦軸に p として片対数プロットを取れば，その傾きは見掛けの体積弾性率 k を意味し，これは構成膜材料の弾性率や，膜厚，袋や管の径に依存した．

ここで求めた pV 関係は内腔性臓器の受動的な性質を述べただけである．しかしながら，一般の臓器はその壁内に平滑筋ならびにときには壁内神経叢を持ち，受動的な pV 関係を能動的にシフトすることができる．本稿では，この能動的な pV 関係の調節に関しては述べていないが，しかし，この袋と管の受動的 pV 関係がその基礎となるものである．この能動的調節は壁内神経叢（心臓の場合は特殊伝導系）または副交感神経によって行なわれる．

参考文献

1．佐藤昭夫，佐藤優子，五嶋摩理，「自律機能生理学」，金芳堂，1995.

2．佐藤昭夫，佐伯由香編，「人体の構造と機能」，医歯薬出版，2002.

3．Sato A., Sato Y. and Schmidt R. F., “The impact of somatosensory input on autonomic functions”, *Rev. Physiol. Biochem. Pharmacol.*, **130**, 1-328, (1997).

4．片山芳文，“自律神経系の機能構築と細胞生理”，病態生理, **12**, 569-577, (1993).

5．片山芳文，“腸神経系を通してみた自律神経系”，脳の科学，**23**, 507-512, 595-599, (2001).