曲げと振り

Curvature and Torsion

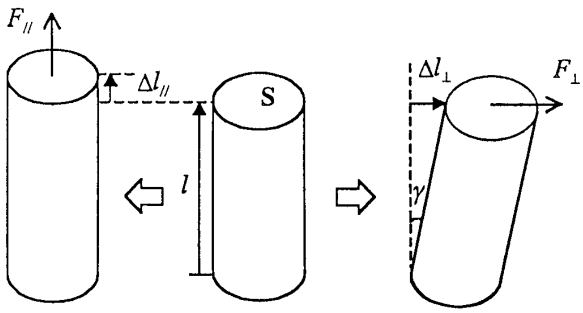
丸子 亜里紗，大貫 恵，扇澤 美千子*，會川 義寛
Alisa MARUKO, Megumi ONUKI, Michiko OUGIZAWA*, Yoshihiro AIKAWA
（お茶の水女子大学，茨城キリスト教大学*）

1．はじめに

材料における曲げと振りは基本的な二つの変形であるが、これらの変形はいづれもさらに基本的な歪みである伸縮と剪断とに基づいている．そして前者は材料の弾性を，後者は剛性を基礎としている．この材料物性に加えて，材料の形を考慮して曲げと振りが実現するが，曲げは曲率で，振りは振率で表わされる．そしてこの曲率・振率をつくるのが曲げモーメントおよび振りモーメントである．

本稿ではこの曲げと振りのモーメントが生ずる曲率と振率について解説する．

2．弾性率と剛性率



$\sigma = F_{//}/S$ $\varepsilon = \Delta l_{//}/l$

$\tau = F_{\perp}/S$ $\gamma = \Delta l_{\perp}/l$

Fig. 1 Elasticity and rigidity

物質（長さ l，断面積 S）は，引っ張れば（$F_{//} > 0$）伸び（$\Delta l_{//} > 0$），押さえれば（$F_{//} < 0$）縮む（$\Delta l_{//} < 0$）．すなわち伸縮の変形$\Delta l_{//}$は，力 $F_{//}$によって生ずる（Fig. 1）．この材料の性質を，材料を構成する物質の性質（物性）に還元するために材料の変形$\Delta l_{//}$を物質の歪み$\varepsilon = \Delta l_{//}/l$で，材料に加える力 $F_{//}$を物質に加える応力$\sigma = F_{//}/S$ で表わせば，この応力σに比例して物質は歪むεので，

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1}$$

と表わせば，弾性率 E は物質に固有の（材料の形態によらない）性質となる．

同様に，材料の面 S に平行に力 $F_{\perp}$を加えて，長さ l に対して垂直方向に$\Delta l_{\perp}$だけ変形すると，剪断歪み$\gamma = \Delta l_{\perp}/l$は剪断応力$\tau = F_{\perp}/S$ に比例する．すなわち，

$$\tau = G\gamma \tag{2}$$

であり，剛性率 G も物質に固有の性質である．物質の変形に関する性質は，この弾性率Eと剛性率Gとで表わす．弾性率と剛性率の間には

$$E/2G = 1 + \nu \tag{3}$$

の関係がある．ここでνはポワソン比である．

3．曲げ力モーメントと曲率

xz 平面上にある板（幅 w, 厚さ d, 長さ l）が x 方向に延びている（$0 \leq x \leq l$, $-w/2 \leq z \leq w/2$, $-d/2 \leq y \leq d/2$）．この板（Fig.2）を x 軸に沿って y 軸の方向に曲げたとする．すると，曲がる前の板中 xy 平面を中立面，x 軸を梁軸とすれば，中立面や梁軸は本来全て $y = 0$ にあるはずであったが，板を曲げたことにより中立面の高さを表わす y は x の関数 $y(x)$となる．この $y(x)$が板の曲がりを表わしている．

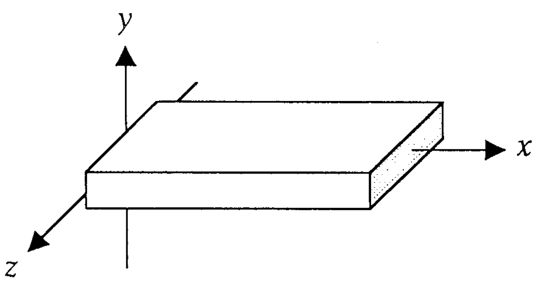


Fig.2 Plate as a beam

ここで，板の x と x+dx の間の部分 d$V = S$dx を考えよう(Fig.3).

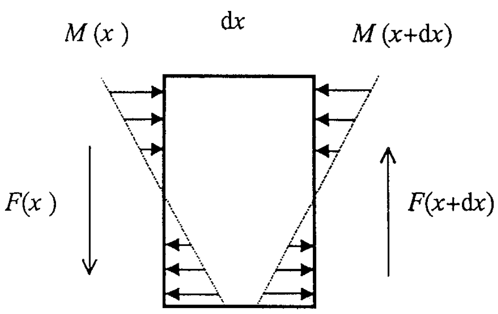


Fig.3 A small volume of plate with a length of dx

そうすると，この部分は三つの力を受ける．まづ右の面（x+dx）から y 方向の剪断力 $F(x+\mathrm{d}x)$を受ける．これはこの右面のさらに右側から受ける力である．次に，左の面（x）はその左側に対して $F(x)$の剪断力を与えている．したがって，作用・反作用の法則により，左面は逆にその左側から$-F(x)$の力を受けている．もう一つは，この体積自体が受ける力で，単位梁軸あたりに受ける力を$f(x)$とすれば，全体で，$f(x)\mathrm{d}x$ の力を受ける．

この３つの力 $F(x+\mathrm{d}x)$, $-F(x)$, $f(x)\mathrm{d}x$ は釣り合わなければならないので，

$$F(x+\mathrm{d}x) - F(x) + f(x)\mathrm{d}x = 0$$

すなわち，

$$\mathrm{d}F/\mathrm{d}x = -f \qquad (4)$$

となる．

次に，この部分 d$V = S$dx の重心に関する回轉モーメントを考えよう．偶力の回轉モーメントはどの軸の廻りをとっても同じ値となるから，まづ左右の面に加わる剪断力による重心の廻りの回轉モーメントを考えれば，$F(\mathrm{d}x/2) - F(-\mathrm{d}x/2) = F\mathrm{d}x$ が得られる．

右面と中立面との交線をこの面の中立軸と名付けよう．板が上側に曲率κで曲がっていると，この面の上側は縮み，下側は伸びる．中立軸からの高さ y のところの伸び率$\varepsilon(y)$は，

$$\varepsilon(y) = -\kappa y$$

なので，ここには右面に垂直応力，

$$\sigma = E\varepsilon = -E\kappa y$$

が働く．この力は $y = 0$ の中立軸の廻りの偶力となっているので，この中立軸の廻りの垂直応力による回轉モーメントは，

$$M = \int y(-\sigma \mathrm{d}S) = E\kappa \int y^2 \mathrm{d}S$$
$$= EI\kappa \qquad (5)$$

となる．この M を曲げモーメントといい，

$$I = \int y^2 \mathrm{d}S = y_R{}^2 S \qquad (6)$$

を断面二次モーメントという．ここに y_R は断面内中立軸の廻りの断面の回転

半径である.

したがって，右面での回轉モーメントは $M(x+\mathrm{d}x)$，左面での回轉モーメントは $-M(x)$ であるから，これが垂直応力による回轉モーメント $F\mathrm{d}x$ と釣り合う条件,

$$M(x+\mathrm{d}x) - M(x) + F\mathrm{d}x = 0$$

より,

$$\mathrm{d}M/\mathrm{d}x = -F \qquad (7)$$

が得られる.

まとめれば,

$$f = -F' \qquad (4)$$

$$F = -M' \qquad (7)$$

$$M = EI\kappa \qquad (5)$$

$$\kappa = y'' /(1+y'^2)^{3/2} \qquad (8)$$

となる．すなわち，加えた力の分布 f が分かれば，各断面での剪断力 F が(4)式より分かり，これより各断面の曲げモーメント M が(5)式より得られて，これに比例して曲率κが(6)式より求まる．求まった曲率κより曲げ $y(x)$が(7)式より求まるということになる.

4．振りモーメントと捩率

底面が xy 平面上に固定され，z 軸方向を向いた半径 a，高さ l の円柱を考える．上面を円柱軸（z 軸）の廻りにφだけ回轉すると，円柱軸の捩率τは,

$$\tau = \varphi / l \qquad (9)$$

である．この円柱の z と $z+\mathrm{d}z$ の間の部分 $\mathrm{d}V = \pi a^2\mathrm{d}z$ を考えよう（Fig.4).

すると，円柱軸から r の点では，その下面に対する上面のずれ $r\mathrm{d}\varphi$はそこでの剪断歪み$\gamma(r)$を用いて

$$r\mathrm{d}\varphi = \gamma(r)\mathrm{d}z$$

となるので，軸から r の距離での剪断歪みは

$$\gamma(r) = r\mathrm{d}\varphi / \mathrm{d}z = \tau r$$

と円柱軸捩率τで表わされる.

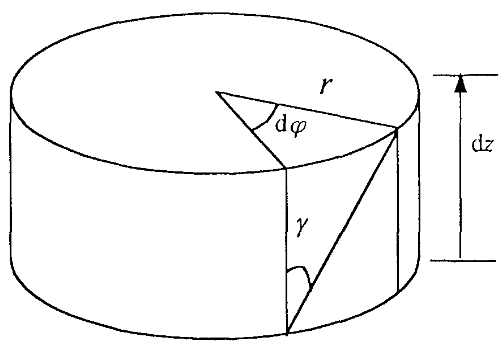


Fig.4 A small volume of cylinder with a height of dz

ここで，甚だ遺憾であるが，円柱軸捩率と剪断応力とはいずれも同じτという文字を使っている．どちらも，格式ある古い歴史を持つ概念と記号なので，ここではこのいづれをも尊重し，混乱を覚悟で同じ文字τを使うことにしよう.

軸から r の点での剪断応力τは

$$\tau = G\gamma = G\tau r$$

であり，これにより上面に加わる軸の廻りの回轉モーメントは

$$N = \int r\tau(r)\mathrm{d}S = G\tau\int r^2\mathrm{d}S$$

$$= GJ\tau \qquad (10)$$

となる．ここで N を改めて振りモーメントといい,

$$J = \int r^2\mathrm{d}S = r_R{}^2 S \qquad (11)$$

を断面二次極モーメントという．r_R は断面中心軸の廻りの断面回轉半径である．結局，振りモーメント N により生ずる円柱軸捩率τは

$$N = GJ\tau \qquad (10)$$

と N に比例することが分かる.

5. 回轉半径と断面二次モーメント

以上より，曲げと振りに対応して，断面には二種類の回轉半径が定義され

ることがわかった．一つは断面内に存在する中立軸の廻りの回転半径であり，譬えて言えば，うちわ（又は，でんでん太鼓）の回転半径 r_{Rx} と言えるであろう．もう一つは，断面中心を断面に垂直に通る軸の廻りの回転半径であり，譬えて言えば，独楽の回転半径 r_{Rz} とでも言えるであろう．すなわち，曲げにはうちわの，捩りには独楽の回転半径 r_{Rx}，r_{Rz} を用い，これを使って断面二次モーメント I, J をそれぞれ

$$I = r_{Rx}{}^2 S \qquad (11)$$

$$J = r_{Rz}{}^2 S \qquad (12)$$

と求める．ここで S は断面積である．したがって，断面のこの二つの回転半径を求めておけば，幾何学的な曲げにくさ I や，捩りにくさ J が直ちに求まることになる．

ここに最も簡単な円柱の回転半径を求めておこう．

まず，独楽の回転半径 r_{Rz} は

$$r_{Rz} = (\int r^2 2\pi r dr / \pi a^2)^{1/2}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad (13)$$

である．

ここにうちわの回転半径 r_{Rx} もその積分は円柱断面なのでそう難しくはないが，ここでは一般公式

$$r_{Rz}{}^2 = r_{Rx}{}^2 + r_{Ry}{}^2 \qquad (14)$$

を使うのが便利である．すなわち，円においては $r_{Rx} = r_{Ry}$ なので

$$r_{Rx} = \frac{r_{Rz}}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2} \qquad (15)$$

と(13)，(15)式の回転半径が求まり，断面二次モーメントはそれぞれ

$$I = \frac{\pi}{4} a^4$$

$$J = \frac{\pi}{2} a^4 \qquad (16)$$

と得られる．

6．おわりに

材料の曲げにくさは EI で，捩りにくさは GJ で表わされる．すなわち

$$M = EI\kappa$$

$$N = GJ\tau$$

である．

ついで I と J はそれぞれ，断面内軸 x または y に関する二次モーメントと断面垂直軸 z に関する二次モーメントであり，それぞれの軸に対する回転半径 r_{Rx}，r_{Ry}，r_{Rz} の間には

$$r_{Rz}{}^2 = r_{Rx}{}^2 + r_{Ry}{}^2$$

の関係が成り立ち，

$$I = r_{Rx}{}^2 S$$

$$J = r_{Rz}{}^2 S$$

と表わされる．

【参考文献】

1．S. Timoshenko, “Strength of Materials”, third edition,, van Nostrand Company, Inc., NY., 1955.

2．村上敬宜「材料力学」森北出版，1994

3．A. E. H. Love, “A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity”, Dover Publications, N.Y., 1944.