螺旋の構造とその性質

Helix Structure and its Property

丸子 亜里紗，大貫 恵，扇澤 美千子*，會川 義寛
Alisa MARUKO, Megumi ONUKI, Michiko OUGIZAWA*, Yoshihiro AIKAWA
（お茶の水女子大学，茨城キリスト教大学*）

1．はじめに

自然界や人工物には螺旋構造を取るものが多い．たとえば直線を小さな空間内に納めたければ螺旋構造を取ると便利であるし，その螺旋軸がさらに螺旋構造を取ればもっと緻密な構造を取り得る．しかしながら，直線を螺旋構造に変形するためにはある種の歪みが伴う．この歪みは直線の曲げや捩りに対応する．

本稿では螺旋構造の径や周期，螺旋角と螺旋の曲率・捩率について解説する．

2．螺旋の表示

螺旋の位置 $\boldsymbol{r}$ を

$$\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{e}_\rho(\varphi) + z\boldsymbol{e}_z \qquad (1)$$

で表わす．ここで，a は正の定数，$\boldsymbol{e}_\rho(\varphi)$は xy 平面上で方位角φの方向の単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}_\rho(\varphi) = \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y$$

であり，$\boldsymbol{e}_z$は z 方向の単位ベクトルである（Fig.1）．

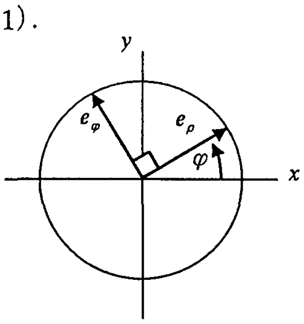

Fig. 1 Unit vectors for ρ and φ

螺旋においてはこの方位角φと高さ z の間に一定の関係がある．すなわち時間を t として

$$\varphi = \omega t$$
$$z = ct \qquad (2)$$

とすれば，$\boldsymbol{e}_\rho(\varphi)$は xy 平面上を角速度ωで回転しながら z は速さ c で上昇することになる．従って $\boldsymbol{r}$ は半径 a の円柱側壁を角速度ω，上昇速度 c で螺旋を巻きつつ上昇運動する．

螺旋自体には別に運動してもらう必要はないので，(2)式からパラメーターt を消去すると

$$\varphi = z/b \qquad (3)$$

となる．ただし，$b = c/\omega$であり，$\lambda = 2\pi b$は高さ方向の波長，または螺旋ピッチに相当する（Fig. 2）．

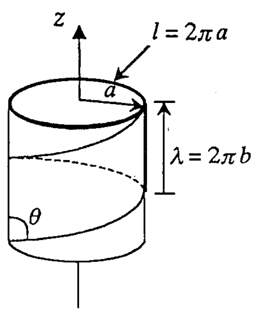

Fig. 2 Helix structure with a and b

結局(1)式は

$$\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{e}_\rho(z/b) + z\boldsymbol{e}_z \qquad (4)$$

と表されることになる．

ここで，平面動径方向単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\rho(\varphi)$の微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho(\varphi)$は，方位角単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\varphi$

$$\boldsymbol{e}_\varphi = -\sin(z/b)\,\boldsymbol{e}_x + \cos(z/b)\,\boldsymbol{e}_y$$

を使って

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho(\varphi) = \mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi$$

と表わされるので，(4)式の微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = [(a/b)\,\boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{e}_z]\mathrm{d}z \qquad (5)$$

となり，螺旋軌道に沿っての長さ変化 $\mathrm{d}s$ は

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = [(a^2+b^2)^{1/2}/b]\mathrm{d}z$$

となる．よって

$$z = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}s$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}s \qquad (6)$$

である．この(6)式は高さ z と方位角φとを，螺旋の長さ s をパラメーターとして表示し

た式となっている．

(5)式の dr を長さ ds で割ると，接線ベクトル e_t が得られる．すなわち

$$e_t = \frac{dr}{ds} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}e_\varphi + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}e_z$$

であるが，この接線ベクトル e_t と e_z とのなす角 θ を螺旋角という．すなわち

$$\cos\theta = e_t \cdot e_z = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (7)$$

であるから，接線ベクトル e_t は

$$e_t = \cos\theta\, e_z + \sin\theta\, e_\varphi \qquad (8)$$

となる．

3．軌道の微分

ここで一旦螺旋軌道から離れて，一般軌道の性質を考察する．軌道 r の軌道長さ s による微分を（′）で表わすことにする．ここで、**Frenet-Seret** の式によれば，接線ベクトル e_t，法線ベクトル e_n，副法線ベクトル e_b の長さによる微分は，曲率を κ，捩率を τ として

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} e_t \\ e_n \\ e_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \kappa & \\ -\kappa & & \tau \\ & -\tau & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_t \\ e_n \\ e_b \end{pmatrix} \qquad (9)$$

であるから，

$$r' = e_t$$
$$r'' = \kappa e_n \qquad (10)$$
$$r''' = -\kappa^2 e_t + \kappa' e_n + \kappa\tau e_b$$

となる．したがって曲率 κ は

$$\kappa = |r''| \qquad (11)$$

よりただちに求め得る．さらに

$$[r'r''r'''] = (r'' \times r''') \cdot r' = \kappa^2\tau$$

なので，捩率 τ は

$$\tau = \frac{[r'r''r''']}{\kappa^2} \qquad (12)$$

として求めることができる．

4．螺旋の曲率と捩率

螺旋においては

$$de_\rho = e_\varphi d\varphi$$
$$de_\varphi = -e_\rho d\varphi$$
$$\varphi/s = (a^2+b^2)^{-1/2}$$

なので，r の s による微分はそれぞれ

$$r = ae_\rho + ze_z$$
$$r' = \sin\theta\, e_\varphi + \cos\theta\, e_z$$
$$r'' = -(1/a)\sin^2\theta\, e_\rho$$
$$r''' = -(1/a^2)\sin^3\theta\, e_\varphi$$

となる．したがって(11)式より螺旋の曲率は

$$\kappa = |r''| = \frac{1}{a}\sin^2\theta = \frac{a}{a^2+b^2}$$

であり，また

$$[r'r''r'''] = (r'' \times r''') \cdot r'$$
$$= \frac{\sin^5\theta}{a^3}(e_\rho \times e_\varphi) \cdot (\sin\theta\, e_\varphi + \cos\theta\, e_z)$$
$$= \frac{\sin^5\theta\cos\theta}{a^3}$$
$$= \frac{b}{a^2+b^2}\kappa^2$$

であるから，(12)式より螺旋の捩率は

$$\tau = \frac{b}{a^2+b^2}$$

であることがわかる．

5．おわりに

半径 a，ピッチ $\lambda = 2\pi b$ の螺旋（Fig. 2）は，螺旋角を θ とすれば

$$\tan\theta = a/b \qquad (13)$$

であり，曲率 κ および捩率 τ はそれぞれ

$$\kappa = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad (14)$$

$$\tau = \frac{b}{a^2+b^2} \qquad (15)$$

である．この曲げ κ と捩り τ は曲げモーメント M と捩りモーメント N とによって

$$M = EI\kappa \qquad (16)$$
$$N = GJ\tau \qquad (17)$$

として生じたものである．ここに，EI は曲げかたさ，GJ は捩りかたさである．したがって，κ や τ のゆがみは元の直線にとっては変形エネルギーが蓄積されていることを意味する．ここに曲げエネルギーと捩りエネルギーとが相殺することが期待される所以がある．