制御工学-伝達関数法
Control Theory: Transfer Function

太田裕治
Yuji OHTA
(お茶の水女子大学生活科学部)

1．はじめに

昨今メカニズムという用語を広く耳にするようになった．手元の辞書でメカニズムを引けば，機械部品，機械操作・運転などのいかにも”機械”らしい定義に続き，結果を得るための過程・技法，生命などの自然過程を機械的に決定し物理化学法則によって完全な説明を可能とする考え，等が続く．「政治の—を解明する」等の用例があることからも，科学技術の枠を越え広い意味で使われることが分かる．基本的には機械を構成する一つの部品の動きが他の部品に伝えられ，次にその部品の動きがまた別の部品へと伝えられ，多くの部品が整然と運動しつつ何がしかの目標を実現する，というイメージに基づいた事物生成の仕組みの説明がメカニズムの意味するところであろう．

さて，この機械における部品間の動きの伝達は次のように「入力」と「出力」なる関係をもって解釈することも可能である．即ち部品 a の運動が部品 b に伝えられ，その結果として部品 b には新たな運動が生じる．更にこの運動状態は次の部品 c に伝達されるとする．このとき部品 b にとって部品 a の運動は入力であり，また部品 b に生起された運動は部品 b にとって出力であると考えることである．言うまでもなく部品 b の運動は次の部品 c にとっては入力となっている．このように一連の機械部品の運動を入力，出力に基づき考えることが可能であることが分かる．(生理学が身近であれば，入力を「刺激」に，出力を「応答」に置き換えても良い．)

ここでは単純な機械部品を例に取って「部品」および「運動」から入出力関係を説明したが，この考え方はメカニズムの広い使われ方からも分かるように，人文科学系を含め身の回りの諸現象に当てはめることができる為，以下では部品を「要素」と呼び，運動を「状態」と呼ぶことにする．本稿の目的はこの入出力関係を簡便かつ定量的に求める工学的手法に関して示すことである．即ち，下図において O(t)=f(I(t)) と表したときの関数 f を求めることが目的である．

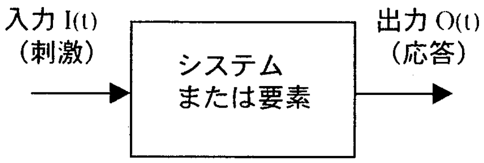

図　要素に対する入力と出力

2．伝達関数法

機械の例が続いても面白くないので電気回路としてコンデンサ(容量C)と抵抗（R）を直列接続した図の回路要素について考える．前節で述べたように，この要素に対し入力と出力を割付けるわけであるが，ここでは仮に直列回路両端に加える電圧 $e_i(t)$を入力，コンデンサの両端に生じる電圧 $e_o(t)$を出力と考えることとする．

さて回路を流れる電流を i(t)とするとキルヒホッフの法則から以下の２式の微分方程式が成立する．即ち入力電圧については，

$$e_i(t)=R\,i(t)+1/C\int i(t)dt$$

出力電圧については，

$e_o(t)=1/C\int i(t)dt$

である．

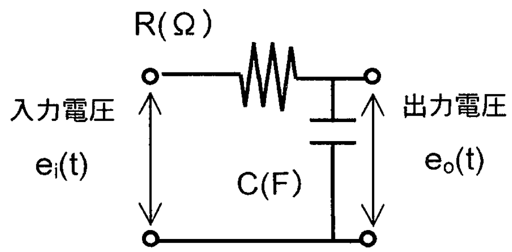

図 CR直列回路

この入出力関係を求めるためには２つの微分方程式を解く必要があるが，一般的に面倒であるためここでは機械的に微分方程式を解くことが可能なラプラス変換という手法を適用する．その場合，上記の微分方程式は時間領域の変数 t が変数 s に変換され，入力電圧については，

$E_i(s)=R\,I(s)+I(s)/Cs$

出力電圧については，

$E_o(s)=I(s)/Cs$

となる．ここで変換前では時間 t による積分演算であったのが変換により変数 s による除算になることがラプラス変換の特徴である（今の例には無いが，もし微分演算であれば逆に s の掛算となる）．従ってこの変換により微積演算を含む方程式が変数 s による代数方程式に変わるため簡便に解を求めることが可能になる．ここで更に入力と出力の比をとりこれを G(s)と定義すると，

$G(s)=Eo(s)/Ei(s)=1/(CRs+1)$

なる式が得られる．

入力信号が例えば１（v）の定電圧，即ち $e_i(t)=1$ とした場合の出力電圧変化を求めよう．入力信号をラプラス変換すると $E_i(s)=1/s$ となり，これを G(s)に掛けると，

$G(s)\times E_i(s) = 1/s(CRs+1)$

となる．これは定義から $E_o(s)$に等しい．この式を次のように２つの部分分数に分けると，

$E_o(s)=1/s - 1/(s+1/CR)$

となる．この式を逆ラプラス変換すると，

$e_o(t)=1-\exp(-t/CR)$

となり，出力電圧変化が指数関数の形で求められた．これは１次遅れ系のステップ応答と呼ばれ時定数は CR(sec)となる．以上の一連の手法により要素の出力を求める方法を伝達関数法と呼ぶ．（詳細は専門書を参照されたい）

この手法の特徴として以下が挙げられる．

- ある要素の挙動が微積分を含む方程式で表現できれば，あとはラプラス変換，逆変換という機械的な操作で出力を求めることが可能である．
- 入力信号の変化に対応できる．上記では入力電圧を定電圧 1(v)としたが，これが仮に交流電圧 $e_i(t)=A\ \sin(wt)$に変わったとしても，このラプラス変換は $E_i(s)=A\ w/(s^2+w^2)$ であり上記と同じ手順を適用できる．即ち，G(s)xEi(s)を逆ラプラス変換することで交流電圧に対する出力を求めることができる．従って，入力が変わる毎に微分方程式をはじめから解き直す必要が無い．考えてみればこれは自明で，入力がいくら変わろうとも要素自体（ここでは抵抗とコンデンサ）が変わる訳ではないので G(s)の繰り返し利用が可能なのである．これを要素の伝達関数(Transfer Functuion)と呼ぶ．
- ここでは CR 回路を例に挙げたが，要素を構成する部品が電気部品以外，機械部品，熱部品，流体部品などに変わっても式 G(s)の形が同じであれば（特に分母の s の次数が同じであれば），外見が変わっても入出力特性，共振特性などは全く同一となる．これは伝達関数の最大の特徴であり，この

ため本法は様々な工学分野のテキストに登場することになる.（逆に本法を理解すると工学の多くの分野を理解し得たことになる．その意味では「横糸」である.）

- 本稿では極めて単純な要素を考えたが，現実の工学システムは一般に多くの要素を含む複雑なシステムである．その場合にも本法を適用し入出力を求めることが可能であろうか．答えはYesである．その場合には，まずシステムを構成する各要素を分解する．（簡単に伝達関数が求められる程度にまで)．その際，要素間の接続関係を明確化しておく．複数要素の伝達関数は要素同士が直列関係であれば各要素の伝達関数の掛算により，また並列関係であれば和により求めることができるので，これを繰り返せば巨大システムに対してもシステム全体の伝達関数を求めることができ，入出力関係の記述が可能となるのである.

3．おわりに

ここでは要素の入出力関係を定量的に求める手法に関し説明した．本手法は微分方程式による記述が可能な要素にしか適用できず，これが不可能な心理学，社会科学的対象は対象外である．また各要素の再接続・合成に際しては線形代数を利用する為，各要素のダイナミクスは線形性を仮定できるものでなくてはならない（非線形要素を含む場合は各要素のダイナミクスを狭い範囲に限定することで線形性を成立させることになる.)．しかしこの条件を満たせば簡便・機械的な演算により出力解を得ることが可能であるため，本手法は設計・モデル化・信号解析を中心とする工学の広い分野で強力な手法として利用されてきた．またそれに併せ計算機上で手軽に利用できる MatLab, Matehmatica 等の便利なツールも開発されてきている．（なお本学情報処理センターでもサイトライセンス契約を結んでおり，教官，学生は Matehmatica の利用が可能である.）

工学とは現状における問題点を解決し生活が少しでも便利に快適に豊かになるよう，身の回りに様々な機器，システム（人工物）を現実化する行為といっても良い．事実そのようにして生活環境，地球環境を変えてきた（悪化させた面も否定できない)．ある目的（現状改善）に基づいて，より望ましい状態を作り出すことがこの人工物の役割であるとしたら，ここで述べた手法は人工物設計に際しその出発点を与えるものである．即ち現状が入力であり出力によりそれを改善しようとする訳であるから，その入出力関係をまず定量的に把握することが人工物設計の第一歩となる．その次には，より”早く”，より”安定に”出力を望ましい状態に近づける為の様々な設計手法が重要となる．（更には，より”安価”，”高信頼性”，”低環境負荷”等々の多重制約条件が求められよう.）これにはフィードバック制御，安定論と呼ぶ別の考えが必要であるが詳細は専門書を参照されたい．尚，ここで例として取り上げた CR 回路の入出力実験は今年度より2年生を対象とした生活生理学実験に組み込み好評である．これらの実験考察を通じて工学・設計に対する考え方が少しでも身近になれば幸いである.