

論文要旨

学位論文題目 非可換空間上の流体力学

氏名 齋藤 麻由美

素粒子論において、ストリング理論やブレーンの理論は重力を含む発散のない理論として統一理論の有力候補とされている。ブレーン理論では、作用関数の中に南部括弧を含む場合がある。南部括弧とは、ポアソン括弧の一般化として提案されたもので、 n 個の力学変数から成る理論を扱う。3 個以上の力学変数で構成される力学系を「南部のダイナミクス」と本論文では呼ぶことにする。ブレーンの作用は世界体積に比例する為、ブレーン理論を扱うときに南部のダイナミクスを用いることは自然である。しかしながら、量子化を行った際にヤコビの恒等式に抵触するという理由から、南部括弧の完全な定式化は未だ為されていない。この事情から、現在でも南部括弧の性質を調べる研究は数多く進められている。一方で、この近年に南部博士が新しい流体力学の定式化を行った。非圧縮性の二次元流体の理論と、位相空間における理論とを Area Preserving Diffeomorphism の観点から結びつけた理論である。その理論では 2 次元非圧縮性流体の運動方程式をポアソン括弧で書き直し、流れ関数をハミルトニアンと見立て流体力学の再考を行っている。この流体力学の新しい見方を、本論文では「南部風流体力学」と呼ぶことにする。同手続きを 3 次元非圧縮性流体へ適用すると、ポアソン括弧の代わりに南部括弧を用いた理論が展開される。

本研究では、南部風流体力学をさらに発展させモヤル (Moyal) 括弧を導入することで非可換空間上の流体力学を考えた。さらに、量子力学との類推により、そのダイナミクスが「最小サイズ」をもつ流体の流れ、つまり粉流体の流れに適合すると予想して数値シミュレーション解析を行った。

本論文の第 1 章では、まず研究の背景として関係する南部括弧の定義を述べた。続けて南部風流体力学の紹介を行った。

第 2 章では、南部風流体力学をもとに変形したナビエ・ストークス方程式から出発し、モヤル積を導入して非可換空間上の流体の運動方程式の導出を行った。具体的には、2 次元非圧縮性流体の運動方程式をポアソン括弧表記で書き換え、ポアソン括弧をモヤル括弧に置き換えることで、非可換空間上の流体力学を考えた。モヤル括弧はスター積による交換関係で定義されており、スター積は非可換パラメーター θ_2 を含む。モヤル括弧を θ_2 で展開すると、 θ_2 の 1 次の項はポアソン括弧になる。この点から非可換空間上に置き換えたナビエ・ストークス方程式をまとめ直し、通常の流体のナビエ・ストークス方程式に付加する形で新しい項を得た。さらに、モヤル積の二項演算の拡張を提案して 3 次元非圧縮性流体に対しても同様の手続きで補正項を導出した。

次の第 3 章では、モヤル積による量子化の手法を経路積分による量子化の場合と比較し評価を行った。通常の量子力学ではオペレーターとして位置座標 x と運動量 p を考えるが、非可換空間上の理論ではそれが位置座標 x と y に置き換わる。これにより類似的な「ハミルトニアン」をトイ・モデルと

論文要旨

して考え、経路積分による期待値の計算に相当する操作を考えることで、モヤル積による「空間の量子化」の検討をした。ここで「空間の量子化」とは、空間の離散化を指す。

第4章においては、南部のダイナミクスを表す作用として L. Takhtajan により提案された作用を通して、 n 次元位相空間における不確定性関係を導出した。

続く第5章では、第2章で導出した2次元の非可換空間上のナビエ・ストークス方程式に対し、運動方程式のもつ性質や振る舞いを調べるための解析を行った。まず、湧き出し、吸い込み、渦、回り込む流れといった特徴的な定常流に対する補正項の振る舞いを解析的に調べた。さらに、流体の数値解析法の一つであるフラクショナル・ステップ法を用いて運動方程式を解き、流れの時間発展の計算を行った。数値シミュレーション解析において、境界条件には砂時計のようなスリットを考えた。これは、導出した非可換空間上の方程式が、位置座標間の「不確定性関係」に起因して「最小サイズをもつ流体」の流れ、すなわち粉粒体の流れを表すと予想したことによる。非可換パラメーター θ_2 の定義から、2次元粒子の面積が（3次元粒子の場合はその体積が）非可換パラメーターに比例すると考えられるため、変数 θ_2 の値を変動させて流れの違いを比較した。

そして最後の章にて、本論のまとめと展望を述べた。