論　文　要　旨

ENUMERATION OF SPATIAL 2-BOUQUET GRAPHS UP TO FLAT VERTEX ISOTOPY
(空間 2-ブーケグラフの固定頂点イソトピー類の数え上げ)
大山口菜都美

空間グラフとは、抽象グラフつまり 1 次元胞体複体をユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内に実現したものである。空間グラフは、$\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた円周である結び目の一般化として扱われることが多く、空間グラフ理論はグラフ理論の一部というよりも結び目理論の拡張として研究されてきた。結び目理論における大きなテーマとして分類問題がある。これは、2 つの結び目あるいは絡み目 (2 成分以上の円周の埋め込み) が与えられた際に、それがアンビエントイソトピーによる同値関係で同値になるかどうかを調べるもので、その同値関係による分類で結び目および絡み目の分類表が作成されてきた。同様に、空間グラフ理論においても分類表が作られてきた。空間グラフに関してはアンビエントイソトピーの他にも、各頂点の近傍が 2 次元ディスク上に固定されていると考え、そのディスクを含めたアンビエントイソトピーを考える固定頂点イソトピーが知られている。先行研究における空間グラフの分類表は皆、すべての頂点が 3 価である空間グラフをアンビエントイソトピーにより分類したものである。3 価以下の頂点のみを持つ空間グラフでは、アンビエントイソトピックであることと固定頂点イソトピックであることが一致するため、これらは固定頂点イソトピーによる分類にもなっている。この 2 つのイソトピーによる分類の差は 4 価頂点で初めて現れ、4 価以上の頂点を持つ空間グラフに対しては、固定頂点イソトピックはアンビエントイソトピックよりも真に精密な同値関係となる。4 価の頂点を持つ最も基本的なグラフは、4 価の頂点を 1 つだけ持ち、それ以外には頂点を持たないグラフ、つまり 1 つの頂点に 2 本の辺がループになって接続している、いわゆる 2-ブーケグラフである。本論文では、2-ブーケグラフを R^3 に埋め込んだものである空間 2-ブーケグラフを、固定頂点イソトピーにより分類し、素なものについて 6 交点までの分類表を作成した。空間固定頂点 2-ブーケグラフを構成するためには、まず 2-ストリングタングルを用意する必要がある。2-ストリングタングルとは、3 次元球体 B^3 と B^3 内にプロパーに埋め込まれた 2 本の弧 t_1, t_2 の組 $(B^3, t_1 \cup t_2)$ のことである。2-ストリングタングルの正則図において t_1, t_2 の計 4 端点と、4 価の固定頂点の正則図における 4 端点をつなぐことで、空間固定頂点 2-ブーケグラフの正則図が得られるが、この時交点の数を増やさないように繋ぐことで、n 交点の正則図を持つ空間固定頂点 2-ブーケグラフが、n 交点の正則図を持つ 2-ストリングタングルから得られることがわかる。また、任意の素な空間固定頂点 2-ブーケグラフは、素な 2-ストリングタングルから構成することができ、また素な 2-ストリングタングルから構成した空間固定頂点 2-ブーケグラフは素なものになっている。よって、素な空間固定頂点 2-ブーケグラフは、素な 2-ストリングタングルにより構成されるもので尽くされている。そこで、任意の素な 2-ストリングタングルを得るために、山野博史氏が導入した 4 正則円盤グラフ（すべての頂点が 4 価の平面グラフ）に関する補題を使う。彼は、基本的かつ素な 4 正則円盤グラフを与え、そ

の各 4 価頂点の近傍にそれぞれ代数タングルの正則図を代入することで、任意の素な 2-ストリングタングルの正則図が得られることを示した。代数タングルについては森内博正氏が数え上げをして分類表を作成している。基本的かつ素な 4 正則円盤グラフの各 4 価頂点の近傍に代数タングルの正則図を代入し、得られたものを 2-ストリングタングルの同値関係で分類すると、6 交点以下のすべての素な 2-ストリングタングルは 51 個存在することがわかった。これらから 51 個の空間固定頂点 2-ブーケグラフを構成した後、それぞれが固定頂点イソトピックであるかどうか判断するために使用するのは、1 変数のローラン多項式である山田多項式である。山田多項式は、空間グラフの正則図に対して計算できる多項式で、$(-A)^n (n \in \mathbb{Z})$ をかけることを除いて空間グラフの固定頂点イソトピー不変量になることが知られている。得られたすべての空間固定頂点 2-ブーケグラフの正則図に対して求めた山田多項式が $(-A)^n (n \in \mathbb{Z})$ をかけることを除いて異なることが確認できたため、それぞれが互いに固定頂点イソトピックでないことが証明された。空間固定頂点 2-ブーケグラフを K(knot) 型、L(link) 型として 2 つの型に分けると、結論として 6 交点以下では、K 型には 33 個の固定頂点イソトピー類が、L 型には 18 個の固定頂点イソトピー類が存在することを示せた。