1　宇宙の物質密度揺らぎの進化

この章ではEinstein-de Sitter宇宙モデルにおける宇宙の密度揺らぎの成長について一般的なレビューをする（参考：Peebles (1980) [1] ）。

1.1　宇宙の物質密度揺らぎの進化に対する方程式と、線形理論

宇宙の物質密度の揺らぎ δ は、宇宙の物質密度を ρ とおくと、

$$\delta\left(\mathrm{r},t\right)=\frac{\rho\left(\mathrm{r},t\right)-\bar{\rho}}{\bar{\rho}}, \tag{1.1}$$

と表わされる。ここで、

$\mathbf{r}$: 固有座標系

$\mathbf{x}$: 共動座標系

と、区別する。

いま、圧力ゼロの非相対論的流体として考える。また、Einstein-de Sitter宇宙モデル（密度パラメーター $\Omega=1$、宇宙項$\Lambda=0$) の中での議論をする。

宇宙の物質密度の揺らぎの成長は、

$$Poisson\text{方程式} \quad : \quad \Delta_{\mathbf{r}}\tilde{\phi}=4\pi G\rho,, \tag{1.2}$$

$$\text{連続の式} \quad : \quad \dot{\rho}+\nabla_{\mathbf{r}}\left(\rho\tilde{\mathbf{u}}\right)=0,, \tag{1.3}$$

$$Euler\text{方程式} \quad : \quad \dot{\tilde{\mathbf{u}}}+\left(\tilde{\mathbf{u}}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\right)\tilde{\mathbf{u}}=-\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{\phi}, \tag{1.4}$$

の３式で記述される。この三式は非線形で非局所的な連立方程式となってしまっていて一般に厳密解が存在しない。

ただし、非相対論的に扱ってよいのは、

$$\frac{\tilde{u}}{c}\sim\frac{H_0 d}{c}=\frac{d\cdot h_0}{3\times10^3 Mpc}\approx\frac{d\cdot h_0}{100\text{億光年}}\ll1$$

$$\left(c = 3 \times 10^5 km/s, H_0 = h_0 \times 100 km/s/Mpc\right)$$

より、100億光年よりも充分小さいスケールの揺らぎについてである。(ここでcは光速、H_0は現在のHubble定数である。)超銀河団($\delta \sim 2$)の広がりが数億光年程度なので、現在の宇宙では、100億光年程度のスケールの揺らぎになると、線形理論が充分成立するほど小さいと考えられる。

ここで、Einstein-de Sitter宇宙を考えているのでスケールファクターaは$a \propto t^{2/3}$、又Hubble 定数は$H = \dot{a}/a = 2/(3t)$で、さらに

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= a\mathbf{x}, && (1.5) \\ \tilde{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{r}} &= (a\mathbf{x})^{\cdot} \\ &= \dot{a}\mathbf{x} + a\dot{\mathbf{x}} \\ &= H\mathbf{r} + \mathbf{u}, && (1.6) \\ \mathbf{u} &= a\dot{\mathbf{x}} = a\mathbf{v}, && (1.7) \end{aligned}$$

また、

$$\nabla_{\mathbf{r}} = \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}, \tag{1.8}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} - \frac{\dot{a}}{a}\left(\mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\right) \tag{1.9}$$

よって、これらをつかって、(1.2)~(1.4)を、共動座標系でみた式に書き換えると、

$$\dot{\delta} + \nabla \cdot [(1+\delta)\mathbf{v}] = 0, \tag{1.10}$$

$$\dot{\mathbf{v}} + 2H\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla\Phi = \mathbf{0}, \tag{1.11}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{3}{2}H^2\delta, \tag{1.12}$$

$\mathbf{x}$、$\mathbf{v}(\mathbf{x})$、$\Phi(\mathbf{x},t)$ はそれぞれ共動座標でみた位置、固有速度、ポテンシャルである。この論文の中ではEinstein-de Sitter 宇宙の中の議論をしているわけであるが、この論文のすべての議論は他の宇宙モデル$\Omega \neq 1, \Lambda \neq 0$での議論にも拡張することは可能である。

後ほどこれらの非線型方程式に対するさまざまな近似法について紹介する。線形領域（$\delta \ll 1$）では上の式で非線形な項を無視できるので、減衰モードを無視すると、

$$\delta_{\mathrm{L}}(\mathbf{x},t) = \frac{a(t)}{a_{\mathrm{in}}}\delta_{\mathrm{in}}(\mathbf{x}) = D(t), \tag{1.13}$$

$$\Phi_{\mathrm{L}}(\mathbf{x},t) = \frac{3}{2}H^2\triangle^{-1}\delta_{\mathrm{L}}, \tag{1.14}$$

$$\mathbf{v}_{\mathrm{L}}(\mathbf{x},t) = -\frac{2}{3H}\nabla\Phi_{\mathrm{L}}, \tag{1.15}$$

という簡単な時間発展に対する解が得られる。ただし$D(t)$ は線形成長モード、$\triangle^{-1}$は逆ラプラシアン

$$\triangle^{-1}F(\mathbf{x}) \equiv -\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\frac{F(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|}. \tag{1.16}$$

である。これらの量は$\delta_{\mathrm{L}} \propto a$、$\Phi_{\mathrm{L}} \propto a^{-2}$、$\mathbf{v}_{\mathrm{L}} \propto a^{-1/2}$という簡単な時間依存性を持っている。（参考：付録 A）ここで簡単のために固有ポテンシャル$\phi = a^2\Phi$を導入する。Einstein-de Sitter 宇宙では線形固有ポテンシャルは、$\phi_{\mathrm{L}}(\mathbf{x},t) = \mathrm{constant} \equiv \phi(\mathbf{x})$ となる。