2 準非線形近似

この章では、準線形領域（$|\delta| \leq 1$）において充分成り立ついくつかの非線形近似法を Euler 的手法と、Lagrange 的手法に分けて紹介する。

2.1 Euler 的手法

2.1.1 高次の摂動理論

高次の摂動展開は、線形解に非線形補正項を足していき、

$$\delta = \delta_{\mathrm{L}} + \delta^{(2)} + \delta^{(3)} + \cdots, \tag{2.1}$$

$$\Phi = \Phi_{\mathrm{L}} + \Phi^{(2)} + \Phi^{(3)} + \cdots, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{L}} + \mathbf{v}^{(2)} + \mathbf{v}^{(3)} + \cdots, \tag{2.3}$$

としていくものでこれらの展開を、式（1.10）から（1.12）によって逐次的に解いていくものである。例えば二次の解は、

$$\delta = \delta_{\mathrm{L}} + \frac{5}{7}\delta_{\mathrm{L}}^{2} + \delta_{\mathrm{L},i}\varphi_{\mathrm{L},i} + \frac{2}{7}\varphi_{\mathrm{L},ij}\varphi_{\mathrm{L},ij} \tag{2.4}$$

のように書くことができる（参考：Peebles (1980)［1]、Fry (1984)［21]）。ここで、

$$\varphi = \triangle^{-1}\delta_{\mathrm{L}} \tag{2.5}$$

である。しかしながら、さらに高次の解になると、非常に複雑になってくる。三次、四次の解の詳細については、例えばフーリエ空間での解は、Goroff et al. (1986)［22] によって求められている。この論文においては、一般的な解の形は必要としないのでここではあえてふれないことにする。

2.1.2 Frozen flow 近似

ここでは、Matarrese et al. (1992) [3] によって提案された Frozen flow 近似（FF）について説明する。Frozen flow 近似とは、速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ に対して線形理論での解を準非線形領

域においてもそのまま適用するという近似法である。つまり、速度は

$$\mathbf{v}_{\mathrm{FF}}(\mathbf{x},t) = -\frac{2}{3a^2H}\nabla_x\phi_{\mathrm{L}}(\mathbf{x}), \tag{2.6}$$

となる。

上式からわかるように、このとき、各場所において、物質の流れる速度のベクトル（の向き）が決まってしまう。つまり、Frozen flow 近似では、物質は線形速度場で決められた、固定された道筋に沿って動くという近似をしていることになる。

すると、それぞれの質点の位置 $\mathbf{x}(t)$ の従う方程式は、(2.6) より

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\frac{2}{3a^2H}\nabla_x\phi_{\mathrm{L}}(\mathbf{x}(t)), \tag{2.7}$$

となる。ここで d/dt は Lagrange 的な時間微分である。さらに、微分変数を t から、スケールファクター a にかえると、

$$\frac{d\mathbf{x}}{da} = -\frac{2}{3a^3H^2}\nabla_x\phi_{\mathrm{L}}(\mathbf{x}). \tag{2.8}$$

よって、これを解けばよい。

2.1.3 Linear potential 近似

ここでは、Brainerd et al. (1993) [4] や Bagla et al. (1994) [14] によって提案された Linear potential 近似（LP）を紹介する。この近似法は、重力ポテンシャルの時間発展が線形理論での解のまま保たれるという仮定に基づいている。つまり、

$$\phi = \phi_{\mathrm{in}} \tag{2.9}$$

として、質点は初期のポテンシャル ϕ_{in} の作る力に沿ってのみ動くという近似になっている。よって各質点の位置を記述する微分方程式は、

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + 2H\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\frac{1}{a^2}\nabla_x\phi_{\mathrm{L}}(\mathbf{x}). \tag{2.10}$$

となり、さらに変数を t から、スケールファクター a にかえて、

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{da^2} + \frac{3}{2a}\frac{d\mathbf{x}}{da} + \frac{1}{a^4H^2}\nabla_x\phi_{\mathrm{L}}(\mathbf{x}) = 0. \tag{2.11}$$

となる。これを解けばよい。

2.2 Lagrange 的手法

ここでは、Lagrangian 座標系での摂動理論による近似法である、Zel'dovich-type 近似法をレビューする (参考：Zel'dovich (1970) (1973) [30] [31] Bernardeau (1994) [5]、Buchert (1994) [18]、Bouchet et al. (1995) [9] Catelean (1995) [20])。Zel'dovich-type 近似法ではLagrangian 座標系 $\mathbf{q}$ でラベルされた質量素片の運動を考える。

$\mathbf{x}$: Eulerian 座標系

$\mathbf{q}$: Lagrangian 座標系

とおくと、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{q}$ は、

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \mathbf{\Psi}(\mathbf{q}, t), \tag{2.12}$$

という式で関係付けられる。$\mathbf{q}$ は、初期の位置とみることができ、(2.12) で定義される displacement field $\mathbf{\Psi}$ が力学的運動を特徴づける変数となる。

ここで、

$$\begin{aligned} J_{ij}(\mathbf{q}, t) &= \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \\ &= \delta_{ij} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial q_j}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$J = |det\,[J_{ij}]|, \tag{2.14}$$

とおく。Lagrange 空間での、密度を $\bar{\rho}_i$ とおいて、微小質量を比べると、

$$\begin{aligned} d\,m &= \rho d^3\mathbf{r} \\ &= \rho \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}\right| d^3\mathbf{q} \\ &= \rho a^3 J^{-1} d^3\mathbf{q} \\ &= \bar{\rho}_i d^3\mathbf{q}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

よって、密度揺らぎ δ は、

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} \equiv \delta + 1 = J^{-1}, \tag{2.16}$$

$$(\bar{\rho}_i / a^3 = \bar{\rho})$$

となっていて、これは

$$\frac{d^2\mathbf{\Psi}}{dt^2} + 2H\frac{d\mathbf{\Psi}}{dt} = -\nabla_x \Phi(\mathbf{x}, t), \tag{2.17}$$

$$\nabla_x^2 \Phi = \frac{3}{2} H^2 \Omega \delta(\mathbf{x}, t), \tag{2.18}$$

を解くことで決定される。この$\mathbf{\Psi}$に対する非線形方程式を$\frac{\partial \Psi_i}{\partial q_j}$を十分小さい量として展開して逐次的に解いていくことができ、その一次（線形）の解がZel'dovich近似（ZA）である。そして、二次、三次がそれぞれPost-Zel'dovich近似（PZA）、Post-post-Zel'dovich近似（PPZA）と呼ばれていて近似の精度が改善されている。

(2.17)と(2.18)のdivergenceとrotationをとることにより$\mathbf{\Psi}(\mathbf{q}, t)$に対する運動方程式がそれぞれ

$$\left[\frac{d^2\Psi_{i,j}}{dt^2} + 2H\frac{d\Psi_{i,j}}{dt}\right]\left(J^{-1}\right)_{ji} + \frac{3}{2}H^2\Omega\left(J^{-1} - 1\right) = 0, \tag{2.19}$$

$$\epsilon_{ijk}\left[\frac{d^2\Psi_{j,l}}{dt^2} + 2H\frac{d\Psi_{j,l}}{dt}\right]\left(J^{-1}\right)_{lk} = 0 \tag{2.20}$$

と導出される。ここでd/dtはLagrange的な時間微分である。また、空間微分に関しては

$$\begin{aligned}(\nabla_\mathbf{x})_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial q_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial q_j} \\ &= (J^{-1})_{ji}\frac{\partial}{\partial q_j},\end{aligned}$$

という関係がある。またLagrange的摂動論でよく採用される条件としてここで渦無し$\nabla_x \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$を仮定して、

$$\epsilon_{ijk}\frac{d\Psi_{j,l}}{dt}\left(J^{-1}\right)_{lk} = 0, \tag{2.21}$$

を(2.20)のかわりに使うことができる。線形重力場においては渦は減衰モードとなっていて成長しない。よってその延長であるここでの議論では渦の効果は無視できるのである。渦

ありのときの議論は、Buchert (1992) [17]、Buchert et al. (1993) [19] で議論されている。(2.19) と (2.21) は$\Psi_{i,j}$を$\Psi_{i,j}=\Psi_{i,j}^{(1)}+\Psi_{i,j}^{(2)}+\Psi_{i,j}^{(3)}+\cdots$ と展開することで逐次的に解いていく。Einstein-de Sitter 宇宙では各次の項の時間依存性は、

$$\mathbf{\Psi}^{(n)}=\left(\frac{2}{3a^2H^2}\right)^n\psi^{(n)}(\mathbf{q})=D^n\psi^{(n)}(\mathbf{q}), \tag{2.22}$$

となる。Dは線形成長モードである。((1.13) を見よ。) すると、

$$\begin{aligned}
J &= |det\,[J_{km}]| \\
&= \left|det\left(\delta_{ij}^D+\Psi_{i,j}\right)\right| \\
&= \begin{vmatrix} 1+\Psi_{1,1} & \Psi_{1,2} & \Psi_{1,3} \\ \Psi_{2,2} & 1+\Psi_{2,2} & \Psi_{2,3} \\ \Psi_{3,1} & \Psi_{3,2} & 1+\Psi_{3,3} \end{vmatrix} \\
&= 1+O^1(\Psi_{i,j})+O^2(\Psi_{i,j})+O^3(\Psi_{i,j}),
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\left\{\begin{aligned}
O^1(\Psi_{i,j}) &= \Psi_{1,1}+\Psi_{2,2}+\Psi_{3,3} \\
&= \Psi_{i,i}, \\
O^2(\Psi_{i,j}) &= \Psi_{1,1}\Psi_{2,2}+\Psi_{2,2}\Psi_{3,3}+\Psi_{3,3}\Psi_{1,1} \\
&\quad -\Psi_{1,2}\Psi_{2,1}-\Psi_{2,3}\Psi_{3,2}-\Psi_{3,1}\Psi_{1,3} \\
&= \frac{(\Psi_{i,i})^2-\Psi_{i,j}\Psi_{j,i}}{2}, \\
O^3(\Psi_{i,j}) &= det[\Psi_{i,j}].
\end{aligned}\right. \tag{2.24}$$

また、

$$\begin{aligned}
J_{ik} &= \delta_{ik}^D+\Psi_{i,k}, \\
J_{ik}^{-1} &= J_{ik}^{-1(0)}+J_{ik}^{-1(1)}+J_{ik}^{-1(2)}+\ldots,
\end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
\delta_{ij}^D &= J_{ik}J_{kj}^{-1} \\
&= J_{ij}^{-1(0)}+J_{ij}^{-1(1)}+\Psi_{i,k}J_{kj}^{-1(0)}+\ldots,
\end{aligned}$$

より、

$$\left\{\begin{array}{lcl} J_{ij}^{-1(0)} & = & \delta_{ij}^{D}, \\ J_{ij}^{-1(1)} & = & -\Psi_{i,k} J_{kj}^{-1(0)} = -\Psi_{i,j}, \\ J_{ij}^{-1(2)} & = & -\Psi_{i,k} J_{kj}^{-1(1)} = \Psi_{i,k}\Psi_{k,j}, \\ J_{ij}^{-1(3)} & = & -\Psi_{i,k} J_{kj}^{-1(2)} = -\Psi_{i,k}\Psi_{k,l}\Psi_{l,j}, \\ J_{ij}^{-1(4)} & = & -\Psi_{i,k} J_{kj}^{-1(3)} = \Psi_{i,k}\Psi_{k,l}\Psi_{l,m}\Psi_{m,j}, \\ & \vdots & \end{array}\right. \tag{2.25}$$

これらを代入して運動方程式を逐次的に解いていく。三次までの解は、

$$\psi_i^{(1)} = -\partial_i \phi_{\mathrm{L}}(\mathbf{q}), \tag{2.26}$$

$$\psi_i^{(2)} = -\frac{3}{14}\partial_i \triangle^{-1}\left(\psi_{j,j}^{(1)}\psi_{k,k}^{(1)} - \psi_{j,k}^{(1)}\psi_{j,k}^{(1)}\right), \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} \psi_i^{(3)} = & -\frac{5}{9}\partial_i \triangle^{-1}\left(\psi_{j,j}^{(1)}\psi_{k,k}^{(2)} - \psi_{j,k}^{(1)}\psi_{k,j}^{(2)}\right) - \frac{1}{3}\partial_i \triangle^{-1}\det\left[\psi_{j,k}^{(1)}\right] \\ & -\frac{1}{3}\partial_j \triangle^{-1}\left(\psi_{k,j}^{(1)}\psi_{i,k}^{(2)} - \psi_{k,i}^{(1)}\psi_{j,k}^{(2)}\right). \end{aligned} \tag{2.28}$$

となる。この一次の解がZel'dovich 近似（ZA）で、二次、三次がPZA、PPZAである。一次、二次までは渦なし（irrotational）であるが、三次の解（2.28）は、渦（rotational）項（最後の項）を持っている。

これらの近似は質点同士の衝突（shell crossing）が起こるまでしか成り立たず、ここでの、連続体として扱うという枠組みのなかではそれ以降の振る舞いを議論することはできない。このshell crossingによる破綻はZTAの次数をあげることによっては全く回避できるものではないのである。shell crossing については5章で詳しく議論する。